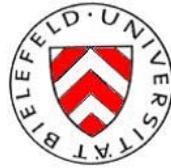


Die Stringtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik

Bachelorarbeit

zur Erlangung eines Grades des Bachelor of Science
der Fakultät für Physik
der Universität Bielefeld



vorgelegt von

Dennis Schubert

Betreuer und 1. Gutachter Prof.Dr. York Schröder
2. Gutachter: Marc Sangel

Bielefeld, den 9. Oktober 2013

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, den 9. Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Die Bosonische Stringtheorie	3
2.1. Der Nicht-relativistische String	3
2.1.1. Bewegungsgleichungen und Randbedingungen	3
2.2. Der Relativistische String	6
2.2.1. Reparametrisierungs-Invarianz der Fläche	8
2.2.2. Die Nambu-Goto-Wirkung	9
2.2.3. Bewegungsgleichungen, Randbedingungen und B-Branen	9
2.2.4. Die statische Eichung	11
2.2.5. Die Transversal-Geschwindigkeit	13
2.3. Ströme auf String-Weltflächen	15
2.4. Relativistische Lichtkegel-Strings	18
2.4.1. Lösung der Wellengleichung und Moden-Entwicklung	19
2.5. Lichtkegel-Lösung der Bewegungsgleichung	22
2.6. Quantisierung offener, relativistischer Strings	24
2.6.1. Virasorooperatoren offener Strings	27
2.6.2. Der Zustandsraum offener quantenmechanischer Strings	31
2.7. Quantisierung geschlossener, relativistischer Strings	34
2.7.1. Virasorooperatoren geschlossener Strings	35
2.7.2. Der Zustandsraum	36
3. Einführung in die Superstringtheorie	39
3.1. Der Neveu-Schwarz Sektor	41
3.2. Der Ramond Sektor	43
3.3. Offene Superstrings	45
3.4. Theorien geschlossener Strings	45
4. D-Branen und Eichfelder	48
4.1. Dp -Branen und Randbedingungen	48
4.2. Offene Strings zwischen parallelen Dp -Branen	51
5. Die Stringtheorie in der Teilchenphysik	55
5.1. Schneidende D -Branes	55
5.2. D -Branen und die Standardmodell-Eichgruppe	56
5.3. Offene Strings und die Fermionen des Standardmodells	57
5.4. Das Standardmodell auf sich schneidenden $D6$ -Branen	64
5.5. Verschiedenen Möglichkeiten zum Standardmodell	67
6. Zusammenfassung	68
6.1. Perspektiven	68
A. Formelsammlung	69
B. Herleitungen	71
Literatur	73
Abbildungsverzeichnis	74

1. Einleitung

Die theoretische Physik hatte über die Jahrzehnte hinweg das Ziel verschiedene Theorien zu einer einheitlichen Theorie zusammenzufassen. Bereits im 19. Jahrhundert gelang es *James Clerk Maxwell* zwei zunächst unterschiedlich zu scheinende Phänomene zu vereinen. Die Maxwell-Gleichungen vereinen Elektrizität und Magnetismus zum *Elektromagnetismus*. Diese Theorie ist eine klassische Theorie des Elektromagnetismus. Zwei andere große Theorien sind Albert Einstein's *Allgemeine Relativitätstheorie* und die *Quantenmechanik*. Beide liefern für sich sehr genaue Ergebnisse in Experimenten. Die Allgemeine Relativitätstheorie beschreibt den Makrokosmos sehr genau. Die Quantenmechanik hingegen beschreibt den Mikrokosmos sehr gut. Selbst Albert Einstein versuchte lange Zeit die beiden Theorien in einer allumfassenden Theorie zu vereinen. Alle Versuche, auch die seiner Mitstreiter, schlugen bislang fehl. Es existieren vier fundamentale Wechselwirkungen. Die gravitative Wechselwirkung wird von der Allgemeinen Relativitätstheorie beschrieben. Diese ist jedoch eine klassische Theorie. Die zweite fundamentale Wechselwirkung ist die *Elektromagnetische Wechselwirkung*. Diese klassische Theorie wird durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben. Die dritte fundamentale Wechselwirkung ist die *Schwache Wechselwirkung*. Diese Kraft ist für den β -Zerfall verantwortlich. Die Schwache Wechselwirkung ist sehr viel schwächer als beispielsweise die Elektromagnetische Wechselwirkung. Die vierte und letzte Wechselwirkung ist die *Starke Wechselwirkung*. Diese Kraft hält Neutronen, Protonen und viele andere Teilchen im Innersten zusammen. Die Fülle an klassischen Theorien reichen jedoch nicht aus, um jegliche physikalische Phänomene beschreiben zu können. Die *Quantenelektrodynamik* (QED) ist die quantentheoretische Version der klassischen Elektrodynamik. Das Photon entsteht in der QED als Quantum des elektromagnetischen Feldes.

Die quantentheoretische Version der Starken Kraft, ist die *Quantenchromodynamik* (QCD). Die Übertragungsteilchen sind die acht masselosen Gluonen. In den späten 1960 Jahren vereinten die Physiker Steven Weinberg und Abdus Salam den Elektromagnetismus und die schwache Kraft zu der *Elektroschwachen Kraft*. Die elektroschwache Theorie zusammen mit der QCD bilden das Standardmodell der Teilchenphysik. Im Standardmodell sind zwölf Übertragungsteilchen. Da sind die acht Gluonen, die W^\pm , das Z^0 und das Photon. Dieses sind alles Bosonen. Andererseits beinhaltet das Standardmodell die Materieteilchen, die Fermionen.

In dieser Arbeit wird untersucht, wie sich das Standardmodell der Teilchenphysik aus der Stringtheorie ergeben könnte. Diese Arbeit behandelt nur eine Möglichkeit, nämlich die der sich schneidenden D -Branen. Das erste Kapitel behandelt die bosonsiche Stringtheorie. Diese wird im zweiten Kapitel dann zur Superstringtheorie weiterentwickelt. Weiterhin wird im dritten Kapitel gezeigt, wie sich aus der Stringtheorie D -Branen und Eichfelder ergeben, um im vierten Kapitel das Standardmodell der Teilchenphysik aus sich schneidenden D -Branen zu konstruieren.

Zum größten Teil stammen die Informationen aus dem Buch von *Barton Zwiebach, A First Course In Stringtheory*. Dies ist ein Standardwerk, um die Stringtheorie auf Bachelor-Niveau verständlich zu machen.

Obwohl diese Arbeit auf deutsch verfasst ist, werden die englischen Begriffe *Strings*¹ und *Branen*² verwendet.

¹engl.:Fäden

²Ist eine Abkürzung des Begriffs *Membrane*, engl.: Membran

2. Die Bosonische Stringtheorie

Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der historisch am frühesten verfassten Stringtheorie; der *bosonischen Stringtheorie*. Diese Theorie beschreibt lediglich Bosonen, Fermionen werden nicht behandelt. Es werden in diesem Abschnitt die Grundlagen der bosonischen Stringtheorie gelegt. Die Ausführungen basieren auf [1], Kapitel 4 bis Kapitel 13.

2.1. Der Nicht-relativistische String

Ein String ist ein eindimensionales Objekt, eine Saite mit einer Masse. Strings können sich transversal oder longitudinal bewegen. Dabei wird die Richtung entlang des Strings die *longitudinale* Richtung und die Richtung orthogonal zum String die *transversale* Richtung genannt.

Ein klassischer nicht-relativistischer String kann in der (x, y) -Ebene beschrieben werden. Seine Endpunkte sind bei $(0, 0)$ und $(a, 0)$ festgehalten. Seien die transversale Verschiebung eines Punktes auf dem String durch die y -Koordinate und die longitudinale Verschiebung durch die x -Achse gegeben. Die Abbildung 2.1 zeigt die Situation. Die Bewegungsgleichung für einen nicht-relativistischen String ist eine Wellengleichung der Form

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1)$$

Diese ist analog zur Wellengleichung der klassischen Mechanik³. Für den gestreckten String ist die Geschwindigkeit der Quotient aus der String-Spannung T_0 und der String-Massendichte μ_0 ,

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}. \quad (2.2)$$

Gleichung (2.2) zeigt, dass sich die Wellen mit steigender Spannung T_0 schneller bewegen.

2.1.1. Bewegungsgleichungen und Randbedingungen

Die Gleichung (2.1) ist eine partielle Differentialgleichung mit sowohl räumlichen, als auch zeitlichen Ableitungen. Zur Lösung dieser Gleichung werden Randbedingungen hinzugezogen, die die Lösungen am Rand des Systems festlegen. In diesem Fall werden die *Dirichlet-* und *Neumann-Randbedingungen* benutzt. Die Dirichlet-Randbedingungen

$$y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0, \quad (2.3)$$

spezifizieren die Position der String-Endpunkte. Die Neumann-Randbedingungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x = a), \quad (2.4)$$

sind zur Beschreibung von sich frei entlang der y -Achse bewegenden String-Endpunkten nützlich.

³In der klassischen Mechanik lautet die Wellengleichung für eine Saite $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ mit v_0 als die Geschwindigkeit der Welle.

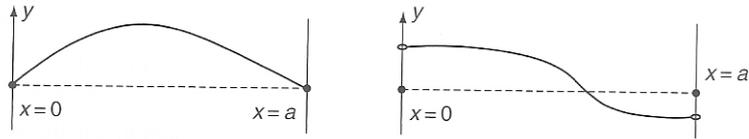


Abbildung 2.1: Links: Ein String mit Dirichlet-Randbedingungen an den Endpunkten. Rechts: Ein String mit Neumann-Randbedingungen an den Endpunkten (Abb. aus[1]).

Die Funktion

$$y(t, x) = y(x) \sin(\omega t + \phi), \quad (2.5)$$

beschreibt einen String, dessen Punkte in y -Richtung sinusförmig oszillieren, wobei ω die Winkelfrequenz der Oszillation und ϕ eine konstante Phase beschreiben. Einsetzen von (2.5) in (2.1) liefert

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \omega^2 \frac{\mu_0}{T_0} y(x) = 0. \quad (2.6)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Mit Dirichlet-Randbedingungen folgt die nicht-triviale Lösung

$$y_n(x) = A_n \sin\left(\frac{x\pi n}{a}\right) \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.7)$$

mit A_n als eine beliebige Konstante. Der Wert $n = 0$ kann ausgeschlossen werden, da es sich dabei um einen ruhenden String handelt. Durch Einsetzen von (2.7) in (2.6) bekommt man die möglichen Frequenzen

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \left(\frac{\pi n}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Verwendet man Neumann-Randbedingungen, so erhält man folgende Gleichung

$$y_n(x) = A_n \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Hier kann der Wert $n = 0$ nicht ausgeschlossen werden. Der String oszilliert zwar nicht, ist aber nach $y(t, x) = A_0$ verschoben. Die möglichen Frequenzen sind aber die gleichen wie in (2.8).

Die Bewegungsgleichungen eines nicht-relativistischen Strings erhält man aus der *Variation der Wirkung*. Ein String mit konstanter Massendichte μ_0 , einer konstanten Spannung T_0 und festen Endpunkten bei $x = 0$ und $x = a$, besitzt eine kinetische Energie von

$$T = \frac{1}{2} \int_0^a (\mu_0 dx) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (2.10)$$

Die potentielle Energie V ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{2} \int_0^a T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.11)$$

Die Lagrange-Funktion ergibt sich dann aus $T - V$

$$L(t) = \int_0^a \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \equiv \int_0^a \mathcal{L} dx, \quad (2.12)$$

mit der *Lagrangedichte*

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (2.13)$$

Die String-Wirkung ist dann

$$\begin{aligned} S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} L(t) dt = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^a \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^a dx \mathcal{L} \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Definiert man weiterhin

$$\mathcal{P}^t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}, \quad (2.15)$$

$$\mathcal{P}^x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}, \quad (2.16)$$

mit $y' = \frac{\partial y}{\partial x}$ ergeben sich die Bewegungsgleichung des nicht-relativistischen Strings durch Variation der Wirkung S zu⁴

$$\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} = 0. \quad (2.17)$$

⁴Herleitung vgl. Anhang B Herleitungen

2.2. Der Relativistische String

Genau wie ein Punktteilchen in der Raumzeit eine *Weltlinie* beschreibt, wird die String-Trajektorie in der Raumzeit durch dessen *Weltfläche* beschrieben. Diese Fläche ist zwei-dimensional. Die Abbildung 2.2 zeigt die zwei-dimensionalen Weltflächen im Raumzeit-Diagramm.

Für ein Punktteilchen ist die Wirkung proportional zu der Eigenzeit, die auf der Weltlinie des Punktteilchens verstreicht. Die Eigenzeit multipliziert mit der Lichtgeschwindigkeit c ist die lorentzinvariante Eigenlänge der Weltlinie. Bei Strings spricht man von der lorentzinvarianten *Eigenfläche* der Weltfläche. Die relativistische String-Wirkung ist proportional zu seiner Eigenfläche.

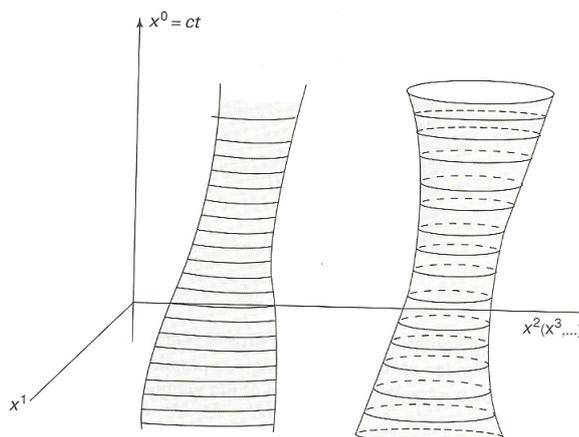


Abbildung 2.2: Die Weltfläche eines offenen Strings (links) und die eines geschlossenen Strings (rechts)(Abb. aus[1]).

Es gilt nun die Weltflächen der Strings geeignet mathematisch zu beschreiben.

Eine Linie in der Raumzeit kann durch eine Variable parametrisiert werden. Eine Fläche ist ein zwei-dimensionales Objekt, dass zwei Parameter, ξ^1 und ξ^2 , erfordert. Jeder Punkt \vec{x} lässt sich dann als $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$ darstellen. Im Allgemeinen bilden die infinitesimalen Flächenelemente ein *Parallelogramm*. Die Seiten dieses Parallelogramms werden mit $d\vec{v}_1$ und $d\vec{v}_2$ bezeichnet. Dies ist in Abbildung 2.3 gezeigt.

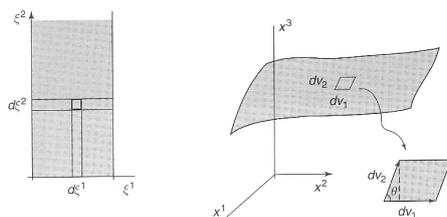


Abbildung 2.3: Links: Der Parameter-Raum (ξ^1, ξ^2) mit einem kleinen ausgewählten Rechteck. Rechts: Die Fläche in in dem Ziel-Raum mit einem kleinen Rechteck, ein Parallelogramm, das durch die Vektoren $d\vec{v}_1$ und $d\vec{v}_2$ aufgespannt wird (Abb. aus[1])

Außerdem werden zwei Tangentialvektoren der Form

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 \quad \text{und} \quad d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2, \quad (2.18)$$

konstruiert. Die Fläche dA wird über

$$\begin{aligned} dA &= |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| |\sin(\theta)| = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} \\ &= \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2(\theta)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

bestimmt, wobei θ der Winkel zwischen den Vektoren $d\vec{v}_1$ und $d\vec{v}_2$ ist. Unter Verwendung des Skalarprodukts erhält man

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}. \quad (2.20)$$

Die Beziehungen aus (2.18) eingesetzt in (2.20) liefern für das Flächenelement dA

$$dA = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}. \quad (2.21)$$

Die gesamte Fläche bekommt man durch Integration aller Flächenelemente

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}. \quad (2.22)$$

Das Integral erstreckt sich über die Bereiche der Parameter ξ^1 und ξ^2 .

2.2.1. Reparametrisierungs-Invarianz der Fläche

Die Parametrisierung einer Fläche erlaubt es das Flächenelement explizit auszudrücken. Die Fläche ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Dies nennt man *Reparametrisierungs-Invarianz*. Eine sinnvolle Wahl der Parametrisierung liefert unter Umständen einfacher zu lösende Bewegungsgleichungen eines physikalischen Systems. Das Flächenfunktional aus (2.22) ist reparametrisierungs-invariant. Denn (2.22) ist unter einer Transformation von $(\xi^1, \xi^2) \rightarrow (\tilde{\xi}^1, \tilde{\xi}^2)$ invariant⁵. Da die Vektoren $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}$ und $\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}$ Basisvektoren sind, ergibt sich durch

$$g_{ij}(\xi) \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j}, \quad (2.23)$$

die *induzierte Metrik*. Damit kann die Fläche A umgeschrieben werden in

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \quad \text{mit } g \equiv \det(g_{ij}). \quad (2.24)$$

Die Weltfläche eines Strings wird parametrisiert durch σ und τ , d.h. $\xi^1 = \tau$ und $\xi^2 = \sigma$. Dabei beschreibt σ die Position entlang des Strings und τ die Zeit auf dem String. $X^\mu(\tau, \sigma)$ beschreibt die Stringkoordinaten in der Raumzeit

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)). \quad (2.25)$$

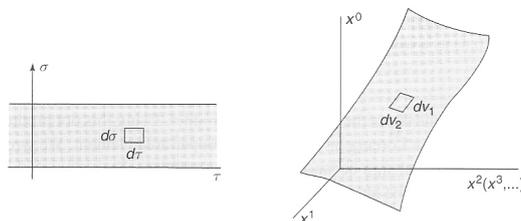


Abbildung 2.4: Links: Der Parameter-Raum (τ, σ) mit einem kleinen ausgewählten Rechteck. Rechts: Die Fläche der Target-Raumzeit mit einem Parallelogramm, das durch die Vektoren dv_1^μ und dv_2^μ aufgespannt wird (Abb. aus[1]).

Die Abbildung 2.4 zeigt auf der linken Seite die Parameter-Raum-Oberfläche eines offenen Strings und auf der rechten Seite die Oberfläche in der Raumzeit. In dem Parameter-Raum, kann σ nur endliche Werte annehmen, wobei sich τ hingegen von minus Unendlich bis plus Unendlich erstrecken kann.

Das Flächenfunktional A aus (2.22) ergibt sich dann zu

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}, \quad (2.26)$$

⁵Zur vollständigen Herleitung vgl.[1],S.104-105

wobei die Tangentialvektoren in Analogie zu (2.18) gegeben sind durch

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma. \quad (2.27)$$

2.2.2. Die Nambu-Goto-Wirkung

Gleichung (2.26) beschreibt also eine Fläche, die unter Minimierung zu den Bewegungsgleichungen des Strings führt. Die Wirkung S für den relativistischen String ist proportional zu seiner Eigenfläche und ist gegeben durch die sogenannte *Nambu-Goto-Wirkung*

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}, \quad (2.28)$$

dabei ist $\sigma_1 > 0$ und die Notationen für die Ableitungen,

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad \text{und} \quad X^{\mu'} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad (2.29)$$

gelten. Die Nambu-Goto-Wirkung ist reparametrisierungsinvariant. Denn wie in Abschnitt (2.2.1) die Reparametrisierung-Invarianz von räumlichen Oberflächen gezeigt wurde, kann auch die Nambu-Goto-Wirkung auf eine reparametrisierungs-invariante Weise ausgedrückt werden. Man schreibt die induzierte Metrik $\gamma_{\alpha\beta}$ auf der Weltfläche als

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}, \quad (2.30)$$

wobei $\eta_{\mu\nu}$ die Minkowski-Metrik des Target-Raums ist. Die Indizes α und β laufen über die Werte 1 und 2. Außerdem gilt $\xi^1 = \tau$ und $\xi^2 = \sigma$. Explizit ist $\gamma_{\alpha\beta}$ eine 2×2 -Matrix der Form

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Mit der induzierten Metrik kann man die Nambu-Goto-Wirkung schreiben als

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \text{mit} \quad \gamma = \det(\gamma_{\alpha\beta}). \quad (2.32)$$

Nicht nur, dass die Nambu-Goto-Wirkung in dieser Form eindeutig reparametrisierungs-invariant ist, diese Form ist auch kompakter als in der Form von (2.28).

2.2.3. Bewegungsgleichungen, Randbedingungen und B-Branen

Die Bewegungsgleichungen für einen relativistischen String erhält man aus der Variation der String-Wirkung. Hierzu wird die Nambu-Goto-Wirkung variiert. Die Nambu-Goto-Wirkung aus (2.28) wird in ein Doppelintegral mit der Lagrangedichte \mathcal{L} umgeschrieben, sodass

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau L = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}), \quad (2.33)$$

gilt, wobei die Lagrangedichte gegeben ist durch

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X^{\mu'}) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.34)$$

Durch Variation der Wirkung (2.33) ergeben sich die Bewegungsgleichungen für einen relativistischen String⁶ zu

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.35)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.36)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.37)$$

Gleichung (2.35) gilt sowohl für offene, als auch geschlossene Strings. Allerdings zeigt ein Blick auf (2.36) und (2.37), dass die Bewegungsgleichung sehr kompliziert ist.

Für die Lösung eines Systems am Rand müssen Randbedingungen hinzugezogen werden. Geschlossene Strings haben weder Anfangs- noch Endpunkte, daher müssen keine Randbedingungen angewandt werden. Bei offenen Strings wird unterschieden zwischen Endpunkten, die fixiert sind bzw. Endpunkte die frei sind. Dies führt erneut zu den Dirichlet- bzw. Neumann-Randbedingungen, dh. es gibt zwei Arten von Randbedingungen, die für einen offenen String-Endpunkt in Frage kommen.

Die eine Möglichkeit ist die der Dirichlet-Randbedingungen, bei der der String-Endpunkt während der Bewegung fixiert ist. Es gilt

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu \neq 0, \quad (2.38)$$

wobei σ_* entweder Null oder gleich σ_1 ist. Die andere Möglichkeit für die Randbedingung ist für freie Endpunkte des Strings

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0. \quad (2.39)$$

Diese Randbedingung gilt auch für $\mu = 0$

$$\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, 0) = 0. \quad (2.40)$$

⁶Herleitung vgl. Anhang B Herleitungen

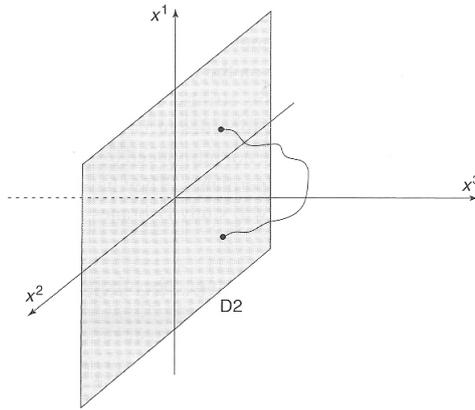


Abbildung 2.5: Eine $D2$ -Brane, die sich über (x^1, x^2) erstreckt. Die Endpunkte können sich frei bewegen auf der Fläche, müssen jedoch an der Brane bleiben. Dies zeigt die Dirichlet-Randbedingungen für die Stringkoordinaten x^3 (Abb. aus[1]).

Aus dem Abschnitt über nicht-relativistische Strings ist bekannt, dass Dirichlet-Randbedingungen auftreten, falls die String-Endpunkte an einem physikalischen Objekt gebunden sind. In Abbildung 2.1 ist auf der linken Seite der String an zwei Punkte gebunden. Auf der rechten Seite kann sich der String frei auf und ab entlang der vertikalen Achse bewegen. Horizontal findet keine Bewegung statt. Die Objekte, an denen die offenen Strings enden sind charakterisiert durch die Anzahl der räumlichen Dimensionen. Diese Objekte werden D -Branen genannt. Das D steht dabei für Dirichlet. Die Objekte, an denen die Strings in Abbildung 2.1 enden, sind null-dimensional, also $D0$ -Branen. Die Linien auf der rechten Seite der Abbildung sind ein-dimensional. Sie werden $D1$ -Branen genannt.

Eine Dp -Brane ist ein Objekt mit p räumlichen Dimensionen. Abbildung 2.4 zeigt eine $D2$ -Brane in einem dreidimensionalen Raum. Durch die Bedingung $x^3 = 0$ wird ihre Lage spezifiziert. Diese Brane erstreckt sich über die (x^1, x^2) -Ebene. Die Dirichlet-Randbedingung bezieht sich auf die Stringkoordinate X^3 . Diese muss an den String-Enden verschwinden. Falls die String-Enden freien Randbedingungen entlang aller räumlichen Dimensionen unterliegen, ist dies zwar eine D -Brane, jedoch eine raumfüllende D -Brane. Diese D -Brane füllt den Raum vollkommen aus, so dass sich die Enden des offenen Strings frei im Raum bewegen können.

2.2.4. Die statische Eichung

Die Bewegungsgleichung (2.35) ist wegen den Ausdrücken (2.36) und (2.37) kompliziert zu lösen. Daher wird die Reparametrisierungs-Invarianz der Nambu-Goto-Wirkung ausgenutzt, um die Bewegungsgleichung zu vereinfachen. Aufgrund der Reparametrisierungs-Invarianz kann die Parametrisierung frei gewählt werden. Die Reparametrisierungs-Invarianz in der Stringtheorie ist analog zu der Eichinvarianz der Elektrodynamik. Die Maxwell-Gleichungen besitzen eine Symmetrie unter Eichtransformationen, die es erlaubt verschiedenen Potentiale A_μ zu wählen, die die gleichen \vec{E} und \vec{B} Felder beschreiben.

In Abbildung 2.6 wird eine zeitlich konstante Hyperfläche $t = t_0$ im Ziel-Raum gezeigt. Diese Fläche schneidet die Weltfläche entlang einer Kurve.

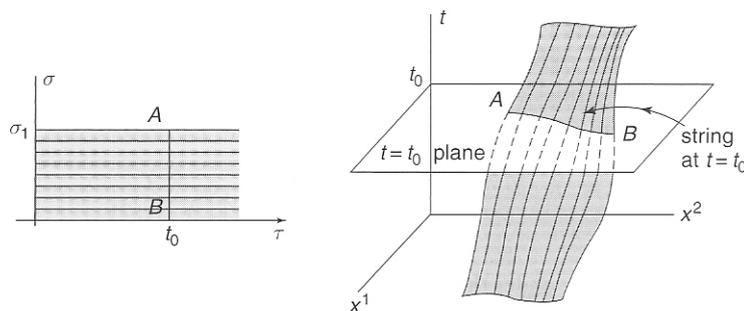


Abbildung 2.6: Links: Ein Streifen eines offenen Strings im Parameter-Raum. Das vertikale Segment AB beschreibt die Linie $\tau = t_0$. Rechts: Die Weltfläche eines offenen Strings im Target-Raum. Der String bei $t = t_0$ ist die Schnittstelle der Weltfläche mit der Hyperfläche $t = t_0$ (Abb. aus [1]).

Für jeden Punkt Q auf der Weltfläche gilt

$$\tau(Q) = t(Q). \quad (2.41)$$

Diese Wahl der τ -Parametrisierung wird als die *statische Eichung* bezeichnet, denn die konstanten τ -Linien sind „statische Strings“. Das heißt

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau, \quad (2.42)$$

oder vereinfacht

$$\tau = t. \quad (2.43)$$

Somit können die Stringkoordinaten X^μ geschrieben werden als

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma) = \left\{ ct, \vec{X}(\tau, \sigma) \right\}, \quad (2.44)$$

wobei \vec{X} die räumlichen Koordinaten des Strings repräsentiert. Somit werden die Ausdrücke in der Bewegungsgleichung zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right), \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial \tau}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \right) = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \right). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Diese Parametrisierung trennt also die räumlichen Koordinaten von den zeitlichen.

2.2.5. Die Transversal-Geschwindigkeit

Mit der Eichbedingung $X^0 = ct = c\tau$ ist die Weltfläche hinreichend parametrisiert. Die Frage ist nun, wie man eine sinnvolle String-Geschwindigkeit definieren kann. Die triviale Vorstellung, man könne die zeitliche Ableitung von \vec{X} benutzen, stellt sich als falsch heraus. Wäre $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ die String-Geschwindigkeit, würde diese von der Parametrisierung abhängen, da dieser Ausdruck eine Funktion von σ ist.

Es erweist sich als sinnvoll eine *transversale String-Geschwindigkeit* \vec{v}_\perp zu definieren. Dazu muss ein neuer Parameter s eingeführt werden. Der Parameter $s(\sigma)$ beschreibt die Länge des Strings, mit $s(0) = 0$ und $s(\sigma_1)$. Dann gilt

$$ds = \left| d\vec{X} \right| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| = |d\sigma|. \quad (2.46)$$

Der Vektor $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ beschreibt die Änderung von dem Vektor \vec{X} bezüglich der String-Länge. Außerdem ist $\partial \vec{X} / \partial s$ ein *Einheitsvektor*, denn es ist

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 = 1. \quad (2.47)$$

Im letzten Schritt wird die Bedingung (2.46) benutzt. Die Transversal-Geschwindigkeit eines Strings wird dann definiert durch

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}. \quad (2.48)$$

Für weitere Berechnungen erweist es sich als sinnvoller die Transversal-Geschwindigkeit \vec{v}_\perp zu quadrieren,

$$v_\perp^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2. \quad (2.49)$$

Ziel ist es die String-Wirkung in Termen der Transversal-Geschwindigkeit auszudrücken. Unter Verwendung der statischen Eichung $\tau = t$ und den Gleichungen (2.45) findet man

$$(\dot{X})^2 = -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2, \quad (X')^2 = \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2, \quad \text{und} \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}. \quad (2.50)$$

Mit diesen Größen schreibt wird der Ausdruck unter der Wurzel der String-Wirkung (2.28) zu

$$(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 (c^2 - v_\perp^2), \quad (2.51)$$

oder alternativ

$$\begin{aligned}\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} &= \sqrt{\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 (c^2 - v_{\perp}^2)} \\ &= c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}.\end{aligned}\tag{2.52}$$

Diese Ausdrücke werden in die String-Wirkung (2.29) eingesetzt und es ergibt sich

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma}\right) \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}.\tag{2.53}$$

Diese String-Wirkung gilt sowohl für offene, als auch geschlossene Strings. Die zugehörige Lagrange-Funktion lautet

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}.\tag{2.54}$$

Für jedes infinitesimale Stück des Strings ist $T_0 ds$ die Ruheenergie des Strings. Somit ist die Lagrange-funktion ein Integral über die Ruheenergie multipliziert mit einem relativistischen Faktor.

Wenn man dieses Ergebnis mit der Lagrange-Funktion eines relativistischen Teilchens, die gegeben ist durch

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},\tag{2.55}$$

vergleicht, so interpretiert man $T_0 \int ds$ als die Ruheenergie eines Strings. Der Faktor mc^2 ist der relativistische Faktor für ein Teilchen.

2.3. Ströme auf String-Weltflächen

Jedem String soll ein relativistischer Impuls p_μ zugeordnet werden. Dieser soll erhalten sein, falls sich der String frei bewegt. Der Impuls p_μ ist kein Strom, sondern eher eine Ladung. In der Tat ist jede Komponente des Impulses p_μ für sich erhalten, falls ein Satz von erhaltenen Ladungen vorliegt.

In der Nambu-Goto-Wirkung (2.28) wird die Lagrange-Dichte über die Weltflächen-Koordinaten τ und σ integriert, nicht jedoch über die Raumzeit-Koordinaten x^μ . Die erhaltenen Ströme leben dann auf der Weltfläche. Explizit ist

$$S = \int d\xi^0 d\xi^1 \mathcal{L}(\partial_0 X^\mu, \partial_1 X^\mu) \quad \text{mit} \quad (\xi^0, \xi^1) = (\tau, \sigma) \quad \text{und} \quad \partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}. \quad (2.56)$$

Um erhaltene Ströme zu erhalten, wird eine Feldvariation der Form δX^μ betrachtet, die die Lagrange-Dichte nicht verändert. Eine solche Variation ist gegeben durch

$$\delta X^\mu(\tau, \sigma) = \varepsilon^\mu, \quad (2.57)$$

wobei ε^μ eine Konstante ist, die unabhängig von τ und σ ist. Die Lagrangedichte \mathcal{L} ist invariant, da diese nur von den Ableitungen $\partial_\alpha X^\mu$ abhängt. Die Variationen verschwinden, denn

$$\delta(\partial_\alpha X^\mu) = \partial_\alpha(\delta X^\mu) = \partial_\alpha \varepsilon^\mu = 0. \quad (2.58)$$

Die entsprechenden Ströme sind dann

$$j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \rightarrow (j_\mu^0, j_\mu^1) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu\prime}} \right). \quad (2.59)$$

Mit den Gleichungen (2.36) und (2.37) ergeben sich die Ströme zu

$$j_\mu^\alpha = \mathcal{P}_\mu^\alpha \rightarrow (j_\mu^0, j_\mu^1) = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma). \quad (2.60)$$

Die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0, \quad (2.61)$$

liefert dann

$$\partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 \quad (2.62)$$

Dies entspricht der Bewegungsgleichung (2.35) für einen relativistischen String.

Den Raumzeit-Impuls erhält man dann als das Integral der Impulsdichte \mathcal{P}_μ^τ über den Raum bzw. über σ . Das bedeutet,

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma, \quad (2.63)$$

wobei τ konstant bleibt. Der Impuls ist erhalten, da $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ ist, denn

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} d\sigma = [-\mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} = 0. \quad (2.64)$$

Das zweite Gleichheitszeichen resultiert aus der Gleichung (2.64). Für einen offenen String mit freien Endpunkten garantieren die Randbedingungen (2.39) dass die Impulsdichte \mathcal{P}_μ^σ an den Endpunkten Null wird. Für geschlossene Strings ist der Term gleich Null, denn $\sigma = 0$ und $\sigma = \sigma_1$ beschreiben den gleichen Punkt auf der Weltfläche. Allerdings muss der Impuls nicht immer erhalten sein. Für offene Strings mit Dirichlet-Randbedingungen muss der Impuls p_μ des Strings keine Erhaltungsgröße sein. In der Tat garantiert die Randbedingung (2.38) nicht, dass (2.66) verschwindet. In diesem Fall sind die Strings-Endpunkte an eine D -Brane gebunden, deren Impuls zusammen mit dem String-Impuls eine Erhaltungsgröße bildet, so dass der Gesamtimpuls erhalten ist.

Die Wirkung des relativistischen Strings ist lorentz-invariant. Das bedeutet, dass Lorentz-Transformationen der Koordinaten X^μ die Wirkung invariant lassen. Mit Hilfe der Lorentz-Invarianz können auch erhaltenen Ströme konstruiert werden. Bei der Quantisierung relativistischer Strings werden diese erhaltenen Ströme von Bedeutung sein.

Lorentz-invariante erhaltene Ströme sind definiert als

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha. \quad (2.65)$$

Daraus lässt sich die Antisymmetrie

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = -\mathcal{M}_{\nu\mu}^\alpha, \quad (2.66)$$

ableiten. Die Kontinuitätsgleichung wird damit zu

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.67)$$

Die zugehörigen „Lorentz-Ladungen“ sind

$$M_{\mu\nu} = \int (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau) \quad (2.68)$$

Auch diese sind antisymmetrisch, denn $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$. Unter konstanten τ -Linien ergeben sich die Lorentz-Ladungen zu

$$M_{\mu\nu} = \int \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau(\tau, \sigma) d\sigma = \int (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma. \quad (2.69)$$

Da $M_{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist, ergeben sich sechs erhaltene Ströme in vier Dimensionen. Die Indizes i und j sind Raum-Indices. Da $\vec{\mathcal{P}}^\tau$ die Impuls-Dichte repräsentiert, gewährleistet Gleichung (2.68), dass \mathcal{M}_{ij}^τ die Drehimpuls-Dichte charakterisiert. Die Komponenten M_{ij} messen den String-Drehimpuls \vec{L} mit $L_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}M_{jk}$, wobei ε_{ijk} das Levi-Cevita-Symbol ist.

An dieser Stelle wird ein neuer Parameter, der sogenannte *Slope Parameter* α' eingeführt. Die physikalische Bedeutung dieses Parameters wird deutlich, wenn man sich einen starren rotierenden offenen String vorstellt. Für diesen ist α' eine Proportionalitätskonstante zwischen dem Drehimpuls L des Strings und dem Quadrat der Energie E , denn es ist $L \propto E^2$. Damit lässt sich die String-Spannung ausdrücken als

$$T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'\hbar c} \quad \text{und} \quad \alpha' = \frac{1}{2\pi T_0\hbar c}. \quad (2.70)$$

Die String-Wirkung (2.28) wird dann zu

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'\hbar c^2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad (2.71)$$

Mit Hilfe des Slope Parameters kann eine charakteristische Länge des Strings, $\ell_s = \hbar c\sqrt{\alpha'}$, dargestellt werden.

2.4. Relativistische Lichtkegel-Strings

Bisher wurde die statische Eichung $X^0(\tau, \sigma) = c\tau$ benutzt um das Verhalten des klassischen relativistischen Strings zu beschreiben. Diese Eichung beschreibt einen Zusammenhang zwischen der Weltflächen-Zeit τ und der Raumzeit-Koordinate X^0 . Unter einer Fülle an Eichungen, stellt sich die *Lichtkegel-Eichung* als besonders geeignet heraus, um die Bewegungsgleichungen (2.35) zu vereinfachen. Die Koordinate τ wird als eine Linearkombination der String-Koordinaten geschrieben,

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau. \quad (2.72)$$

Mit $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ und $\lambda = c$ bekommt man die Eichung $X^0(\tau, \sigma) = c\tau$ heraus. Die Abbildung 2.6 zeigt die Bedeutung des Vektors n_μ .

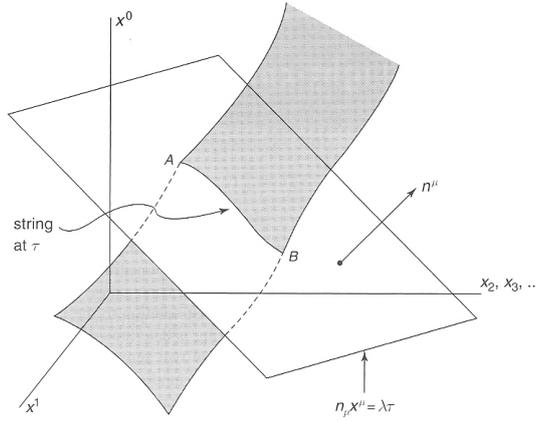


Abbildung 2.7: Die Eichbedingung $n \cdot X = \lambda\tau$ fixiert die Strings so, dass sie die Kurven an der Schnittstelle der Weltfläche mit der Hyperfläche orthogonal zu dem Vektor n^μ sind (Abb. aus [1]).

Um eine verallgemeinerte Eichung für sowohl offene, als auch geschlossene Strings zu erhalten, werden folgende definierende Gleichungen gesetzt

$$\begin{aligned} n \cdot X(\tau, \sigma) &= \beta\alpha'(n \cdot p)\tau \\ n \cdot p &= \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau \quad \text{mit} \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{für offene Strings} \\ 2, & \text{für geschlossene Strings} \end{cases}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Aus den verallgemeinerten Eichungen lässt sich ableiten, dass die folgenden Gleichungen gelten⁷

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0. \quad (2.74)$$

Die beiden Gleichungen werden zu einer Gleichung

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0, \quad (2.75)$$

⁷Die vollständige Herleitung ist in [1], S.179-183 nachzulesen

zusammengefasst. Dies führt zu Vereinfachungen der Impulsdichten $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ und $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$, da nun

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \quad (2.76)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu\prime} \quad (2.77)$$

gilt. Diese Gleichungen werden in die (2.35) eingesetzt und liefern

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu\prime\prime} = 0. \quad (2.78)$$

In der gewählten Parametrisierung sind die Bewegungsgleichungen *Wellengleichungen*.

2.4.1. Lösung der Wellengleichung und Moden-Entwicklung

Die Wellengleichung (2.78) wird nun explizit gelöst. Es wird weiterhin von einer raumfüllenden D -Brane ausgegangen. Die allgemeinste Lösung von (2.78) ist

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)], \quad (2.79)$$

wobei f^μ und g^μ beliebige Funktionen sind. Gleichung (2.77), die Randbedingungen für freie Endpunkte $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$ und die Neumann-Randbedingungen implizieren

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{bei } \sigma = 0, \pi. \quad (2.80)$$

Die Randbedingung am Punkt $\sigma = 0$ liefert

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2} [f^{\mu\prime}(\tau) + g^{\mu\prime}(\tau)] = 0. \quad (2.81)$$

Da die Ableitungen von f^μ und g^μ übereinstimmen, unterscheiden sich die Funktionen f^μ und g^μ nur um eine Konstanten c^μ . Nachdem $g^\mu = f^\mu + c^\mu$ in (2.79) ersetzt wird und die Konstante c^μ in die Definition von f^μ miteinbezogen wird, folgt

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} [f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)]. \quad (2.82)$$

Die Randbedingung am Punkt $\sigma = \pi$ liefert

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2} [f^{\mu\prime}(\tau + \pi) + g^{\mu\prime}(\tau - \pi)] = 0. \quad (2.83)$$

Die Funktion $f^{\mu\prime}$ weist eine 2π -Periodizität auf. Im Allgemeinen lässt sich eine periodische Funktion als *Fourier-Reihe* schreiben, so dass

$$f^{\mu\prime}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu)], \quad (2.84)$$

gilt. Durch Integration dieser Gleichung und Umbenennung der Konstanten erhält man

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)]. \quad (2.85)$$

Dieses Ergebnis wird in Gleichung (2.82) eingesetzt

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2} \left(f_0^\mu + f_1^\mu(\tau + \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(n\tau + n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\tau + n\sigma)] \right) \\ &+ \frac{1}{2} \left(f_0^\mu + f_1^\mu(\tau - \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(n\tau - n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\tau - n\sigma)] \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2f_0^\mu + 2f_1^\mu(\tau) + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(n\tau) \cos(n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\tau) \cos(n\sigma)] \right). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Durch Ausklammern und Kürzen bekommt man

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)] \cos(n\sigma). \quad (2.87)$$

Die Koeffizienten A_n^μ und B_n^μ werden durch neue Koeffizienten ersetzt. Es ist üblich, die Gleichung (2.87) in komplexen Zahlen auszudrücken. Durch Ausnutzen der Euler-Beziehung $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ und einigen Umformungen ergibt sich

$$\begin{aligned} A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) &= -\frac{i}{2} [(B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau}] \\ &\equiv -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}), \end{aligned} \quad (2.88)$$

wobei $*$ das komplex Konjugierte bezeichnet. Der Faktor $\sqrt{2\alpha'}$ wird eingeführt, damit die Konstanten a_n^μ und $a_n^{\mu*}$ dimensionslos werden.

Die Impulsdichte (2.76) kann genutzt werden, um die Konstante f_1^μ physikalisch zu interpretieren. Es ist

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \dots, \quad (2.89)$$

wobei die Punkte Terme mit $\cos(n\sigma)$ -Abhängigkeit bedeuten, die wegen $\int_0^\pi \cos(nx) dx = 0$, wegfallen.

Durch Integration der Impulsdichte über $\sigma \in [0, \pi]$ ergibt sich der Gesamtimpuls

$$p^\mu = \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu, \quad (2.90)$$

woraus

$$f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu \quad (2.91)$$

folgt. Es zeigt sich, dass f_1^μ eine zum Raumzeit-Impuls des Strings proportionale Größe ist. Mit $f_0^\mu = x_0^\mu$ und den obigen Ergebnissen wird aus Gleichung (2.87)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}. \quad (2.92)$$

Dabei entspricht x_0^μ der Grundschiwingung (zero-mode). Die restlichen Terme entsprechen dem Impuls und die Summe beschreibt die Oszillationen. Falls die Koeffizienten a_n^μ verschwinden, repräsentiert die Gleichung die Bewegung eines Punktteilchens.

Es werden folgende Notationen eingeführt:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \quad \alpha_n^\mu = a_n^\mu, \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n} \quad \text{mit } n \geq 1. \quad (2.93)$$

Außerdem gilt $\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*$. Insgesamt löst die Gleichung

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma)}{n}, \quad (2.94)$$

die Wellengleichung mit Neumann-Randbedingungen. Die Ableitungen der Gleichung (2.94) nach τ und σ liefern

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos(n\sigma) e^{-in\tau}, \quad (2.95)$$

$$X^{\mu'} = -i\sqrt{\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin(n\sigma) e^{-in\tau}. \quad (2.96)$$

Eine Linearkombination der Gleichungen (2.95) und (2.96) ergibt

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (2.97)$$

Damit wird eine Lösung der Wellengleichung gefunden, die den relevanten Randbedingungen genügen.

2.5. Lichtkegel-Lösung der Bewegungsgleichung

Bisher wurden Lösungen der Wellengleichung gefunden, die die relevanten Randbedingungen erfüllen. Es muss jedoch ebenfalls die Einschränkung (2.74) erfüllt sein. Dazu wird die Lichtkegel-Eichung benutzt. Zur Lösung in der Lichtkegel-Eichung werden die Lichtkegel-Koordinaten⁸ hinzugezogen. In den Lichtkegel-Koordinaten werden x^+ und x^- anstatt von x^0 und x^1 verwendet. Die Eichung in Lichtkegel-Koordinaten wird so gewählt, dass $n \cdot X = X^+$ gilt. Der Vektor n_μ wird derart gewählt, dass $n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$ ist. Damit folgt

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+. \quad (2.98)$$

Diese Ausdrücke eingesetzt in die definierenden Gleichungen von (2.73) liefert

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad p^+ = \frac{2\pi}{\beta} \mathcal{P}^{\tau+} \quad \text{mit} \quad \beta = \begin{cases} 1, & \text{für geschlossene Strings} \\ 2, & \text{für offene Strings} \end{cases}. \quad (2.99)$$

Der Formalismus der Lichtkegelgleichung wird benutzt, um zu zeigen, dass sich die gesamte String-Dynamik in den transversalen Koordinaten widerspiegelt. Diese transversalen String-Koordinaten werden mit

$$X^I = (X^2, X^3, \dots, X^d) \quad \text{mit} \quad I = (2, \dots, d), \quad (2.100)$$

zusammengefasst. In der Lichtkegel-Eichung sind die Zwangsbedingungen (2.74) gegeben durch

$$-2(\dot{X}^+ \pm X^{+'}) (\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0, \quad (2.101)$$

wobei das relativistische Skalarprodukt⁹ benutzt wurde. Mit den Ableitungen $\dot{X}^+ = \beta \alpha' p^+$ und $X^{+'} = 0$ folgt

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\beta \alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2. \quad (2.102)$$

Es wird angenommen, dass $p^+ \neq 0$ ist. Wäre $p^+ = 0$, müssten sich der Impuls p^1 und die Energie weg heben, dies kann jedoch nur passieren, falls es sich um ein masseloses Teilchen handelt, dass sich in negative x^1 Richtung bewegt. In Lichtkegel-Koordinaten ist dies aber nicht möglich. Für $p^+ = 0$ kann der Lichtkegel-Formalismus nicht angewandt werden.

Im Fall eines offenen Strings ($\beta = 2$) lautet die Lösung der String-Bewegungsgleichung für transversale Koordinaten X^I unter Verwendung der allgemeinen Lösung (2.94)

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma)}{n}. \quad (2.103)$$

⁸vgl. A. Formelsammlung

⁹vgl. A. Formelsammlung

Weiterhin liefert die Eichbedingung 2.99 für die Koordinate X^+

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau. \quad (2.104)$$

X^- ist eine Linearkombination aus X^0 und X^1 . Außerdem erfüllt X^- die gleiche Wellengleichung und die gleichen Randbedingungen. Daher gilt für die Koordinate X^-

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma)}{n}. \quad (2.105)$$

Durch die Ableitungen der Gleichungen und unter Verwendung der Gleichung (2.97) mit $\mu = -$ und $\mu = I$ findet man mit

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (2.106)$$

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (2.107)$$

zwei Linearkombinationen. Mit diesen Gleichungen und (2.102) lassen sich die Minus-Oszillatoren explizit bestimmen¹⁰

$$\begin{aligned} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} &= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \\ &= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)} \end{aligned} \quad (2.108)$$

Die Minus-Oszillatoren folgen dann der Gleichung

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad (2.109)$$

Dies ist eine explizite Gleichung für die Minus-Oszillatoren α_n^I in Termen von transversalen Oszillatoren. Es werden die *Virasoro-Moden* geschrieben als

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp \quad \text{mit} \quad L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (2.110)$$

wobei L_n^\perp die *transversalen Virasoro-Moden* genannt werden, die die Schwingungs-Moden der X^- charakterisieren. Insbesondere gilt mit (2.93) für $n = 0$:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp, \quad (2.111)$$

$$\Rightarrow 2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp \quad (2.112)$$

¹⁰vgl. [1], S.189

Insgesamt ergibt sich

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2. \quad (2.113)$$

Die *Masse* eines Strings kann mit

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I, \quad (2.114)$$

bestimmt werden. Dies folgt, da in Lichtkegel-Koordinaten die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I \quad \text{mit} \quad c = 1, \quad (2.115)$$

lautet. Mit den eingeführten Notationen aus (2.93) und der Gleichung (2.110) schreibt sich die Gleichung als

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \right) = p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n \alpha_n^{I*} \alpha_n^I. \quad (2.116)$$

Wegen $a^* a = |a|^2 \geq 0$ gilt insbesondere $M^2 \geq 0$. Das zeigt, dass die klassische String-Masse $M = \sqrt{M^2}$ eine reelle Zahl ist.

2.6. Quantisierung offener, relativistischer Strings

In Gleichung (2.73) wurden Weltflächen-Parametrisierungen dargestellt, unter denen sich die Bewegungsgleichungen zu Wellengleichungen reduzierten. Diese führten zu den Impuls-Dichten

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu. \quad (2.117)$$

Für offene Strings in der Lichtkegel-Eichung gilt $X^+ = 2\pi\alpha' p^+ \tau$. Unter Verwendung der Gleichung (2.102) und $\beta = 2$ ergibt sich

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} \left(\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'} \right). \quad (2.118)$$

Dies liefert einen Ausdruck für $\mathcal{P}^{\tau-}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau-} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- - \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (2\pi\alpha')^2 \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{2p^+} \left(\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right). \end{aligned} \quad (2.119)$$

Für eine Quantentheorie offener relativistischer Strings in Lichtkegel-Eichung ist es notwendig eine Menge

an Schrödinger-Operatoren zu wählen. Diese werden als

$$(X^I(\sigma), x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), p^+), \quad (2.120)$$

gewählt. Diese Operatoren besitzen keine explizite τ -Abhängigkeit. Die zugehörigen Heisenberg-Operatoren sind dann

$$(X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau)). \quad (2.121)$$

Als nächstes werden Kommutatorrelationen definiert. Diese Operatoren werden derart konstruiert, so dass sie nicht miteinander kommutieren, falls sie sich an dem selben Punkt auf dem String befinden. Somit lautet der Kommutator

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.122)$$

Die Delta-Funktion garantiert, dass der Kommutator für $\sigma \neq \sigma'$ verschwindet. Die weiteren Kommutatorrelationen lauten

$$[X^I(\sigma), X^J(\sigma')] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\sigma')] = 0, \quad (2.123)$$

und

$$[x_0^-, p^+] = -i \quad (2.124)$$

Die Operatoren x_0^- und p^+ kommutieren mit allen anderen. Die zugehörigen Heisenberg-Operatoren genügen den gleichen Kommutatorrelationen. Als nächstes muss ein Hamilton-Operator konstruiert werden. Der Hamilton-Operator generiert die τ -Translation. In Lichtkegel-Eichung ist $X^+ = 2\alpha'p^+\tau$, sodass

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha'p^+ \frac{\partial}{\partial X^+}. \quad (2.125)$$

gilt. Das heißt, dass der Hamilton-Operator, der Änderungen in τ beschreibt, gegeben ist durch

$$H = 2\alpha'p^+p^- = 2\alpha'p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-}. \quad (2.126)$$

ist. Einen Ausdruck für $\mathcal{P}^{\tau-}$ wurde bereits zu Beginn des Abschnitts mit Gleichung (2.119) hergeleitet. Mit Gleichung (2.119) lässt sich der Hamilton-operator explizit als ein Heisenberg-Operator darstellen

$$H(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma (\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma)X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2}. \quad (2.127)$$

Der Hamilton-Operator generiert die quantenmechanischen Bewegungsgleichungen. Dieser vereinfacht sich, wenn er in Termen der transversalen Virasoro-Moden ausgedrückt wird. Wie bereits gesehen, ist $L_0^\perp = 2\alpha'p^+p^-$, so ergibt sich mit Gleichung (2.127)

$$H = L_0^\perp. \quad (2.128)$$

Damit der Hamilton-Operator lorentz-invariant ist, muss eine zusätzliche Konstante hinzugefügt werden. Die sich ergebenden quantenmechanischen Bewegungsgleichungen $\ddot{X}^I - X^{I''} = 0$ unterscheiden sich nicht von den klassischen Bewegungsgleichungen.

Die bislang klassischen Variablen α_n^I und a_n^I werden dann zu quantenmechanischen Operatoren mit den Kommutatorrelationen¹¹

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0}. \quad (2.129)$$

Der Operator α_0^I kommutiert mit den anderen Operatoren, denn es ist

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{für } n \neq 0, \quad (2.130)$$

und

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'}i\eta^{IJ}. \quad (2.131)$$

Es gelten die Notationen, analog zu (2.93)

$$\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'}p^I \quad \alpha_n^I = a_n^I\sqrt{n}, \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger}\sqrt{n} \quad n \geq 0 \quad \alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'}p^I, \quad (2.132)$$

wobei

$$(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z} \quad (2.133)$$

gilt. Die Operatoren x_0^I und p^I sind *hermitesch*, denn

$$(x_0^I)^\dagger = x_0^I, \quad (p^I)^\dagger = p^I. \quad (2.134)$$

Diese Operatoren erfüllen den folgenden Kommutator

$$[x_0^I, p^I] = i\eta^{IJ}. \quad (2.135)$$

Für $n \geq 1$ ist α_n^I der *Erzeugungsoperator* und α_{-n}^I der *Vernichtungsoperator*. Der Ortsoperator kann dann mit Hilfe der Erzeugungs- bzw Vernichtungsoperatoren geschrieben werden als

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} [\alpha_n^I e^{-in\tau} - \alpha_{-n}^I e^{in\tau}] \cos(n\sigma). \quad (2.136)$$

Es besteht ein vollständiger Satz an Basis-Operatoren aus den Null-Schwingungen mit einem zusätzlichen Satz an Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren.

¹¹Die vollständige Herleitung ist nachzulesen in [1], S.239-246

2.6.1. Virasorooperatoren offener Strings

Es wurden die Moden-Ausdrücke für die transversalen Koordinaten $X^I(\tau, \sigma)$ bereits angegeben. Für die anderen Lichtkegel-Koordinate X^+ ist die Entwicklung

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+. \quad (2.137)$$

Für die Koordinaten X^- ist

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (2.138)$$

Analog zu (2.109) werden die transversalen Schwingungsmoden, die Virasoro-Moden L_n^\perp , zu transversalen Virasoro-Operatoren

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (2.139)$$

Weil auch die Oszillatoren zu Operatoren werden, kommt es auf die Reihenfolge bei der Anwendung an. Da zwei α -Operatoren nicht miteinander kommutieren, falls sich deren Mode zu Null addieren, kommutieren die Operatoren L_0^\perp nur dann nicht, falls $n = 0$. Das bedeutet, dass ausschließlich L_0^\perp untersucht werden muss. Der Operator L_0^\perp ist gegeben durch

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (2.140)$$

Die erste Summe auf der rechten Seite ist *normalgeordnet*, denn der Erzeugungsoperator steht links von dem Vernichtungsoperator. Es erweist sich als sinnvoll mit normal-geordneten Operatoren zu arbeiten, da diese auf eine einfache Weise auf den Vakuumzustand wirken. Obwohl die erste Summe normal-geordnet ist, muss die zweite Summe erst noch normal-geordnet werden.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{II} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \end{aligned} \quad (2.141)$$

Hier wurde sowohl $[\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I] = p \delta_{p,p} \eta^{II}$ als auch, dass es $(D-2)$ transversale Richtungen gibt, verwendet. Der Operator L_0^\perp wird als

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I, \quad (2.142)$$

definiert. L_0^\perp ist hermitesch, denn $(L_0^\perp)^\dagger = L_0^\perp$. Weiterhin wird die *Ordnungskonstante* a eingeführt, so dass

$$2\alpha' p^- \equiv \frac{1}{p^+} (L_0^\perp + a), \quad (2.143)$$

mit

$$a = \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p, \quad (2.144)$$

ist. Damit ergibt sich für das Massenquadrat

$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right). \quad (2.145)$$

Die Ordnungskonstante a verschiebt den Massenquadrat-Operator um einen konstanten Betrag. Ein Problem ergibt sich, da $a \rightarrow \infty$ ist. Dieses kann mit Hilfe der *Zeta-Funktion* gelöst werden. Die Zeta-Funktion ist definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1. \quad (2.146)$$

Das Argument s der Zeta-Funktion ist eine komplexe Zahl. Die Summe konvergiert nur dann, falls der Realteil des Arguments größer als Eins ist. Die Zeta-Funktion kann für alle möglichen Werte von s definiert werden. Es zeigt sich, dass bis auf $s = 1$, $\zeta(s)$ endlich ist. Explizit ist

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}. \quad (2.147)$$

Dies ist eine mögliche Variante um die Summe $\sum_{p=1}^{\infty} p$ auszudrücken. Das Ergebnis ist nicht nur endlich, sondern auch negativ. Dies in (2.143) eingesetzt liefert

$$a = \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = -\frac{1}{24}(D-2). \quad (2.148)$$

Die weiteren Kommutatorrelationen der anderen transversalen Virasoro-Moden sind gegeben durch¹²

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp \quad \text{für } m+n \neq 0. \quad (2.149)$$

Dies ist die Virasoro-Algebra ohne zentrale Entwicklung. Die Virasoro-Algebra mit zentraler Entwicklung ist definiert durch

$$[L_n^\perp, L_m^\perp] = (m-n) L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad \text{für } m+n = 0. \quad (2.150)$$

Die Virasoro-Algebra ist die wichtigste Algebra in der Stringtheorie. In der Lichtkegel-Eichung werden die Virasoro-Operatoren zu Lorentz-Generatoren.

¹²Herleitung vgl. [1], S.253-257

Abschließend wird der Kommutator eines Virasoro-Operators mit dem Ortsoperator bestimmt. Es zeigt sich, dass sich der Kommutator auf

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}, \quad (2.151)$$

lässt, mit

$$\begin{aligned} \xi_m^\tau(\tau, \sigma) &= -ie^{im\tau} \cos(m\sigma), \\ \xi_m^\sigma(\tau, \sigma) &= e^{im\tau} \sin(m\sigma). \end{aligned} \quad (2.152)$$

Die Gleichung (2.151) kann derart interpretiert werden, dass der Virasoro-Operator Reparametrisierungen der Weltfläche generiert. In der Tat ändern sich die Koordinaten τ und σ wie

$$\begin{aligned} \tau &\rightarrow \tau + \varepsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma), \\ \sigma &\rightarrow \sigma + \varepsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (2.153)$$

wobei ε ein infinitesimaler Parameter ist. Somit ergibt sich für den Ortsoperator X^I

$$\begin{aligned} X^I(\tau + \varepsilon \xi_m^\tau, \sigma + \varepsilon \xi_m^\sigma) &= X^I(\tau, \sigma) + \varepsilon (\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}) \\ &= X^I(\tau, \sigma) + \varepsilon [L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)]. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Setzt man nun $m = 0$ in Gleichung (2.154), so ergibt sich $\xi_0^\tau = -i$ und $\xi_0^\sigma = 0$. Dies eingesetzt in (2.151) liefert

$$[L_0^\perp, X^I] = -i \frac{\partial}{\partial \tau} X^I. \quad (2.155)$$

Diese Gleichung entspricht genau der Heisenberg-Bewegungsgleichung für den Ortsoperator X^I . In der Tat ist L_0^\perp bis auf eine Konstante der String-Hamilton-Operator. Dieser generiert Zeit-Translationen. Außerdem verschwindet ξ_m^σ für alle m bei $\sigma = 0$ und $\sigma = \pi$. Das bedeutet, dass die Reparametrisierung, die von den Virasoro-Operatoren generiert wird, die σ -Koordinate an den Endpunkten ändert.

Wie bereits gesehen, erlaubt die Lorentz-Invarianz der String-Wirkung, dass Weltflächen-Ströme $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha$ gefunden werden konnten. Die sich ergebenden erhaltenen Ströme $\mathcal{M}_{\mu\nu}$ sind dann gegeben durch Gleichung (2.69). Für offene Strings gilt

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha(\tau, \sigma) d\sigma = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma. \quad (2.156)$$

Unter Verwendung der Gleichungen in (2.117) ergibt sich

$$M^{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) d\sigma. \quad (2.157)$$

Nach einigen Umformungen¹³ erhält man den Ausdruck

$$M^{\mu\nu} = x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu) \quad (2.158)$$

In der Lichtkegel-Eichung spielt insbesondere der Lorentz-Generator M^{-I} eine große Rolle. Denn die Koordinate X^- ist eine nicht-triviale Funktion der transversalen Koordinaten. Ein konsistenter M^{-I} -Generator muss in der Lage sein, Lorentz-Transformationen auf den String-Koordinaten zu generieren. Der Generator M^{-I} muss ebenfalls die Kommutatorrelation

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0 \quad (2.159)$$

erfüllen. Durch einige Umformungen¹⁴ gelangt man zu dem Ausdruck

$$M^{-I} = x_0 p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} [x_0^I (L_0 + a) + (L_0 + a) x_0^I] - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp). \quad (2.160)$$

Es ergibt sich für den Kommutator¹⁵ (2.159)

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' p^{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] \right\}. \quad (2.161)$$

Dieser Ausdruck wird Null, falls

$$m \left[1 - \frac{1}{24}(D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24}(D-2) + a \right] = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+, \quad (2.162)$$

ist, da die Summe der Oszillatoren $\sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I)$ nicht verschwindet. Es genügt die Fälle $m = 1$ und $m = 2$ zu betrachten. Aus der Bedingung (2.162) folgt

$$1 - \frac{1}{24}(D-2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{24}(D-2) + a = 0 \quad (2.163)$$

Die erste Gleichung bestimmt die Anzahl der Raumzeit-Dimensionen. Diese sind

$$D = 26. \quad (2.164)$$

Die zweite Gleichung fixiert die Ordnungskonstante a

$$a = -\frac{1}{24}(D-2) = -\frac{1}{24}(26-2) = -\frac{24}{24} = -1. \quad (2.165)$$

¹³vgl. [1], S.260

¹⁴vgl. [1], S.260-261

¹⁵vgl. [1], S.260-262

Der Wert für a deckt sich mit dem aus (2.148). Aufgrund von Gleichung (2.226) ergibt sich der Hamilton-Operator zu

$$H = L_0^\perp - 1. \quad (2.166)$$

In der Tat ist hier L_0^\perp bereits normal-geordnet. Die Bedingung der Lorentz-Invarianz der quantentheoretischen Beschreibung der Stringtheorie führt zwangsläufig zu einer festen Anzahl von Raumzeit-Dimensionen. Eine analoge Berechnung zeigt, dass die Raum-Zeit-Dimensionen in Superstringtheorien auf $D = 10$ beschränkt wird.

2.6.2. Der Zustandsraum offener quantenmechanischer Strings

Die klassische Behandlung eines offenen Strings ergab keine sinnvolle physikalische Theorie, denn das Massenspektrum war kontinuierlich. Nur der Grundzustand ist in der klassischen Theorie ein masseloser Zustand ohne Polarisation. Auch ergibt die klassische Beschreibung offener Strings keinen Zustand, der als *Photon* identifiziert werden kann. Diese Probleme kann eine Quantentheorie offener Strings lösen, denn die Quantisierung führt auf diskrete Werte des Massenspektrums und ergibt masselose Zustände. Die Grundzustände sind

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.167)$$

Per Definition werden sie durch den Operator a_n^I vernichtet

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0 \quad n \geq 1, \quad I = 2, \dots, 25. \quad (2.168)$$

Der allgemeine Basiszustand $|\lambda\rangle$ des Zustandsraumes kann somit geschrieben werden als

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.169)$$

wobei $\lambda_{n,I}$ eine nicht-negative Zahl ist, die angibt, wie oft der Erzeugungsoperator $a_n^{I\dagger}$ vorkommt. Die Reihenfolge, in der die Erzeugungsoperatoren angewandt werden können ist belanglos, denn die Erzeugungsoperatoren kommutieren untereinander. Man beschränkt sich auf den Fall, in dem die Zustände nur eine endliche Anzahl von Erzeugungsoperatoren enthalten, die auf den Grundzustand wirken. Das heißt, dass für jeden Zustand $|\lambda\rangle$ nur eine endliche Anzahl von $\lambda_{n,I}$ ungleich Null sind. Da der String-Hilbertraum ein unendlich-dimensionaler Vektorraum ist, der durch einen Satz unendlich vieler Basisvektoren aufgespannt wird, gibt es unendlich viele verschiedene Teilchen in der Stringtheorie. Um das Massenspektrum offener Strings zu untersuchen betrachtet man den Massenquadratoperator aus (2.145). Aus vorherigen Abschnitten ist $a = -1$ bekannt. Der Massenquadrat-Operator schreibt sich dann als

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right). \quad (2.170)$$

Die auftretende Summe

$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I, \quad (2.171)$$

ist der Besetzungszahloperator. Der Massenquadrat-Operator ist dann

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp). \quad (2.172)$$

Wird der Besetzungszahloperator auf einen Zustand angewandt, so ermittelt dieser die Anzahl der Teilchen in dem betrachteten Zustand. Weiterhin gelten die folgenden Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [N^\perp, a_n^{I\dagger}] &= n a_n^{I\dagger}, \\ [N^\perp, a_n^I] &= -n a_n^I. \end{aligned} \quad (2.173)$$

Da N^\perp normal-geordnet ist, vernichtet dieser die Grundzustände

$$N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (2.174)$$

Wenn der Besetzungszahloperator auf den Basiszustand angewandt wird, so ist der Eigenwert gleich der Summe der Moden aller Erzeugungsoperatoren in dem Zustand. Es folgt

$$N^\perp |\lambda\rangle = N_\lambda^\perp |\lambda\rangle \quad \text{mit} \quad N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}. \quad (2.175)$$

Die Eigenwerte von N^\perp sind nicht-negative Zahlen, sodass $M^2 \geq -\frac{1}{\alpha'}$ ist. Der Zustandsraum quantisierter offener Strings ist mit einem *Skalarprodukt* versehen. Um ein sinnvolles Skalarprodukt definieren zu können, werden zu den ket-Vektoren die bra-Vektoren benötigt. Es gilt

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle^\dagger = \langle p^+, \vec{p}_T|. \quad (2.176)$$

Das Skalarprodukt ist definiert über

$$\langle p'^+, \vec{p}'_T | p^+, \vec{p}_T \rangle = \delta(p'^+ - p^+) \delta(\vec{p}'_T - \vec{p}_T). \quad (2.177)$$

Der Basiszustand wird mit dem bra-Vektor $\langle \lambda |$ zu

$$\langle \lambda | = \langle p^+, \vec{p}_T | \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^I)^{\lambda_{n,I}}. \quad (2.178)$$

Es wird nun der Grundzustand näher untersucht. Für diesen Zustand ist $N^\perp = 0$. Um die Masse dieses Teilchens zu finden, wird der Massenquadratoperator auf diesen Zustand angewandt

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.179)$$

Wegen der Ordnungskonstanten $a = -1$ wird die Masse nicht Null. Das *Skalarfeld* mit $M^2 < 0$ wird Tachyon genannt. Ein negatives Massenquadrat deutet auf eine *Instabilität* der Theorie hin.

Weiterhin wird der nächste Zustand mit dem niedrigstem Massenquadrat untersucht. Diese kommen auf, wenn $N^\perp = 1$ ist. Die Zustände zu $N^\perp = 1$ sind masselos, denn $M^2 = 0$. Falls die Ordnungskonstante einen nicht-negativen Wert hätte, so würden in der quantenmechanischen Formulierung der Stringtheorie keine masselose Zustände vorkommen. Es gibt $D - 2 = 24$ masselose Zustände, da jeder transversale Oszillator auf die Grundzustände einwirken kann

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \quad (2.180)$$

Der allgemeinste masselose Zustand ergibt sich aus einer Linearkombination dieser Basiszustände

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.181)$$

Dieser Ausdruck hat Ähnlichkeit mit dem *Ein-Photon-Zustand* der Maxwell-Theorie. In der Lichtkegel-Eichung sind die Ein-Photon-Zustände gegeben durch

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle. \quad (2.182)$$

Vergleicht man die beiden Zustände (2.181) und (2.182) miteinander, so ist zu erkennen, dass beide einen transversalen Vektor ξ_I , die gleichen Impulse und die gleichen Massen führen. Die Zustände korrespondieren zueinander

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle. \quad (2.183)$$

Die quantentheoretische Beschreibung der Stringtheorie offener Strings beinhaltet also *Photonen-Zustände*. Abschließend wird der Zustand mit $N^\perp = 2$ untersucht. Dieser Zustand wird gebildet, durch zweimaliges Anwenden der Operatoren $a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger}$

$$a_1^{I\dagger} a_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.184)$$

Die vollständige Anzahl der Zustände ist

$$\frac{1}{2}(D-2)(D-1) + (D+2) = \frac{1}{2}(D-2)(D+1), \quad (2.185)$$

mit dem Massenquadrat-Operator $M^2 = \frac{1}{\alpha'}$. Diese Zustände werden *massive Tensoren* genannt. In $D = 26$ Dimensionen gibt es 324 solcher Zustände. Für den Fall $N^\perp = 3$ bekommt man schon 2600 Zustände.

2.7. Quantisierung geschlossener, relativistischer Strings

Geschlossene Strings besitzt keine Endpunkte. Allerdings habe sie Periodizitätsbedingungen. Der Parameter-Raum (τ, σ) für geschlossene Strings ist ein Zylinder. Es muss also die Weltflächen-Koordinate σ kompaktifiziert sein

$$\sigma \sim \sigma + 2\pi. \quad (2.186)$$

Zwei Punkte auf der Weltfläche, die sich um eine Vielfaches von 2π unterscheiden, beschreiben den gleichen Punkt. Demnach sind die String-Koordinaten gegeben durch

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad \text{für alle } \tau, \sigma. \quad (2.187)$$

Die allgemeinste Form der Bewegungsgleichung ist

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v), \quad (2.188)$$

mit $u = \tau + \sigma$ und $v = \tau - \sigma$. Dabei bezeichnen X_L^μ eine *links-laufende Welle*, die sich gegen negative σ bewegt und X_R^μ eine *rechts-laufende Welle*, die sich gegen positive σ bewegt.

Die String-Koordinaten können nach ihren Eigenschwingungen entwickelt werden und ergeben dann

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}). \quad (2.189)$$

Hierbei ist $\alpha_0^\mu = \bar{\alpha}_0^\mu \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu$ und $x_0^{L\mu} = x_0^{R\mu} = x_0^\mu$, α_n^μ sind dabei die rechts-laufenden und $\bar{\alpha}_n^\mu$ die links-laufenden Oszillatoren.

Bei der Quantisierung der geschlossenen Strings, ähneln sich die kanonischen Kommutatorrelationen denen, der offenen Strings. Für die transversalen Lichtkegel-Koordinaten und Impulse wird

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i \delta(\sigma - \sigma') \eta^{IJ}, \quad (2.190)$$

gesetzt und wie gewöhnlich werden die Kommutatoren zweier Koordinaten und zweier Impulse Null gesetzt. Für die Null-Mode ist $[x_0^-, p^+] = -i$. Es gelten die folgenden Kommutatorrelationen

$$\begin{aligned} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Entgegengesetzte Oszillatoren kommutieren hingegen miteinander, d.h.

$$[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0. \quad (2.192)$$

In Analogie zu den offenen Strings, werden Erzeugungs- und Vernichtungs-Operatoren gebildet:

$$\begin{aligned} \alpha_n^I &= a_n^I \sqrt{n} \quad \text{und} \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \\ \bar{\alpha}_n^I &= \bar{a}_n^I \sqrt{n} \quad \text{und} \quad \bar{\alpha}_{-n}^I = \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (2.193)$$

Die nicht-verschwindenden Kommutatorrelationen sind

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_m^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad (2.194)$$

und

$$[x_0^I, \alpha_0^J] = [x_0^I, \bar{\alpha}_0^J] = i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ}, \quad [x_0^I, p^J] = i\eta^{IJ}. \quad (2.195)$$

In Lichtkegel-Koordinaten generiert p^- die X^+ -Translationen, mit $X^+ = \alpha' p^+ \tau$. Da $\partial_\tau = \alpha' p^+ \partial_{X^+}$ ist, ist der Hamilton-Operator gegeben durch

$$H = \alpha' p^+ p^-. \quad (2.196)$$

Um einen *normal-geordneten* Hamiltonian zu finden ist es nötig die *transversalen Virasoro-Operatoren* für die geschlossenen Strings zu bestimmen.

2.7.1. Virasorooperatoren geschlossener Strings

Wegen der zweierlei Oszillator-Typen, existieren zwei Sätze von Virasoro-Operatoren für den geschlossenen String

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad \text{und} \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (2.197)$$

Da $\alpha_0^- = \bar{\alpha}_0^-$ ist, folgt

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp. \quad (2.198)$$

Ein Blick auf die Definitionen von (2.197) zeigt, dass sich die Operatoren L_0^\perp und \bar{L}_0^\perp unterscheiden. Operatoren sind definiert über deren Wirkung auf Zustände. Aus Gleichung (2.198) folgt damit, dass für jeden Zustand $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ die Eigenwertgleichung

$$L_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \bar{L}_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle, \quad (2.199)$$

gelten muss. Das heißt, dass die Gleichheit der Operatoren die gleiche Wirkung auf die Zustände haben. In Analogie zu den Virasoro-Operatoren der offenen Strings werden die Virasoro-Operatoren der geschlossenen quantisierten Strings folgendermaßen definiert

$$\bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp, \quad L_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp, \quad (2.200)$$

wobei N^\perp und \bar{N}^\perp die Besetzungszahl-Operatoren

$$\bar{N}^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I, \quad N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I, \quad (2.201)$$

sind. Wie bei den offenen Strings, ist die Ordnungskonstante $a = -1$ und die kritische Dimension ist $D = 26$.

Der Massenquadrat-Operator für geschlossen Strings ist

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (2.202)$$

Der Hamilton-Operator ergibt sich zu

$$H = \alpha' p^+ p^- = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2. \quad (2.203)$$

Diese Gleichung für den Hamilton-Operator ist die Summe aus dem „offenen String“Hamilton-Operator für die rechts-laufenden Operatoren und ein „offener String“Hamilton-Operators \bar{L}_0^\perp für die links laufenden Operatoren. Unter Verwendung von (2.200) findet man

$$H = \frac{\alpha'}{2} p^I p^I + N^\perp + \bar{N}^\perp - 2. \quad (2.204)$$

Sowohl die Operatoren L_m^\perp , als auch die Operatoren \bar{L}_m^\perp genügen der *Virasoro-Algebra* aus (2.150).

In dem zwei-dimensionalen Parameter-Raum (τ, σ) der Weltfläche geschlossener Strings, ist es der Operator $L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp$, der die τ Translationen generiert. Diese ist demnach eine Weltflächen-Energie. Wegen der statischen Eichung führt die Weltflächen-Energie zum raumzeitlichen Hamilton-Operator von (2.189). Die andere Kombination $L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$ stellt den Weltflächen-Impuls dar.

2.7.2. Der Zustandsraum

Die Grundzustände sind erneut $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. Um die Basiszustände zu erzeugen, müssen zwei Erzeugungsoperatoren, $a_n^{I\dagger}$ und $\bar{a}_n^{J\dagger}$, auf die Grundzustände wirken.

Der allgemeine Basiszustand lautet

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.205)$$

Die Besetzungszahloperatoren sind der Form

$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I} \quad \text{und} \quad \bar{N}^\perp = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{J=2}^{25} m \bar{\lambda}_{m,J}. \quad (2.206)$$

Die Zustandsmassen erhält man aus

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (2.207)$$

Die Grundzustände sind Ein-Teilchen Zustände eines Quanten-Skalarfeldes. Für die Zustände ist $N^\perp = \bar{N}^\perp = 0$ und $M^2 = -\frac{4}{\alpha'} < 0$. Dies sind also Tachyonen der geschlossenen Strings. Die nächst höheren Zustände werden durch Anwenden zweier Oszillatoren auf die Grundzustände erzeugt. Die Anzahl der Zustände ist $(D - 2)^2$.

Ein allgemeiner Zustand ist gegeben durch

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.208)$$

wobei R_{IJ} die Elemente einer allgemeinen quadratischen Matrix der Größe $(D-2)$ sind. Jede beliebige quadratische Matrix kann in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Teil separiert werden, so dass

$$R_{IJ} = \frac{1}{2} (R_{IJ} + R_{JI}) + \frac{1}{2} (R_{IJ} - R_{JI}) = S_{IJ} + A_{IJ}, \quad (2.209)$$

ist, wobei S_{IJ} und A_{IJ} der symmetrische und antisymmetrische Anteil von R_{IJ} sind. Der symmetrische Teil kann wie folgt weiter zerlegt werden

$$S_{IJ} = \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \right) + \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \quad \text{mit} \quad S = S^{IJ} = \delta^{IJ} S_{IJ}. \quad (2.210)$$

Der erste Term der rechten Seite ist spurlos, denn

$$\delta^{IJ} \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \right) = S - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} \delta^{IJ} S = 0. \quad (2.211)$$

Weiterhin wird \hat{S}_{IJ} als der spurlose Anteil von S_{IJ} und $S' = \frac{S}{D-2}$ gesetzt. Schließlich kann man R_{IJ} schreiben in

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S'_{IJ}. \quad (2.212)$$

Der allgemeine Zustand (2.208) kann dann mit den obigen Beziehungen wie folgt zerlegt werden:

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.213)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.214)$$

$$S' a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.215)$$

Den Zuständen aus (2.212) ist zu entnehmen, dass diese die Graviton-Zustände repräsentieren. Die Ein-Graviton-Zustände sind gegeben durch

$$\sum_{I,J=2}^{D-2} \xi_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle, \quad (2.216)$$

wobei ξ_{IJ} eine beliebige symmetrische, spurlose Matrix ist. Da \hat{S}_{IJ} ebenfalls eine symmetrische, spurlose Matrix ist, ist es möglich die Zustände mit einander zu identifizieren:

$$a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \longleftrightarrow a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle. \quad (2.217)$$

Die Identifikation ist möglich, da die beiden Zustände die gleichen Lorentz Indizes, den gleichen Impuls tragen und die gleich Masse besitzen.

Die in (2.214) aufgeführten Zustände werden dem Ein-Teilchen-Zustand des *Kalb-Ramond-Feldes* zugeordnet. Dieses Feld ist ein antisymmetrisches Tensorfeld $B_{\mu\nu}$. Mit $B_{\mu\nu}$ wird das Maxwellfeld A_μ verallgemeinert. So, wie das Maxwellfeld an den Teilchen koppelt, so koppelt das Kalb-Ramond-Feld an Strings. Strings tragen die sogenannte *Kalb-Ramond-Ladung*.

Die Zustände in (2.215) haben keine freien Indizes. Er korrespondiert zu einem Ein-Teilchen-Zustand eines masselosen Skalarfeldes. Dieses Feld wird als das *Dilaton* bezeichnet.

3. Einführung in die Superstringtheorie

In diesem Abschnitt wird die bosonische Stringtheorie verallgemeinert. Bislang wurde die bosonische Stringtheorie behandelt. Diese Stringtheorien funktionierten nur in einer 26-dimensionalen Raumzeit. Alle gefundenen Quantenzustände repräsentierten jedoch nur Bosonen. Eine physikalisch vernünftige Stringtheorie muss aber auch Fermionen beschreiben können. Nichtsdestotrotz konnten bereits wichtige Teilchen-Zustände, wie das Photon und das Graviton identifiziert werden. Die Ausführungen basieren auf [1], Kapitel 14.

Klassische bosonische Strings werden beschrieben durch deren Ortskoordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$. Diese sind klassische kommutierende Variablen, deren Reihenfolge bei der Anwendung keine Rolle spielt. Nach der Quantisierung werden die X^μ 's zu Operatoren, die im Allgemeinen nicht kommutieren.

Um Fermionen in eine Stringtheorie einzugliedern, werden neue dynamische Weltflächen-Variablen, $\psi_1^\mu(\tau, \sigma)$ und $\psi_2^\mu(\tau, \sigma)$, eingeführt. Diese Variablen sind keine herkömmlichen kommutierende Variablen, dies sind *antikommütierende* Variablen, dh. für zwei Operatoren f_1 und f_2 verschwindet der Antikommutator

$$\{f_1, f_2\} = f_1 f_2 + f_2 f_1 = 0. \quad (3.1)$$

Um ein relativistisches Fermion beschreiben zu können, wird das klassische *Dirac-Feld*, eine klassische antikommütierende Feldvariable, benötigt. Die Quantisierung des Dirac-Feldes führt zu den Erzeugungs- und Vernichtoperatoren. Diese gelten jeweils für das Teilchen und deren Antiteilchen. Auch diese Operatoren sind antikommütierende Variablen. Der Impulswert kann lediglich zwei Werte annehmen. Das bedeutet $f_{\vec{p},s}^\dagger f_{\vec{p},s} = 0$ für alle Impulse \vec{p} und Spins s . Ein Mehrteilchen-Zustand ergibt sich zu

$$f_{p_1, s_1}^\dagger f_{p_2, s_2}^\dagger \cdots f_{p_k, s_k}^\dagger |\Omega\rangle. \quad (3.2)$$

Dieser Zustand kann beispielsweise ein Elektron mit dem Impuls \vec{p}_1 und Spin s_1 beschreiben. Wegen $f_{\vec{p},s}^\dagger f_{\vec{p},s}^\dagger |\Omega\rangle = 0$ gibt es keinen Zustand von Elektronen, die denselben Impuls und denselben Spin haben. Wie bereits erwähnt, erfordern klassische Superstrings antikommütierende dynamische Variablen $\psi_\alpha^\mu(\tau, \sigma)$, wobei der Index α die Werte $\alpha = 1, 2$ annimmt. Die dynamische Variable $X^\mu(\tau, \sigma)$ war, für jeden Wert, den μ annehmen konnte, ein Weltflächen-Boson.

Die Quantisierung dieser Objekte, verhalten sich wie Fermionen in der Raumzeit.

Die Wirkung für Fermionen ist gegeben durch

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left(\dot{X}^I \dot{X}^I - X^{I'} X^{I'} \right) + S_\psi \quad (3.3)$$

wobei

$$S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I \right] \quad (3.4)$$

gilt. Die zusätzliche Wirkung S_ψ ist die *Dirac-Wirkung* für ein Fermion, das auf einer zweidimensionalen Weltfläche (τ, σ) lebt. Wie schon in der bosonischen Stringtheorie werden die Bewegungsgleichungen durch Variation der Wirkung bestimmt. Somit ergeben sich die Bewegungsgleichungen zu

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I = 0, \quad (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I = 0 \quad (3.5)$$

mit den Randbedingungen

$$\psi_1^I(\tau, \sigma_*) \delta\psi_1^I(\tau, \sigma_*) - \psi_2^I(\tau, \sigma_*) \delta\psi_2^I(\tau, \sigma_*) = 0 \quad (3.6)$$

Die Bewegungsgleichungen implizieren, dass ψ_1^I *rechtslaufend* und ψ_2^I *linkslaufend* ist, d.h.

$$\begin{aligned} \psi_1^I(\tau, \sigma) &= \Psi_1^I(\tau - \sigma) \\ \psi_2^I(\tau, \sigma) &= \Psi_2^I(\tau + \sigma) \end{aligned} \quad (3.7)$$

An den Endpunkten gilt

$$\psi_1^I(\tau, \sigma_*) = \pm \psi_2^I(\tau, \sigma_*) \quad (3.8)$$

wobei

$$\psi_1^I(\tau, 0) = \psi_2^I(\tau, 0) \quad \text{für } \sigma_* = 0 \quad (3.9)$$

$$\psi_1^I(\tau, \pi) = \pm \psi_2^I(\tau, \pi) \quad \text{für } \sigma_* = \pi \quad (3.10)$$

gilt.

Man kann an den obigen Beziehungen erkennen, dass der Zustandsraum der Superstringtheorie in zwei Unterräume aufgeteilt werden kann. Diese beiden Unterräume werden auch *Sektoren* genannt. Der *Ramond-Sektor (R)* für das obere Vorzeichen in der Gleichung (3.8) und der *Neveu-Schwarz-Sektor (NS)* für das untere Vorzeichen in (3.8). Das Fermionen-Feld soll über das volle Intervall $\sigma \in [-\pi, \pi]$ definiert sein, d.h.

$$\Psi(\tau, \sigma) = \begin{cases} \psi_1^I(\tau, \sigma) & \text{für } \sigma \in [0, \pi] \\ \psi_2^I(\tau, \sigma) & \text{für } \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases}. \quad (3.11)$$

Dies führt zu bestimmten Randbedingungen. Das periodische Fermion Ψ^I entspricht den Ramond-Randbedingungen und das antiperiodische Fermion Ψ^I entspricht den Neveu-Schwarz-Randbedingungen.

Das bedeutet

$$\begin{aligned}\Psi^I(\tau, \pi) &= +\Psi^I(\tau, -\pi) && \text{Ramond-Randbedingungen} \\ \Psi^I(\tau, \pi) &= -\Psi^I(\tau, -\pi) && \text{Neveu-Schwarz-Randbedingungen}\end{aligned}\tag{3.12}$$

3.1. Der Neveu-Schwarz Sektor

Das Neveu-Schwarz Fermion kann als eine Funktion von $(\tau - \sigma)$ angesehen werden. Dieses wechselt sein Vorzeichen bei Transformationen der Art $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$. Es muss nach gebrochen rationalen Moden entwickelt werden

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} b_r^I e^{-ir(\tau - \sigma)}.\tag{3.13}$$

Diese Gleichung garantiert die Antiperiodizität, denn für jede Zahl $r = n + \frac{1}{2}$ gilt

$$e^{ir(\sigma + 2\pi)} = e^{ir\sigma} e^{i(n + \frac{1}{2})2\pi} = e^{ir\sigma} e^{i\pi} = -e^{ir\sigma}.\tag{3.14}$$

Da Ψ^I eine antikommutierende Variable ist, antikommutieren auch deren Entwicklungskoeffizienten b_r^I . Die Koeffizienten mit negativen Entwicklungsmoden $b_{-1/2}^I, b_{-3/2}^I, \dots$ sind die Erzeugungsoperatoren. Die Koeffizienten positiver Moden $b_{1/2}^I, b_{3/2}^I, \dots$ sind die Vernichtungsoperatoren. Diese Operatoren wirken auf ein Vakuum, das *Neveu-Schwarz-Vakuum* $|NS\rangle$. Die Operatoren erfüllen die Antikommutatorrelation

$$\{b_r^I, b_s^J\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ}.\tag{3.15}$$

Der Basiszustand in dem Zustandsraum des NS-Sektors wird durch

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^9 \prod_{r=1/2, 3/2, \dots} (b_{-r}^J)^{\rho_{r,J}} |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle,\tag{3.16}$$

beschrieben. Dabei ist $\rho_{r,J}$ entweder eins oder null. Die Reihenfolge, in der die b -Operatoren vorkommen, spielt keine Rolle.

Der Massenquadratoperator, bevor er normal-geordnet ist, ist im NS-Sektor gegeben durch

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} r b_{-r}^I b_r^I \right).\tag{3.17}$$

Woraus nach einigen Umformungen¹⁶

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} + N^\perp \right) \quad \text{mit} \quad N^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{r=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots} r b_{-r}^I b_r^I \quad (3.18)$$

folgt. Der Gleichung ist zu entnehmen, dass die Ordnungskonstante $a = -\frac{1}{2}$ ist für $D = 10$. Die Zustände des NS -Sektors sind:

$$\begin{aligned} N^\perp = 0 : \quad & \alpha' M^2 = -\frac{1}{2}, \quad |p^+, \vec{p}_T\rangle, \\ N^\perp = \frac{1}{2} : \quad & \alpha' M^2 = 0, \quad b_{-1/2}^I |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \\ N^\perp = 1 : \quad & \alpha' M^2 = \frac{1}{2}, \quad \{\alpha_{-1}^I, b_{-1/2}^I b_{-1/2}^J\} |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \\ N^\perp = \frac{3}{2} : \quad & \alpha' M^2 = 1, \quad \{\alpha_{-1}^I b_{-1/2}^I, b_{-3/2}^I b_{-1/2}^J b_{-1/2}^K\} |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Die Zustände mit N^\perp haben, mit $\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}$, ein negatives Massenquadrat. Die Zustände zu $N^\perp = \frac{1}{2}$ sind masselos.

Ein weiterer nützlicher Operator ist einer, der (+1) für bosonische Zustände und (-1) für fermionische Zustände ergibt. Dieser Operator ist $(-1)^F$, wobei F die Fermionen-Anzahl angibt. Daraus folgt, dass Zustände mit gerader Fermionen-Anzahl bosonischer Natur sind und die Zustände mit ungerader Fermionen-Anzahl fermionischer. Die Wirkung dieses Operators auf die NS-Grundzustände liefert den Eigenwert -1 , d.h.

$$(-1)^F |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle = - |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (3.20)$$

Wieviele Zustände sich auf der entsprechenden Massenebene befinden, kann mit der sogenannten *generierenden Funktion* herausgefunden werden. Für den NS -Sektor lautet die generierende Funktion

$$f_{NS}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n-\frac{1}{2}}}{1 - x^n} \right)^8. \quad (3.21)$$

Die ersten Terme ergeben ausgeschrieben

$$f_{NS} = \frac{1}{\sqrt{x}} + 8 + 36\sqrt{x} + 128x + 402x\sqrt{x} + 1152x^2 + \dots \quad (3.22)$$

Die Entwicklung zeigt das Tachyonfeld bei $\alpha' M^2 = -\frac{1}{2}$, die acht masselose Zustände im zweiten Term und die 36 Zustände bei $\alpha' M^2 = \frac{1}{2}$.

¹⁶Die vollständige Herleitung kann in [1], S.313-134 nachgelesen werden.

3.2. Der Ramond Sektor

Nach den Ramond-Randbedingungen (3.12) ist das Feld Ψ^I periodisch und kann wie folgt entwickelt werden

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^I e^{in(\tau - \sigma)}. \quad (3.23)$$

Da auch hier Ψ^I eine antikommutierende Variable ist, sind die Oszillatoren d_n^I antikommutierende Operatoren. In Analogie zu dem NS-Sektor sind die Operatoren mit negativer Moden $d_{-1}^I, d_{-2}^I, d_{-3}^I, \dots$, Erzeugungsoperatoren und die Operatoren mit positiver Moden $d_1^I, d_2^I, d_3^I, \dots$, Vernichtungsoperatoren. Die Oszillatoren des Ramond-Sektors genügen der Antikommutatorrelation

$$\{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}. \quad (3.24)$$

Da die Ramond-Erzeugungsoperatoren antikommutieren, können sie nur einmal in einem Zustand vorkommen. Durch Linearkombinationen werden die acht Null-Moden d_0^I zu vier Vernichtungsoperatoren und Erzeugungsoperatoren aufgegliedert. Die Null-Moden tragen nicht zum Massenquadrat der Zustände bei. Wenn man $|0\rangle$ als das Vakuum definiert, dann existieren 16 entartete Ramond-Grundzustände. Acht der Zustände $|R_a\rangle$, $a = 1, 2, \dots, 8$, wirken mit einer geraden Anzahl an Erzeugungsoperatoren auf das Vakuum, während die acht Zustände $|R_{\bar{a}}\rangle$, $\bar{a} = \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{8}$ mit ungerader Anzahl an Erzeugungsoperatoren auf das Vakuum wirken. Die Zustände $|R_a\rangle$ und $|R_{\bar{a}}\rangle$ werden mit $|R_A\rangle$, $A = 1, \dots, 16$ zusammengefasst. Der Ramond-Sektor des Zustandsraumes enthält die Zustände

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=2}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^9 \prod_{m=1}^{\infty} (d_{-m}^J)^{\rho_{m,J}} |R_A\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (3.25)$$

wobei $\rho_{m,J}$ entweder eins oder null ist. Analog zu dem NS-Sektor, existiert auch in dem Ramond-Sektor ein Operator der Form $(-1)^F$. Dieser Operator antikommutiert mit allen fermionischen Oszillatoren, inklusive der Null-Moden

$$\{(-1)^F, d_n^I\} = 0, \quad (3.26)$$

und

$$(-1)^F |0\rangle = -1 |0\rangle. \quad (3.27)$$

Es zeigt sich, dass alle $|R_a\rangle$ fermionische Zustände und $|R_{\bar{a}}\rangle$ alle bosonische Zustände sind.

Bevor der Massenquadratoperator normal-geordnet ist, ist dieser gegeben durch

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} n d_{-n}^I d_n^I \right) \quad (3.28)$$

Nach einigen Umformungen¹⁷ erhält man den Massenquadratoperator

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^I + n d_{-n}^I d_n^I). \quad (3.29)$$

Somit schreibt sich der Massenquadrat-Operator vereinfacht als

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} N^\perp \quad \text{mit} \quad N^\perp = \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^I + n d_{-n}^I d_n^I). \quad (3.30)$$

Gleichung (3.30) impliziert, dass die Ramond-Grundzustände masselos sind.

Die Zustände auf den verschiedenen Massen-Ebenen sind

$$\begin{array}{l} \alpha' M^2 = 0: \quad |R\rangle \\ \alpha' M^2 = 1: \quad \alpha_{-1}^I |R\rangle, d_{-1}^I |R_{\bar{a}}\rangle \\ \alpha' M^2 = 2: \quad \{\alpha_{-2}^I, \alpha_{-1}^I, \alpha_{-1}^J, d_{-1}^I d_{-1}^J\} |R_a\rangle, \\ \quad \quad \quad \{\alpha_{-1}^I d_{-1}^I, d_{-2}^I\} |R_{\bar{a}}\rangle \end{array} \left\| \begin{array}{l} |R\rangle \\ \alpha_{-1}^I |R_{\bar{a}}\rangle, d_{-1}^I |R_a\rangle \\ \{\alpha_{-2}^I, \alpha_{-1}^I \alpha_{-1}^J, d_{-1}^I d_{-1}^J\} |R_{\bar{a}}\rangle, \\ \{\alpha_{-1}^I d_{-1}^I, d_{-2}^I\} |R_a\rangle. \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Hier sind die Zustände in zwei Gruppen unterteilt. Da sind zum einen die Zustände mit $(-1)^F = -1$. Dieses sind die fermionischen Zustände. Auf der rechten Seite sind die Zustände mit $(-1)^F = +1$. Dieses sind die bosonischen Zustände. Es gibt für jeden Zustand auf der linken Seite einen zugehörigen Zustand der rechten Seite. Da es die gleiche Anzahl von fermionischen und bosonischen Zuständen auf jeder Massenebene gibt, zeigt sich die *Supersymmetrie*.

Die generierende Funktion für den Ramond-Sektors lautet

$$f_R(x) = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8, \quad (3.32)$$

mit der Potenzreihenentwicklung folgt

$$f_R(x) = 16 + 256x + 2304x^2 + 15360x^3 \dots \quad (3.33)$$

Während die gerierende Funktion des R-Sektors nur ganzzahlige Potenzen von x beinhaltet, enthält die generierende Funktion des NS-Sektors sowohl ganzzahlige, als auch halbzahlige Potenzen von x . Es gibt als doppelt soviel Zustände wie in dem NS-Sektor.

¹⁷Zur vollständigen Herleitung vgl.[1],S.316.

3.3. Offene Superstrings

Wie bereits gesehen, besitzt der Ramond-Sektor Weltflächen-Supersymmetrie, denn es gibt die gleiche Anzahl an fermionischen und bosonischen Zuständen auf jeder Massenebene. Da alle Zustände im R-Sektor eine *Spinor*-Index tragen, erhält man aus diesem Sektor nur Raumzeit-Fermionen. Der Ramond-Sektor wird auf die Zustände mit $(-1)^F = -1$ gekürzt. Diese sind die Zustände auf der linken Seite von (3.31). Diese sind die Zustände der Weltflächen-Fermionen, die als Zustände der Raumzeit-Fermionen erkannt werden. Der sich ergebene Sektor heißt *R*--Sektor. Mit den Zuständen $(-1)^F = +1$ wird der *R*+Sektor definiert. Die generierende Funktion (3.32) des Ramond-Sektors reduziert auf die Hälfte der Zustände

$$f_{R-}(x) = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8. \quad (3.34)$$

Die Potenzreihenentwicklung ist

$$f_{R-}(x) = 8 + 128x + 1152x^2 + 7680x^3 + 42112x^4 + \dots. \quad (3.35)$$

Daraus ergeben sich acht masselose fermionische Zustände. Kein Zustand des *NS*-Sektors trägt einen Spinor-Index, so dass dieser Sektor die Raumzeit-Bosonen liefert. Die Grundzustände $|NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ sind tachyonische Zustände mit $(-1)^F = -1$. Die masselosen Zustände $b_{-1/2}^L |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ tragen einen Lorentz-Index, so dass diese als die acht Photon-Zustände eines zehndimensionalen Maxwell-Eichfeld identifiziert werden können. Diese acht bosonische Zustände stehen in supersymmetrischer Übereinstimmung mit den acht fermionischen Zuständen des *R*--Sektors.

3.4. Theorien geschlossener Strings

Wie bereits gesehen, bekommt man geschlossene Strings durch multiplikative Kombination links-laufender und rechts-laufender offener Strings. Das gleiche gilt für geschlossene Superstrings. Offene Superstrings haben zwei Sektoren, den *NS*- und den *R*-Sektor. Sektoren geschlossener Strings können vier verschiedene Möglichkeiten annehmen

$$(NS, NS), \quad (NS, R), \quad (R, NS) \quad \text{und} \quad (R, R), \quad (3.36)$$

dabei beschreibt der erste Eintrag in der Klammer den links-laufenden Sektor und der zweite Eintrag beschreibt den rechts-laufenden Sektor. Auch gibt es die Operatoren $(-1)^{F_L}$ und $(-1)^{F_R}$, die die Fermionen in dem *L* und *R* Sektor zählen.

Um eine Theorie geschlossener Strings mit Supersymmetrie zu erhalten, müssen die Sektoren aus (3.36) gekürzt werden.

Wählt man zum Beispiel

$$\text{Links-Sektor : } \left\{ \begin{array}{c} NS+ \\ R- \end{array} \right\}, \quad \text{Rechts-Sektor : } \left\{ \begin{array}{c} NS+ \\ R+ \end{array} \right\}, \quad (3.37)$$

so bekommt man durch multiplikative Kombination dieser Sektoren die Type IIA Superstringtheorie

$$\text{Type IIA : } (NS+, NS+), \quad (NS+, R+), \quad (R-, NS+), \quad (R- R+). \quad (3.38)$$

Das Massenquadrat geschlossener Strings ist gegeben durch

$$\frac{1}{2}\alpha' M^2 = \alpha' M_L^2 + \alpha' M_R^2, \quad (3.39)$$

wobei M_L^2 und M_R^2 die Massenquadrat-Operatoren der offenen Strings sind, die benutzt wurden, um die linken und rechten Sektoren auszubauen. Die Type IIA Superstring beinhaltet keine Tachyonen und die masselosen Zustände erhält man durch Kombination der masselosen Zustände der jeweiligen Sektoren:

$$\begin{aligned} (NS+, NS+): & \quad \bar{b}_{-1/2}^I |NS\rangle_L \otimes b_{1/2}^J |NS\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ (NS+, R+): & \quad \bar{b}_{-1/2}^I |NS\rangle_L \otimes |R_{\bar{b}}\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ (R-, NS+): & \quad |R_a\rangle_L \otimes b_{-1/2}^I |NS\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle \\ (R-, R+): & \quad |R_a\rangle_L \otimes |R_{\bar{b}}\rangle_L \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle \end{aligned} \quad (3.40)$$

Die ersten Zustände aus (3.40) führen unabhängige Vektorindizes und laufen über acht Werte. Es gibt also 64 bosonsiche Zustände. Es können die schon bekannten Zustände des Gravitons, des Kalb-Ramond-Feldes und des Dilaton-Feldes gefunden werden:

$$(NS+, NS+) \text{ masselose Felder } g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} \text{ und } \phi. \quad (3.41)$$

Die zweiten und dritten Zustände in (3.40) beinhalten ein Ramond-Vakuum und darüber hinaus Raumzeit-Fermionen. Die letzten Zustände in (3.40) beinhalten das Produkt aus zwei R Grundzuständen und sind daher Raumzeit-Bosonen.

Schließlich sollte erwähnt werden, dass sich die gleiche Type IIA Superstringtheorie ergibt, falls die beiden Sektoren $R+$ und $R-$ in (3.37) vertauscht würden. Eine andere, die Type IIB Superstringtheorie, möchte ich in dieser Arbeit nicht weiter vertiefen¹⁸.

Die hier beschriebenen Type II Theorien sind nicht die einzigen Superstringtheorien. Es gibt zusätzlich noch zwei *heterorische* Superstringtheorien. Während sich Type II Theorien geschlossener Superstrings aus der Kombination von links-laufenden und rechts-laufenden Kopien offener Superstrings ergeben, werden in den heterorischen Theorien links-laufende offene bosonsiche Strings mit rechts-laufenden offenen Superstrings kombiniert. Diese Theorien sind zehn-dimensional. Heterorische Theorien kommen in zwei Versionen vor, nämlich in der $E_8 \times E_8$ Version und in der $SO(32)$ Version. Sowohl $E_8 \times E_8$ als auch $SO(32)$ sind *Symmetriegruppen*.

¹⁸Selbstverständlich kann diese in [1], S.323-324 nachgelesen werden.

Schlussendlich gibt es neben den Type II und heterorischen Theorien noch die Type I Theorie. Diese supersymmetrischen Theorie beinhaltet offene und geschlossene *unorientierte* Strings. unorientierte Strings sind solche, die invariant unter der Umkehr der String-Orientierung sind.

Die Liste der zehn-dimensionalen Superstring-Theorien sind dann

- Type IIA,
- Type IIB,
- $E_8 \times E_8$ heterorisch,
- $SO(32)$ heterorisch,
- Type I.

Diese fünf Theorien wurden alle in der Mitte der 1980-er Jahre gefunden. Es gibt jedoch eine andere Theorie. Die *M-Theorie*. Diese Theorie ist *keine* Stringtheorie, denn die M-Theorie enthält Membranen (2-Branen) und 5-Branen. Diese Branen sind allerdings keine *D*-Branen, wie in der Stringtheorie. Die M-Theorie könnte helfen die Stringtheorie besser zu verstehen. Die oben genannten fünf Stringtheorien sind schon miteinander verwandt, die M-Theorie hingegen könnte zeigen, dass es doch nur eine, fundamentale Theorie gibt.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass es fünf Superstringtheorien und die M-Theorie gibt, die jeweils nur Grenzen einer allumfassenden Theorie sind.

4. D-Branen und Eichfelder

Bisher wurden offene Strings betrachtet, deren Koordinaten den Neumann-Randbedingungen unterliegen. Eine wichtige Eigenschaft dieser Strings ist es, dass sie sich auf einer raumfüllenden $D25$ -Membran bewegen. In diesem Abschnitt werden offene Strings betrachtet, die sich auf verallgemeinerten niederdimensionalen Membranen befinden. Die Ausführungen basieren auf [1], Kapitel 15.

4.1. Dp -Branen und Randbedingungen

Unter einer Dp -Brane versteht man ein ausgedehntes Objekt mit p räumlichen Dimensionen. In der bosonischen Stringtheorie wurde gezeigt, dass diese 25 räumliche Dimensionen benötigt. Somit ist die raumfüllende Brane der bosonischen Stringtheorie eine $D25$ -Brane. Im Folgenden wird d die Anzahl der räumlichen Dimensionen beschreiben. Die Anzahl der Raum-Zeit-Dimensionen ergibt sich aus $D = p + 1$. Eine Dp -Brane mit $p < 25$ erstreckt sich über einen p -dimensionalen Unterraum des 25-dimensionalen Raumes.

In diesem Abschnitt werden Dp -Branen untersucht, die p -dimensionale *Hyperflächen* des d -dimensionalen Raumes sind. Zur Beschreibung dieser Hyperflächen werden $(d - p)$ -*lineare Bedingungen* benötigt.

Die Raum-Zeit-Koordinaten x^μ werden dazu in zwei Gruppen unterteilt. Dabei wird die eine Gruppe aus den Koordinaten bestehen, die *tangential* zum Weltvolumen¹⁹ sind. Dies sind die p räumlichen Koordinaten. Die andere Gruppe beschränkt sich auf die $(d - p)$ Koordinaten *normal* zu dem Volumen. Dies wird kompakt als

$$\underbrace{x^0, x^1, x^3, \dots, x^p}_{Dp \text{ tangential Koordinaten}} \quad \underbrace{x^{p+1}, x^{p+2}, x^{p+3}, \dots, x^d}_{Dp \text{ normal Koordinaten}} \quad (4.1)$$

geschrieben. Die Lage der Dp -Brane wird durch das Fixieren der normalen Koordinaten festgelegt, d.h.

$$x^a = \bar{x}^a \quad \text{mit} \quad a = (p + 1), \dots, d. \quad (4.2)$$

Für die String-Koordinaten X^μ gilt damit

$$\underbrace{X^0, X^1, X^2, \dots, X^p}_{Dp \text{ tangential Koordinaten}} \quad \underbrace{X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d}_{Dp \text{ normal Koordinaten}} \quad (4.3)$$

Da die Endpunkte offener Strings auf einer Dp -Brane enden müssen, unterliegen die Koordinaten normal zu der Brane den Dirichlet-Randbedingungen, d.h.

$$X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = 0 \quad \text{mit} \quad a = (p + 1), \dots, d. \quad (4.4)$$

Weil beide String-Enden den Dirichlet-Randbedingungen unterliegen, werden die String-Koordinaten X^a als die *DD Koordinaten* bezeichnet. Die Endpunkte des offenen Strings können sich frei entlang der tangential Richtung auf der Brane bewegen. Die String-Koordinaten tangential zu der D -Brane genügen

¹⁹In Analogie zur Weltlinie eines Punktteilchens in der Raumzeit, einer Weltfläche eines Strings, ist ein Weltvolumen einer p -Brane $(p + 1)$ -dimensional.

den Neumann-Randbedingungen

$$X^{n'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = X^{n'}(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = 0 \quad \text{mit } n = 0, 1, 2, \dots, p \quad (4.5)$$

Diese String-Koordinaten werden als die *NN-Koordinaten* bezeichnet, da beide Endpunkte den Neumann-Randbedingungen unterliegen.

Bedingung (4.3) kann auch als eine Aufteilung in Neumann bzw. Dirichlet-Randbedingungen angesehen werden

$$\underbrace{X^+, X^-, \{X^i\}}_{\text{NN}} \quad \underbrace{\{X^a\}}_{\text{DD}} \quad \text{mit } i = 2, 3, \dots, p \quad \text{und } a = (p+1), \dots, d. \quad (4.6)$$

Die NN-Koordinaten $X^i(\tau, \sigma)$ erfüllen genau die selben Bedingungen wie die Lichtkegelkoordinaten $X^I(\tau, \sigma)$ eines offenen Strings endend auf einer $D25$ -Brane. Alle Ergebnisse, Kommutatorrelationen und Entwicklungen können nach Ersetzung $I \rightarrow i$ übernommen werden.

Es ergibt sich für die Entwicklung der String Koordinate²⁰

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (4.7)$$

Da diese Gleichung keinen Term linear in τ hat, ist der Netto-Impuls in die x^a -Richtung gleich Null. Dies beschreibt einen String, dessen Enden an die Brane gebunden sind. Würde es einen Term $p^a \tau$ geben, so müssten die String-Endpunkte für $\tau \neq 0$ nicht bei $x^a = \bar{x}^a$ bleiben, so dass die Endpunkte nicht mehr an die Brane gebunden wären. Aus der String-Koordinate (4.7) ergeben sich folgende Ableitungen:

$$\dot{X}^a = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin(n\sigma), \quad X^{a'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^a e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (4.8)$$

Die Stringkoordinate X^a ist hermitesch, falls $(\alpha_n^a)^\dagger = \alpha_{-n}^a$ ist. Eine Kombination der Ableitungen liefert

$$X^{a'} \pm \dot{X}^a = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \alpha_n^a e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (4.9)$$

Die Quantisierung verläuft dann analog zu der in Abschnitt 2.6 gezeigten Quantisierung relativistischer offener Strings. Der Massenquadratoperator ist gegeben durch

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^a a_m^{a\dagger} \right). \quad (4.10)$$

²⁰Für die vollständige Herleitung vgl.[1], S.333-335.

Die Grundzustände, mit einer $D25$ -Brane im Hintergrund, waren $|p^+, \vec{p}_T\rangle$, wobei $\vec{p}_T = (p^2, \dots, p^p)$ der Vektor mit den Komponenten p^J ist. Für die Grundzustände hier gilt einfach

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle \quad \text{mit} \quad \vec{p}_T = (p^2, \dots, p^p). \quad (4.11)$$

Es gibt Oszillatoren, die entlang der Brane schwingen,

$$a_n^{i\dagger}, \quad n \geq 1, \quad i = 2, \dots, p, \quad (4.12)$$

und Oszillatoren, die normal zu der Brane schwingen,

$$a_n^{a\dagger}, \quad n \geq 1, \quad a = p+1, \dots, d. \quad (4.13)$$

Dann sind die möglichen Zustände der Form

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^p (a_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^d (a_m^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}} \right] |p^+, \vec{p}\rangle. \quad (4.14)$$

Die Grundzustände

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha}, \quad (4.15)$$

sind Tachyonen-Zustände auf der Brane, die dieselbe Masse haben wie die bei einer $D25$ -Brane. Das zugehörige Tachyonen-Feld ist ein Lorentz-Skalar auf der Brane. Ein Oszillator von den tangentialen Koordinaten, der auf Grundzustand wirkt, ergibt die nächst höheren Zustände:

$$a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad i = 2, \dots, p, \quad M^2 = 0. \quad (4.16)$$

Für jeden Impuls gibt es also $(p+1) - 2 = (p-1)$ - masselose Zustände. Bei den Zuständen in (4.16) handelt es sich um Photonen-Zustände, das zugehörige Feld ist das Maxwell-Feld. Es folgt also, dass *eine Dp -Brane ein Maxwell-Feld auf dessen Weltvolumen besitzt.*

Ein Oszillator aus den Koordinaten normal zu der Brane wirkt wie folgt auf die Grundzustände

$$a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad a = p+1, \dots, d, \quad M^2 = 0. \quad (4.17)$$

Für jeden Impuls gibt es $(d-p)$ Zustände, die sich auch der Brane befinden. Auf einer Dp -Brane gibt es für jede normale Richtung ein masseloses Skalarfeld.

Die masselosen Zustände auf einer Dp -Brane sind $(p-1)$ Photonen-Zustände und $(d-p)$ Skalarfeld-Zustände. Es ergibt sich also die gleiche Anzahl masseloser Zustände, wie auf einer $D25$ -Brane.

4.2. Offene Strings zwischen parallelen Dp -Branen

Es werden nun offene Strings, die sich zwischen parallelen Branen befinden, quantisiert. Falls zwei Branen die gleichen Sätze an longitudinalen und normalen Koordinaten haben, so sind die Dimensionen dieser Branen gleich. Dazu sei die eine Brane am Punkt $x^a = \bar{x}_1^a$, die andere bei $x^a = \bar{x}_2^a$ fixiert. Für den Fall $\bar{x}_1^a = \bar{x}_2^a$ liegen die Dp -Branen übereinander. In Abbildung 4.1 sind zwei parallel zueinander stehende $D2$ -Branen dargestellt. Die Abbildung zeigt, dass es vier verschiedene Typen von Strings gibt. Diese Typen werden auch *Sektoren* genannt.

Dazu gehören die Strings, dessen beider Endpunkte auf einer der Branen liegen. Diese bilden eine Klasse. Weiterhin gibt es die Klasse der Strings, dessen Endpunkte sowohl auf der einen als auch auf der anderen Brane enden. Diese bilden zwei Sektoren, da hier die Orientierung der Strings zu beachten ist. Das bedeutet, dass die Strings, die auf Brane eins beginnen und auf Brane zwei enden sich von denen unterscheiden, die auf eins enden und auf zwei beginnen.

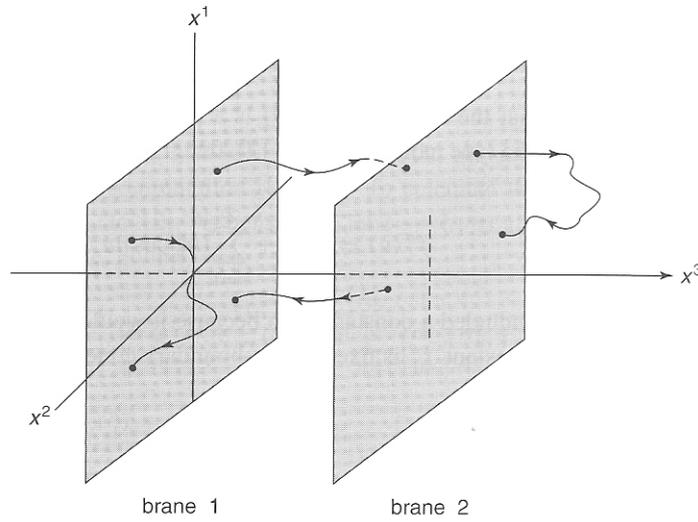


Abbildung 4.1: Zwei parallele $D2$ -Branen. Hier sind x^1 und x^2 longitudinale Koordinaten, x^3 ist eine normale Koordinate. Die Position der Brane eins und Brane zwei sind spezifiziert durch die Koordinaten \bar{x}_1^3 und \bar{x}_2^3 . Diese Branen-Konfiguration beinhaltet vier verschiedene String-Typen (Abb. aus [1]).

Für die NN-String-Koordinaten X^+, X^- und X^i gelten die bisherigen Überlegungen des vorherigen Abschnitts, denn die Randbedingungen sind bereits in (4.5) gegeben. Die DD-String-Koordinaten unterliegen den Randbedingungen

$$X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=0} = \bar{x}_1^a, \quad X^a(\tau, \sigma)|_{\sigma=\pi} = \bar{x}_2^a, \quad a = (p+1), \dots, d. \quad (4.18)$$

Für einen String, der sich von Brane eins zur Brane zwei erstreckt, gilt

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (4.19)$$

Da die Konstanten \bar{x}_1^a und \bar{x}_2^a keine Parameter der String-Fluktuationen sind, werden diese auch bei der Quantisierung nicht zu Operatoren. Es ist insbesondere zu erwähnen, dass es keine Terme linear in τ gibt, das heißt also, dass es keinen Impuls in die x^a -Richtung gibt. Für Strings, die sich von der Brane zwei zu der Brane eins erstrecken, gelten die gleichen Beziehungen, unter Vertauschung der Indices.

Der Massenquadratoperator ist gegeben durch

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1), \quad (4.20)$$

wobei

$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a, \quad (4.21)$$

ist. Aus Gleichung (4.20) folgt, dass ein neuer Term, $\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2$, im Massenquadrat vorkommt. Da die Stringspannung gegeben ist durch $T_0 = \left(\frac{1}{2\pi\alpha'} \right)$, entspricht der Term $\left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2$ der klassischen Stringspannung zum Quadrat, eines klassischen statischen Strings, der über zwei Branen gestreckt ist. Die Konstante verschwindet, falls die Branen übereinstimmen. Zur Untersuchung der Grundzustände werden vier verschiedene Sektoren untersucht. Es erweist sich als hilfreich eine neue Notation einzuführen. Man schreibt $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$, wobei $i, j \in [1, 2]$ ist. Je nachdem, welche Brane beschrieben wird. Der erste Eintrag in der eckigen Klammer steht für die Brane, an der der String beginnt. Der zweite Eintrag steht für die Brane, an der der String endet. Dies führt zu vier Arten von Grundzuständen

$$|p^+, \vec{p}; [11]\rangle, \quad |p^+, \vec{p}; [22]\rangle, \quad |p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad |p^+, \vec{p}; [21]\rangle. \quad (4.22)$$

Die Zustände offener Strings in dem $[ik]$ -Sektor werden konstruiert, indem Oszillatoren auf $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$ wirken. Die Zustände nehmen die Form (4.14) an, mit der Ausnahme, dass die Grundzustände durch $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$ ersetzt werden. Die Frage, die es zu beantworten gilt ist, wo die zu [12] korrespondierenden Felder leben. Diese ist nicht ganz einfach zu beantworten. Diese Felder sind sicherlich $(p+1)$ -dimensional. Es ist nicht zu sagen, dass die Felder auf einer dieser Branen leben, sie leben auf beiden Branen.

Die Grundzustände der Strings, die sich zwischen den Branen erstrecken, sind

$$|p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha'} + \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2. \quad (4.23)$$

Falls die Branen gleich sind, werden die Zustände zu den bekannten Tachyonzuständen.

Falls die Branen voneinander getrennt bleiben, so bekommt das Massenquadrat einen positiven Beitrag. Für den *kritischen Abstand*

$$|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| = 2\pi\sqrt{\alpha'}, \quad (4.24)$$

repräsentieren die Grundzustände masselose Skalarfelder. Für große Abstände der Branen voneinander sind die Grundzustände massive Skalarfelder.

Um die nächst höheren Zustände zu erhalten, wird ein Oszillator auf die Grundzustände angewendet

$$a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad a = (p+1), \dots, d, \quad M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2. \quad (4.25)$$

Es existieren $(d-p)$ massive Zustände für jeden Impulswert. Der Index a ist kein Lorentz-Index in der $(p+1)$ -dimensionalen Raumzeit, was zur Folge hat, dass die Zustände Lorentz-Skalare sind. Insgesamt erhält man $(d-p)$ massive Skalarfelder. Oszillatoren aus Koordinaten tangential zu der Brane erzeugen die Zustände

$$a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad i = 2, \dots, p, \quad M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2. \quad (4.26)$$

Für jeden Impuls ergeben sich $(p+1) - 2 = p - 1$ massive Zustände.

Ein massives Eichfeld hat mehr Freiheitsgrade als ein masseloses Eichfeld, nämlich genau einen mehr für jeden erlaubten Impulswert. In einer D -dimensionalen Raumzeit hat ein masseloses Eichfeld $(D-2)$ Zustände für jeden Impuls p_μ , der $p^2 = 0$ erfüllt. Ein massives Eichfeld hingegen hat $(D-1)$ Zustände für jeden Impulswert p_μ , der die *on-shell-Bedingung* $p^2 + m^2 = 0$ erfüllt. Die Zustände (4.26) sind nicht ganz vollständig um das Maxwell-Eichfeld zu repräsentieren. Es fehlt ein Freiheitsgrad. Daher muss einer der (skalaren) Zustände von (4.25) zu den $(p-1)$ Zuständen von (4.26) wechseln. Insgesamt ergibt dies dann einen massiven Vektor und $(d-p-1)$ massive Skalare.

Ein interessanter Fall ergibt sich, wenn der Abstand zwischen den Branen verschwindet. Zwar liegen die Branen dann übereinander und stimmen überein, dennoch besitzen sie noch vier Sektoren. Die masselosen Zustände offener Strings, die sich von Brane eins zu Brane zwei erstrecken, beinhalten ein masseloses Eichfeld und $(d-p)$ masselose Skalare. Der gleiche Feldinhalt wird durch einen Sektor beschrieben, dessen Strings auf der einen Brane beginnen und auf der selben auch enden. Das bedeutet, dass es sich um vier masselose Eichfelder handelt, falls die beiden Branen übereinstimmen. Im Rahmen der Stringtheorie wechselwirken diese Eichfelder miteinander, indem die String-Endpunkte aneinander koppeln.

Genau diese wechselwirkenden Eichfelder werden durch die sogenannten *Yang-Mills-Theorien* beschrieben. Auf dem Weltvolumen zweier übereinstimmender D -Branes handelt es sich um eine $U(2)$ Yang-Mills-Theorie. Genauer gesagt enthält die $U(2)$ Theorie noch Wechselwirkungsterme, diese können bei niedrigen Energien vernachlässigt werden. Die 2 steht für die zwei übereinstimmenden Branen. Zusammenfassend lässt sich sagen:

Falls es N übereinstimmende Dp -Branes gibt, existieren N^2 Sektoren und damit auch N^2 masselose Eichfelder.

Das heißt, dass N übereinstimmende D -Branes $U(N)$ masselose Eichfelder führen. Für eine einzelne Brane heißt das, dass sie durch eine $U(1)$ Yang-Mills-Theorie beschrieben wird. Dies entspricht gerade dem Maxwell-Feld.

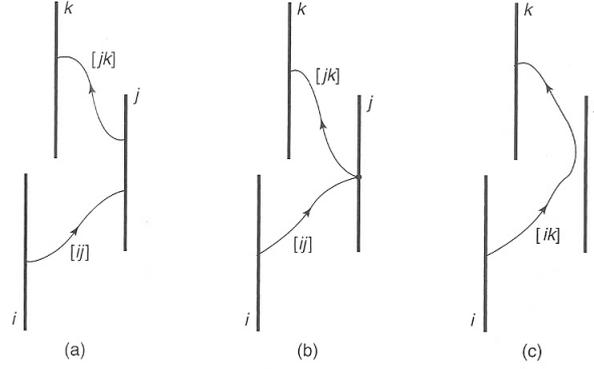


Abbildung 4.2: (a) Drei Branen, mit den Indices i, j und k , und Strings in dem $[ij]$ -Sektor und im $[ijk]$ -Sektor. (b) Das Ende des Strings in dem $[ij]$ -Sektor trifft auf den String in dem $[jk]$ -Sektor. Diese interagieren miteinander. (c) Der resultierende String im $[ik]$ -Sektor (Abb. aus [1]).

In Abbildung 4.2 wird gezeigt, wie Strings, die zwischen zwei Branen ausgestreckt sind, miteinander wechselwirken können. In einem Prozess kann ein offener String sich mit einem zweiten String vereinen um einen neuen offenen String zu bilden. Dabei vereint sich der Endpunkt des ersten Strings mit dem Anfangspunkt des zweiten Strings. Der daraus resultierende String beginnt an dem Anfang des ersten Strings und endet an dem Ende des zweiten Strings. Falls sich die Strings zwischen den Branen ausbreiten, kann ein String aus dem Sektor $[ij]$ sich mit einem String aus dem Sektor $[jk]$ zu einem Produkt-String im $[ik]$ Sektor vereinen. Diese Interaktion ist möglich, da sich beide, das Ende des einen Strings und der Anfang des anderen Strings, auf der selben D -Brane befinden. Der resultierende String ist dann nicht mehr an die j Brane gebunden, da sich kein Endpunkt mehr auf dieser befindet. Der neue String gehört dann zu dem $[ik]$ - Sektor. Diese mögliche Wechselwirkung wird als

$$[ij] * [jk] = [ik], \quad \text{über } j \text{ wird nicht summiert,} \quad (4.27)$$

geschrieben. Die Existenz von Yang-Mills-Theorien auf dem Welt-Volumen einer D -Brane-Konfiguration hat große Relevanz, weil Yang-Mills Theorien benutzt werden, um das Standardmodell der Teilchenphysik zu beschreiben. Die elektroschwache Theorie wird mit einer $U(2)$ Yang-Mills Theorie beschrieben. Diese Theorie beinhaltet die vier Eichbosonen γ , W^\pm und Z^0 . Alle diese Eichbosonen sind massive Eichbosonen, außer das Photon γ . Durch den Higgs-Mechanismus bekommen diese Eichbosonen ihre Masse. Eine mögliche D -Brane Realisierung des Higgs-Mechanismus könnte das Auseinanderziehen zweier vorher übereinstimmender D -Branen sein. Für zwei übereinstimmende $D3$ -Branen wird eine $U(2)$ Yang Mills Theorie benötigt, mit vier masselosen Eichfeldern lebend auf dem vier-dimensionalen Weltvolumen der Branen. Es zeigt sich, dass eine elegantere D -Brane Konfiguration benötigt wird, um die elektroschwache Theorie mit einzubeziehen. Im Folgenden wird diskutiert, wie das Standardmodell der Teilchenphysik mit Branen konstruiert werden kann.

5. Die Stringtheorie in der Teilchenphysik

Drei der vier fundamentalen Wechselwirkungen werden mit Hilfe des Standardmodells (SM) der Teilchenphysik einheitlich formuliert. Es werden sowohl die starke und schwache Kraft als auch die elektromagnetische Kraft im Rahmen von Quantenfeldtheorien beschrieben. Die Wechselwirkungen werden durch Symmetriegruppen erklärt. Diese Symmetriegruppen sind die der schwachen Kraft $SU(2)$, die der elektromagnetischen Kraft $U(1)$ und die der starken Kraft $SU(3)$. Zusammen bilden diese die Symmetrie $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$. Die Ausführungen stimmen aus [1], Kapitel 21.

5.1. Schneidende D -Branes

In diesem Abschnitt wird eine D -Brane-Konfiguration betrachtet, die zu sich schneidenden D -Branes führt. Diese sind ein guter Ausgangspunkt um zu einem String-Modell der Teilchenphysik zu gelangen. Wie bereits gesehen, werden Fermionen benötigt um ein sinnvolles String-Modell der Teilchenphysik zu konstruieren. Um Fermionen in eine Stringtheorie einzugliedern, wird eine zehn-dimensionale Superstringtheorie benötigt. Dabei werden sechs der zehn Raumzeitdimensionen benötigt, um einen kleinen kompakten Raum endlichen Volumens zu konstruieren. Dieser ist notwendig, um effektiv eine vierdimensionale Raumzeit zu bekommen. Dieser Raum wird derart konstruiert, so dass jede Dimension zu einem Kreis aufgerollt ist. Der resultierende Raum ist ein sechs-dimensionaler Torus T^6 . Diese Kreise haben alle den gleichen Radius und es gilt $x^i \sim x^i + 2\pi R$, für $i = 4, \dots, 9$.

Um eine effektive Yang-Mills Theorie zu konstruieren, werden D -Branen benötigt, wobei sich wenigstens drei Raumdimensionen x^1, x^2 und x^3 entlang der effektiven Raumzeit erstrecken müssen. Es müssen also Dp -Branen mit $p \geq 3$ sein. Die anderen drei Raumdimensionen liegen auf dem Torus. In diesem Abschnitt wird eine $D6$ -Brane in der Type IIA Superstringtheorie behandelt. In der Tat, ist es möglich, auch andere zu wählen.

Die Situation mit zwei sich schneidende $D6$ -Branen, a und b , bei denen jeweils drei Richtungen auf den Torus $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$ gewickelt sind, werden mit

$$D6\text{-Brane } a : \left(\ell_1^{(a)}, \ell_2^{(a)}, \ell_3^{(a)} \right) \quad \text{und} \quad D6\text{-Brane } b : \left(\ell_1^{(b)}, \ell_2^{(b)}, \ell_3^{(b)} \right). \quad (5.1)$$

bezeichnet.

Bei der $D6$ -Brane gibt es drei Richtungen, die auf dem Torus T^6 zusammengerollt sind. Die Umhüllung wird durch drei Linien (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) beschrieben. Die Linie (ℓ_j) zeigt die Richtung der D -Brane auf dem j -ten Torus T^2 . Dadurch, dass die $D6$ -Brane durch die drei orientierten Linien charakterisiert wird, wird damit auch der drei-dimensionale Unterraum der $D6$ -Brane, der auf dem Torus liegt, spezifiziert. Verallgemeinert lässt sich sagen, dass die Orientierung eines i -dimensionalen Unterraums durch eine Wahl eines geordneten Satzes von i linear unabhängigen Tangentenvektoren gegeben ist. Somit kann beispielsweise die (x, y) -Ebene durch das geordnete Paar der Tangentenvektoren $((1, 0), (0, 1))$ charakterisiert werden. Der drei-dimensionale Unterraum der $D6$ -Brane auf dem Torus T^6 , ist durch den orientierten Satz der Vektoren (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) gegeben.

Wie oft sich die D -Branen auf dem Torus schneiden, hängt von der *Schnittzahl* I_{ab} ab. Die Schnittzahl wird mit

$$I_{ab} = \prod_{i=1}^3 \#(\ell_i^{(a)}, \ell_i^{(b)}), \quad (5.2)$$

bestimmt.

5.2. D -Branen und die Standardmodell-Eichgruppe

Wie bereits gesehen, befinden sich auf dem Weltvolumen von N korrespondierenden D -Branen die Eichfelder $U(N)$. Die Dynamik dieser Felder wird bei niedrigen Energien durch Yang-Mills Theorien mit der Eichgruppe $U(N)$ generiert. Im Standardmodell der Teilchenphysik werden die Eichbosonen, die Gluonen, die W^\pm Bosonen, das Z Boson und das Photon, durch Yang-Mills Theorien beschrieben. Die Gluonen sind die Eichbosonen, die die starke Kraft übertragen. Diese werden durch eine vier-dimensionale $SU(3)$ Yang-Mills Theorie beschrieben. Diese Theorie ist eng verwandt mit der $U(3)$ Yang-Mills Theorie, die bei niedrigen Energien auf dem Weltvolumen dreier korrespondierender $D3$ -Branen entsteht. Die Konfiguration der Branen für $U(3)$ wird in Abbildung 5.1 gezeigt. Es existieren dabei neun verschiedene Sektoren offener Strings, gekennzeichnet durch $[ij]$ mit $i, j = 1, 2, 3$. Der erste Index zeigt dabei, an welcher Brane der String beginnt und der zweite, an welcher Brane der String endet. Die Abbildung zeigt jeweils einen String von jedem Sektor. Jeder Sektor enthält einen String-Zustand, der ein Eichfeld repräsentiert.

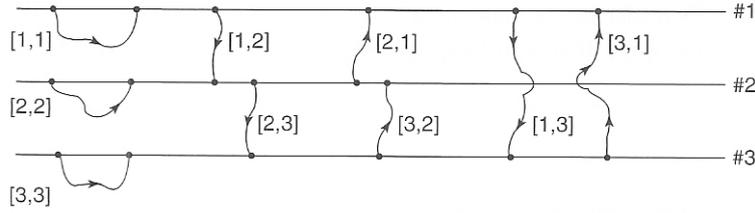


Abbildung 5.1: Drei D -Branen, die zur Entstehung des Eichbosons der $U(3)$ beitragen (Abb. aus [1]).

Die drei D -Branen tragen jeweils ein Maxwell-Feld. Diese Maxwell-Felder $A_{(i)\mu}$, mit $i = 1, 2, 3$, sind verbunden mit den Zuständen $\alpha_{-1} |[ii]\rangle$, die einen offenen String repräsentieren, der an einer D -Brane beginnt und an einer anderen endet. Mit Hilfe dieser Eichfelder wird eine Klasse von Zuständen der Form

$$\sum_{i=1}^3 A_{(i)} \alpha_{-1} |[ii]\rangle, \quad (5.3)$$

konstruiert. Die Maxwell-Felder $A_{(i)}$ wechselwirken nicht miteinander, denn die Beziehung (4.27) verbietet es, da die Endpunkte von verschiedenen Strings niemals auf der selben Brane enden. Außerdem wechselwirken sie auch nicht mit sich selbst, denn Maxwell-Felder sind freie Felder. Jedes Maxwell-Feld $A_{(i)}$ wechselwirkt jedoch mit jedem Zustand, der ihre Ladung trägt. Jeder String wird durch einen Wert q_1, q_2 und q_3 der Ladung bezüglich der Maxwell-Felder $A_{(1)}, A_{(2)}$ und $A_{(3)}$ charakterisiert. Die Ladungen der Zustände werden mit (q_1, q_2, q_3) bezeichnet. In dieser Konvention trägt ein orientierter offener String eine Einheit negativer Ladung an seinem Endpunkt $\sigma = 0$ und eine Einheit positiver Ladung an seinem

Endpunkt $\sigma = \pi$. Beispielsweise hat ein String in dem [12]-Sektor die Ladungen $(-1, 1, 0)$. Hierbei ist $q_1 = -1$, da der String auf der ersten Brane beginnt. Es ist $q_2 = 1$, weil der String auf der zweiten Brane endet und $q_3 = 0$, weil keiner der Endpunkte auf der dritten Brane endet. Die Summe aller drei Ladungen ist Null. Insbesondere sind für einen String, beginnend und endend auf der gleichen Brane, alle drei Ladungen Null. In der gewählten Branen-Konfiguration können die neun Eichfelder in zwei Sätze, nicht-miteinander wechselwirkender Felder, aufgeteilt werden. Das eine Eichfeld ist das Maxwell-Feld $A_{(3)}$ des Zustandes

$$|s_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (\alpha_{-1} |[11]\rangle + \alpha_{-1} |[22]\rangle + \alpha_{-1} |[33]\rangle). \quad (5.4)$$

Da Maxwell-Felder nur mit geladenen Objekten wechselwirken, trägt keines der Felder die Ladung des $\bar{A}^{(3)}$ Eichfeldes.

Wie bereits erwähnt, ist die Theorie der Maxwell-Eichfelder eine $U(1)$ Yang-Mills-Theorie. Die $U(3)$ Yang-Mills Theorie von neun wechselwirkenden Eichfeldern auf drei übereinstimmenden D -Branen ist eine entkoppelte $U(1)$ Theorie. Die restlichen acht Eichfelder definieren die $SU(3)$ Eichtheorie. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen der Gruppe $U(3)$ und den Gruppen $SU(3)$ und $U(1)$

$$U(3) = SU(3) \times U(1). \quad (5.5)$$

Der vollständige Satz von den Bosonen im Standardmodell wird durch die Yang-Mills Theorie mit der Eichgruppe

$$SU(3)_c \times SU(2)_w \times U(1)_Y, \quad (5.6)$$

beschrieben. Hierbei steht c^{21} für die Farbe, w^{22} steht für die schwache Wechselwirkung und Y für die Hyperladung. Die $SU(2)_w \times U(1)_Y$ beschreibt die elektroschwache Yang-Mills Theorie mit drei Eichbosonen. Um die Eichgruppe $SU(2)$ mit D -Branen konstruieren zu können, werden zwei übereinstimmende D -Branen benötigt, die nicht mit den drei Branen der $SU(3)$ gleich sind. Falls die zwei Brannen-Sätze aufgeteilt sind, würde sich für die Eichgruppe

$$U(3) \times U(2) = SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1), \quad (5.7)$$

ergeben. Die $U(1)$'s können jedoch nicht zur Konstruktion der $U(1)_Y$ genutzt werden.

5.3. Offene Strings und die Fermionen des Standardmodells

Bisher wurden lediglich die Bosonen des Standardmodells untersucht. Außerdem wurden D -Brane-Konfigurationen untersucht, die benötigt werden, um Bosonen zu erhalten. Für eine konsistente Stringtheorie, die auch die Materieteilchen erklärt, werden Fermionen benötigt. Es müssen also zwei weitere übereinstimmende D -Branen eingeführt werden.

Dazu beschreiben f ein Fermion und \bar{f} sein Antiteilchen. In dieser Notation korrespondieren das Elektron e^- und das Positron e^+ zu f und \bar{f} . Nach der Quantenfeldtheorie gibt es sowohl Vernichtungs-

²¹engl.:color

²²engl.:weak

als auch Erzeugungsoperatoren, beide für links- und rechtshändige Teilchen und Antiteilchen. Für die Erzeugungsoperatoren schreibt man

$$\left(f_L^\dagger, f_R^\dagger\right), \left(\bar{f}_L^\dagger, \bar{f}_R^\dagger\right), \quad (5.8)$$

wobei L für Linkshändigkeit und R für Rechtshändigkeit steht. Der Operator f_L^\dagger erzeugt somit ein links-händiges Teilchen, falls dieser auf das Vakuum wirkt.

Nach der Quantenfeldtheorie gilt, dass bei der Festlegung der Ladung von links-händigen Teilchen die Ladung der rechts-händigen Antiteilchen automatisch bestimmt ist. Sind die Ladungen spezifiziert mit der elektrischen Ladung für einen Satz von nicht miteinander wechselwirkender Maxwell-Felder, so ist die entgegengesetzte Ladung die Ladung mit einem entgegengesetzten Vorzeichen. Um diese Beziehung darzustellen, schreibt man

$$\begin{aligned} f_L^\dagger &\leftarrow \text{entgegengesetzte Ladung} \rightarrow \bar{f}_R^\dagger, \\ f_R^\dagger &\leftarrow \text{entgegengesetzte Ladung} \rightarrow \bar{f}_L^\dagger. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die Chiralität der Fermionen ist eine wesentliche Eigenschaft des Standardmodells. Eine Chiralität der Fermionen liegt vor falls f_L^\dagger und f_R^\dagger , also die links- und rechts-händigen Zustände, nicht die gleiche Ladung haben.

Ladungen beschreiben, wie Teilchen auf Eichbosonen reagieren, d.h., dass links- und rechtshändige Teilchen unterschiedlich auf das selbe Eichbosonen reagieren können. Das Gleiche gilt für die links-bzw. rechts-händigen Antiteilchen. Tatsächlich sind alle Fermionen in dem Standardmodell chiral. Die Chiralitätsbedingung ist eine sehr mächtige Bedingung, denn in einer Eichtheorie mit chiralen Fermionen können die Fermionen keine Masse bekommen, solange die Eichsymmetrie ungebrochen bleibt. Im Standardmodell wirkt die elektroschwache Kraft $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ chiral. Die in dem Standardmodell aufkommenden Fermionen sind solange masselos, bis die Symmetriebrechung die Eichgruppe aus (5.6) auf $SU(3)_e \times U(1)_{em}$ herunterbricht. Da weder die Farb-Kraft, noch die Elektromagnetische Kraft chiral wirkt, erhalten die Fermionen ihre Masse. Die Massenskala wird durch die Massenparameter des Higgs-Sektors gesetzt.

Die Fermionen des Standardmodells teilen sich in drei Generationen auf. Es gibt eine Hierarchie der Masse, die besagt, dass die erste Generation die leichtesten Fermionen und die dritte Generation die schwersten Fermionen beschreiben. In jeder Generation gibt es Quarks und Leptonen. Quarks unterliegen sowohl der starken als auch der elektroschwachen Wechselwirkung, während Leptonen nur der elektroschwachen Wechselwirkung unterliegen.

Die Quarks unterliegen der $SU(3)$ -Farbkraft, da die Quarks die Ladung Farbe tragen. Die Farb-Ladung kommt in den Farben *rot*(r), *blau*(b) und *grün*(g) vor. Die links-händigen Zustände q_L eines Quarks gibt es in drei Typen

$$q_{Lr}, q_{Lb} \quad \text{und} \quad q_{Lg}. \quad (5.10)$$

Die Zusammenfassung dieser drei Zustände wird als die Darstellung $\mathbf{3}$ der Gruppe $SU(3)$ beschrieben. Man schreibt $q_L \sim \mathbf{3}$. Da die Farb-Kraft nicht chiral wirkt, tragen die Antiquarks \bar{q}_L die gegenteilige

Farb-Ladung. Diese werden mit *anti-rot*($a-r$), *anti-blau*($a-b$) und *anti-grün*($a-g$) bezeichnet. Dies wird als

$$\bar{q}_{La-r}, \quad \bar{q}_{La-b} \quad \text{und} \quad \bar{q}_{La-g}, \quad (5.11)$$

geschrieben. Man schreibt $\bar{q}_L \sim \bar{\mathbf{3}}$. In der Gruppentheorie werden $\mathbf{3}$ und $\bar{\mathbf{3}}$ als zueinander konjugierte Darstellungen bezeichnet.

Die Diskussion über Quarks und die $SU(3)$ -Eichgruppe kann über D -Branen und offene Strings intuitiv dargestellt werden, denn offene Strings repräsentieren die Quarks. In vorherigen Abschnitten ist herausgekommen, dass die $SU(3)_c$ -Eichgruppe durch drei übereinstimmende D -Branen repräsentiert werden kann. Die drei Branen werden mit den Farben *rot*, *blau* und *grün* bezeichnet, d.h. dass die Branen die Farben tragen. Die Quarks sind offene Strings, die einen Endpunkt auf einer dieser drei Branen haben. Im Gegensatz dazu haben die Gluonen beide Endpunkte auf der Brane. Ein offener String, der auf einer Brane der Farbe rot endet, repräsentiert ein links-händiges rotes Quark. Das korrespondierende Antiteilchen, ein links-händiges Antiquark, beginnt hingegen auf der roten Brane. Diese Strings werden in Abbildung 5.2 dargestellt. Diese drei $SU(3)_c$ -Branen werden als die *Farb-Branen* oder auch als die *baryonischen Branen* bezeichnet. Baryonisch daher, weil ein Baryon ein Teilchen ist, dass aus drei Quarks aufgebaut ist.

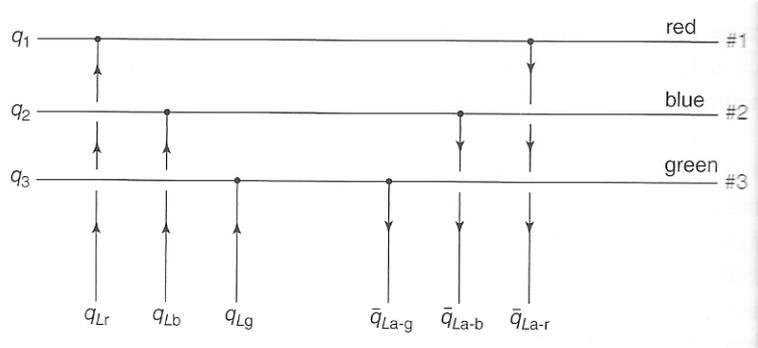


Abbildung 5.2: Die links-händigen roten, blauen und grünen Quarks sind offene Strings, die auf einer Farb-Brane enden. Die links-händigen anti-roten, anti-blauen und anti-grünen Antiquarks sind offene Strings, die auf einer Farb-Brane beginnen (Abb. aus [1]).

Es ist weiterhin möglich, die $SU(3)$ -Ladungen ähnlich zu ihren Maxwell-Zuständen zu bilden. Die drei Ladungen (q_1, q_2, q_3) in Bezug auf die Maxwell-Felder sind auf den Branen. Diese Ladungen definieren die $U(3)$ Ladungen des Zustands. Die Ladung der entkoppelten $U(1)$ ist proportional zu $(q_1 + q_2 + q_3)$. Dazu wird üblicherweise das Paar (a_1, a_2) über

$$(a_1, a_2) \equiv (q_1 - q_2, q_2 - q_3), \quad (5.12)$$

definiert. Die drei links-händigen Quarks aus (5.10), die die Repräsentation $\mathbf{3}$ der $SU(3)$ sind, werden charakterisiert durch

$$\mathbf{3}: \quad q_{Lr} = (1, 0), \quad q_{Lb} = (-1, 1), \quad q_{Lg} = (0, -1). \quad (5.13)$$

Die drei links-händigen Antiquarks aus (5.11) werden dann charakterisiert durch

$$\bar{\mathbf{3}}: \quad \bar{q}_{Lr} = (-1, 0), \quad \bar{q}_{Lb} = (1, -1), \quad \bar{q}_{Lg} = (0, 1). \quad (5.14)$$

Das Paar (a_1, a_2) wird als der *Gewichts-Vektor* bezeichnet. Die Einträge a_1 und a_2 sind die *Dynkin-Einträge* des Gewichts-Vektors. Die Repräsentationen aus (5.13) und (5.14) haben drei Gewichts-Vektoren. Wie erwähnt, werden die Quarks durch offene Strings repräsentiert, dessen Endpunkt auf einer der Farb-Brane liegt. Es ist bisher noch nicht geklärt, wo der andere Endpunkt liegt. Für links-händige Quarks genügt es die $SU(2)_w$ -Ladungen anzusehen. Die Quark-Zustände werden mit der $SU(3)$ Darstellung assoziiert. Man spricht in diesem Zusammenhang von der *Isospin-Darstellung* der Quarks. Für die Isospin-Darstellung $I = \frac{1}{2}$ existieren die Zustände $I_3 = -\frac{1}{2}$ und $I_3 = \frac{1}{2}$, wobei hier I_3 die dritte Komponente des Isopins beschreibt. Für eine bestimmte Farbe ist der Zustand des links-händigen u -Quark $I_3 = \frac{1}{2}$ und das gleichfarbige links-händige d -Quark mit dem Zustand $I_3 = -\frac{1}{2}$. Die Quarks u_L und d_L bilden das $SU(2)_w$ -Dublett. Dies wird mit der **2**-Darstellung der Gruppe $SU(2)$ bezeichnet. Da Quarks in drei Farben vorkommen, existieren drei $SU(3)$ -Dubletts.

Die Gruppe $U(2)$ kann durch $U(2) = SU(2)_w \times U(1)$ gebildet werden, die zwei übereinstimmende D -Branen beinhalten. Die links-händigen u -Quarks sind Strings, die auf einer dieser D -Branen beginnen und auf einer der Farb-Branen enden. Das links-händige d -Quark wird durch einen String gebildet, der auf der anderen D -Brane beginnt und auf einer Farb-Brane endet. Diese beiden Branen werden als die *Links-Branen* bezeichnet. Links-händige Quarks sind also offene Strings die auf einer Links-Brane beginnen und auf einer Farb-Brane enden.

Die Links-Branen tragen die Ladungen \bar{q}_1 und \bar{q}_2 für die Brane eins bzw. die Brane zwei. Es gilt $\bar{q}_i = +1$ für einen String, der auf der Brane i endet und $\bar{q}_i = -1$ für Strings, die auf der Brane i beginnen. Diese Ladungen definieren die $U(2)$ -Ladung eines Zustands. Die Ladung des entkoppelten $U(1)$ ist proportional zu $(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$. Der Dynkin-Eintrag a_1 wird mit

$$a_1 \equiv \bar{q}_1 - \bar{q}_2, \quad (5.15)$$

bezeichnet. Ein String, der auf Brane eins beginnt hat die Ladungen $(-1, 0)$, sodass sich $a_1 = -1$ ergibt. Da dies einem u -Quark entspricht, für den $I_3 = \frac{1}{2}$ gilt, besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der dritten Komponente des Isopins und des Dynkin-Eintrags a_1

$$I_3 = -\frac{a_1}{2}. \quad (5.16)$$

Für ein d -Quark gilt entsprechend

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad I_3 = -\frac{1}{2}. \quad (5.17)$$

Um die erste Quark-Generation beschreiben zu können, werden also drei übereinstimmende Farb-Branen und zwei übereinstimmende Links-Branen benötigt. Die Quark-Zustände, die sich durch Strings ergaben, die sich von einer Branen-Gruppe zu einer anderen Branen-Gruppe erstreckten, zeigen nicht die Quarks des Standardmodells, denn diese müssen chiral sein. Wenn die Branen jedoch von einander getrennt werden, aber weiterhin parallel zueinander sind, werden die gestreckten Strings massiv, und die Quarks erhalten Masse. Daher können sie nicht chiral sein.

Es lässt sich jedoch eine physikalisch sinnvolle Situation konstruieren, in dem die übereinstimmenden Farb-Branen die übereinstimmenden Links-Branen schneiden. Falls sich die D -Branen schneiden, wird das Fermionen-Feld durch Strings repräsentiert, die sich nah dem Schnittpunkt von der einen Brane zu der anderen erstrecken. Einige Zustände, die bei einem Schnittwinkel von Null masselos sind, werden dann massiv. Unter Umständen werden dann in der Nähe der Schnittpunkte die Zustände von (5.9) reproduziert. Abbildung 5.3 zeigt, dass sechs Schnittpunkte nötig sind, um die drei up -Quarks und die drei $down$ -Quarks zu bilden. Die jeweils drei Quarks werden durch sich, zwischen Branen erstreckenden, Strings geformt. Antiquarks werden gebildet, indem die Orientierung der Strings umgekehrt wird. Wie das Standardmodell verlangt sind diese rechts-händig.

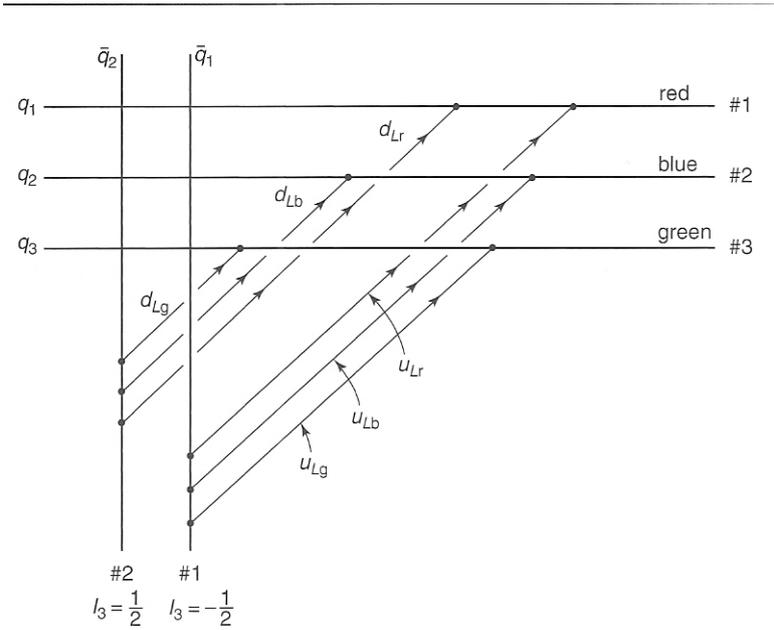


Abbildung 5.3: Die links-händigen Quarks sind Strings, die sich von der Links-Brane zu einer baryonischen Brane strecken. Die drei links-händigen u -Quarks sind offene Strings, die auf der ersten Links-Brane beginnen und auf einer baryonischen Brane enden. Die drei links-händigen d -Quarks sind offene Strings, die auf der zweiten Links-Brane beginnen und auf einer baryonischen Brane enden (Abb. aus [1]).

Im Standardmodell werden die Informationen über die Darstellungen und der Ladungen eines Teilchens mit

$$(\text{Farbe, Isospin})_Y \quad (5.18)$$

zusammengefasst, wobei Y die Hyperladung ist. Für alle drei u_L - und alle drei d_L -Quarks ist $Y = \frac{1}{6}$. In dieser Darstellung können die sechs Zustände der Quarks geschrieben werden als

$$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} \cdot \quad (5.19)$$

Die Zahlen in der Klammer, die die Darstellungen bezeichnen, sind gleich der Anzahl der Zustände in der

jeweiligen Darstellung. Das Produkt dieser zwei Zahlen ergibt die Gesamtzahl der Zustände $3 \times 2 = 6$. Hyperladung bekommt man durch Beiträge der entkoppelten $U(1)$ -Ladungen der baryonischen Zustände und der entkoppelten $U(1)$ -Ladungen der Links-Branen. Die Farb-Branen tragen die Hyperladung $Y = -\frac{1}{3}$, die Links-Branen tragen die Hyperladung $Y = -\frac{1}{2}$. Die $U(1)$ -Ladungen Q_1 und Q_2 , die mit den Farb-bzw. Links-Branen verbunden sind, sind gegeben durch

$$Q_1 = q_1 + q_2 + q_3, \quad Q_2 = \bar{q}_1 + \bar{q}_2. \quad (5.20)$$

Jeder String, der auf einer baryonischen Brane beginnt und endet, oder der auf einer Links-Brane beginnt und endet hat $Q_1 = Q_2 = 0$. Andererseits wird ein links-händiges Quark durch einen String repräsentiert, der auf einer Links-Brane beginnt und auf einer Farb-Brane endet. Solche Strings haben $Q_1 = 1$ und $Q_2 = -1$. Die Hyperladung links-händiger Quarks erhält man durch

$$Y = -\frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{2}Q_2 - \dots, \quad (5.21)$$

wobei die Punkte für zusätzliche Beiträge zusätzlicher Branen stehen. Da die links-händigen Quarks keine Endpunkte auf diesen zusätzlichen Branen haben, ist

$$Y = -\frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{1}{6}. \quad (5.22)$$

Die links-händigen Antiquarks \bar{u}_L und \bar{d}_L erhält man nicht aus der Umorientierung der bisher besprochenen Quarks. An dieser Stelle ist die Chiralität der elektroschwachen Wechselwirkung wichtig. Denn würde die elektroschwache Kraft nicht-chiral wirken, so würden diese Antiquarks ein Doublett mit den zu den links-händigen u und d Quarks entgegengesetzten Ladungen bilden. Diese würden wahrgenommen als Strings, die auf der Links-Brane enden würden. Es zeigt sich, dass die links-händigen Antiquarks \bar{u}_L und \bar{d}_L jeweils $SU(2)$ -Singulett mit der Darstellung $\mathbf{1}$ bilden. Die zugehörigen Strings haben ihre beginnenden Endpunkte auf den Farb-Branen und enden jeweils auf einer zusätzlichen D -Brane mit der Ladung Q_3 . Zusammenfassend sind die Darstellungen der ersten Generation links-händige Quarks

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} \quad \text{und} \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}. \quad (5.23)$$

Dies ist der Satz aus links-händigen Quark- und Antiquark-Zuständen in der ersten Generation. Diese Generation beinhaltet auch die zugehörigen rechts-händigen Zustände.

Als nächstes werden die links-händigen Leptonen der ersten Generation beschrieben. Diese beinhalten das links-händige Elektron-Neutrino und das links-händige Elektron zusammen mit dem links-händigen Antineutrino und dem links-händigen Positron. Da die Leptonen nicht an der starken Wechselwirkung teilnehmen, tragen diese keine Farb-Ladung. Deren $SU(3)$ -Darstellung ist $\mathbf{1}$. Das Elektron und sein Neutrino bilden ein $SU(2)$ -Dublett mit der Hyperladung $Y = -\frac{1}{2}$. Das Positron und das Antineutrino bilden hingegen ein $SU(2)$ -Singulett mit den Hyperladungen $Y = 1$ und $Y = 0$. Die Leptonen werden zusammengefasst mit

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \text{und} \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0. \quad (5.24)$$

Die links-händigen Antineutrinos sind Farb-, schwache- und Hyperladungs-Singulets. Diese Zustände wurden bisher nicht detektiert. Die Zustände aus (5.23) und (5.24) in Kombination mit den zugehörigen rechts-händigen Zuständen umfassen die Materiezustände der ersten Familie des Standardmodells.

Offene Strings, die Leptonen repräsentieren, können nicht auf den Farb-Branen enden. Das links-händige Neutrino und das links-händige Elektron entstehen durch Strings, die einen Endpunkt auf einer Links-Brane und den anderen Endpunkt auf einer anderen, zusätzlichen Brane haben. Weder das links-händige Positron noch das links-händige Antineutrino haben einen Endpunkt auf einer Farb-Brane oder auf einer Links-Brane.

Im Standardmodell kommt die elektrische Ladung Q_{em} durch eine Linearkombination aus der Hyperladung Y und der dritten Komponente I_3 des Isospins

$$Q_{em} = Y + I_3, \quad (5.25)$$

vor. Die Ladungen der zwei Quarks der ersten Generation sind gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_{em}(u_L) &= Y(u_L) + I_3(u_L) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = +\frac{2}{3}, \\ Q_{em}(d_L) &= Y(d_L) + I_3(d_L) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Dieses sind in der Tat die korrekten Werte. Das Proton besteht aus zwei up -Quarks und einem $down$ -Quark. Deren elektrische Ladung ist $2 \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$.

Für die links-händigen Antiteilchen bekommt man

$$\begin{aligned} Q_{em}(\bar{u}_L) &= Y(\bar{u}_L) + I_3(\bar{u}_L) = -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}, \\ Q_{em}(\bar{d}_L) &= Y(\bar{d}_L) + I_3(\bar{d}_L) = -\frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Der vollständige Satz von links-händigen Teilchen im Standardmodell ist demnach gegeben durch

$$3 \times [(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0]. \quad (5.28)$$

Es zeigt sich also, dass die elektromagnetische Wechselwirkung nicht chiral wirkt., denn die Ladungen der links-händigen Teilchen und deren Antiteilchen sind entgegengesetzt.

5.4. Das Standardmodell auf sich schneidenden $D6$ -Branen

In diesem Abschnitt wird ein vollständiges String-Modell der Elementarteilchen hergeleitet. Dieses Modell beinhaltet sich schneidende $D6$ -Branen, die auf einen T^6 Torus gewickelt sind. Dieses Modell wird im Rahmen der Type IIA-Superstringtheorie behandelt. Das Modell beinhaltet alle masselosen Zustände des Standardmodells, vor der Symmetriebrechung.

Die wichtigste Eigenschaft des Standardmodells ist, dass es seinen Materieinhalt reproduziert, denn es gibt drei Generationen, die fermionische Materiezustände mit gleichen Ladungen enthalten. Diese kann unter der Annahme sich mehrfach schneidenden D -Branen erklärt werden. Bislang wurden die links-händigen u und d Quarks an den Schnittpunkten der übereinstimmenden baryonischen Branen mit den übereinstimmenden Links-Branen gefunden. Falls sich die Branen-Sätze derart um den T^6 Torus wickeln, so dass sich die Branen dreimal schneiden, dann bekommt man an den zweiten Schnittpunkten die links-händigen c und s Quarks. Der dritte Schnittpunkt liefert die links-händigen t und b Quarks. Wie oft sich zwei $D6$ -Branen schneiden ist durch (5.2) gegeben. Das Vorzeichen von I_{ab} bezieht sich auf die Orientierung der Strings. Die Anzahl der Zustände an den Schnittpunkten²³ wird über den Betrag von I_{ab} bestimmt. Die Orientierung der Strings korreliert mit dem Vorzeichen von I_{ab} . Falls $I_{ab} > 0$ sind die links-händigen Zustände Strings, die sich von der Brane b nach Brane a erstrecken. Falls $I_{ab} < 0$ gilt, sind die links-händigen Zustände Strings, die sich von der Brane a nach der Brane b erstrecken. Dabei entscheidet die Orientierung der Strings über die Ladung der links-händigen Zustände. Im Sinne der Bedingungen (5.9), sind die Zustände an den Schnittpunkten chiral. Nach der Bedingung (5.9) werden durch die entgegengesetzten Strings an den Schnittpunkten die entgegengesetzt geladenen Antiteilchen charakterisiert.

Die drei baryonischen Branen werden mit $N_1 = 3$ bezeichnet und $N_2 = 2$ bezeichnet die zwei Links-Branen. Weiterhin sollen die drei Generationen der links-händigen Antiquarks bestimmt werden. Der offene String, der diese Quarks repräsentiert, beginnt auf einer baryonischen Brane, kann jedoch nicht auf einer Links-Brane enden, da diese $SU(2)$ -Singulett-Zustände sind. Es wird also eine neue D -Brane benötigt, die mit $N_3 = 1$ bezeichnet wird. $N_3 = 1$ ist die Brane, auf der das \bar{u}_L Quark endet. Auf der Brane $N_4 = 1$ endet das \bar{d}_L Quark. Diese Branen werden Rechts-Branen genannt, denn die rechts-händigen Quarks leben auf diesen Branen.

²³vgl. Schnittpunkte im Anhang.

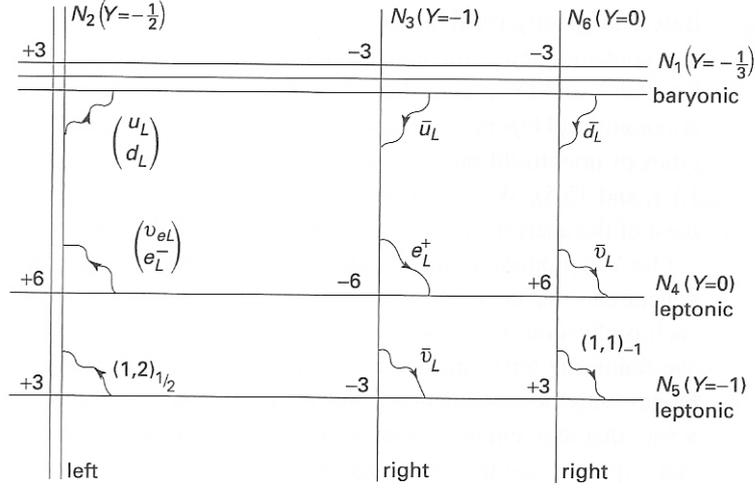


Abbildung 5.4: Branenkonfiguration aus $N_1 = 3$ baryonischen Branen, $N_2 = 2$ Links-Branen, $N_3 = N_6 = 1$ Rechts-Branen und $N_5 = N_4 = 1$ leptonsichen Branen. Die Y -Werte geben die Beiträge zur Hyperladung der Strings an, die auf der Brane enden. An den Schnittstellen wird die Anzahl der Schnittstellen mit I_{ab} mit $a < b$ angegeben (Abb. aus[1]).

Für die Leptonen wird auch eine zusätzliche Brane benötigt. Diese sei $N_5 = 1$. Das Dublett, das aus dem Elektron und dem Elektron-Neutrino besteht, wird durch den Schnitt der leptonischen Brane mit den Links-Brane charakterisiert. Schneidet die leptonische Brane die Rechts-Brane N_3 , dann wird das links-händige Positron produziert. Das links-händige Antineutrino ergibt sich aus einem weiteren Schnitt der leptonischen Brane mit der Rechts-Brane N_4 . Zusammen ergeben sich also fünf sich schneidende $D6$ -Branen. Bislang wurden mehr Leptonen gefunden, als wirklich benötigt werden. Dies ist aber in einer Theorie mit nur $D6$ -Branen unvermeidbar. Aufgrund der Regel, dass *ein Satz links-händiger Zustände, die auf einer der Branen-Sätze enden auch die gleiche Anzahl an ankommenden Strings* haben müssen, ist es zulässig eine weitere leptonische Brane hinzuzufügen.

Da sich die baryonischen Branen dreimal mit den Links-branen schneiden, erhält man sechs Zustände, die jeweils in drei Farben vorkommen, also insgesamt achtzehn Zustände. Schneiden sich die Links-Brane N_2 und die leptonische Brane N_5 , so liefert dieser Schnittpunkt zwei Zustände, die jedoch sechsmal vorkommen. Insgesamt gibt es also auf den Links-Branen achtzehn ausgehende und zwölf ankommende Zustände. Allerdings fehlen sechs Zustände, die auf N_2 enden. Auf einer zusätzlichen Brane, die N_6 Brane, können diese Zustände beginnen. Durch das Hinzufügen einer neuen Brane werden neue Teilchen produziert. Dies sind insgesamt zwölf.

Links-händige Antineutrinos ergeben sich durch den Schnitt der N_4 Brane mit der N_5 Brane. Dadurch, dass das Antiteilchen rechts-händig ist, sagt die Stringtheorie also rechts-händige Neutrinos voraus.

5.5. Verschiedenen Möglichkeiten zum Standardmodell

In diesem Abschnitt werde ich kurz andere Möglichkeiten erläutern, die es ermöglichen das Standardmodell zu konstruieren.

In dieser Arbeit wurde vor allem das Modell der sich schneidenden Branen erläutert. Es gibt jedoch verschiedenen Ausgangspunkte um das Standardmodell zu konstruieren. Diese Ausgangspunkte sind die fünf Superstringtheorien und die M-Theorie. Jede dieser Theorien kann benutzt werden, um zu untersuchen, wie sich das Standardmodell ergibt. Das Modell der sich schneidenden Branen benutzt die Type IIA-Superstringtheorie als Anfangspunkt. Da die verschiedenen supersymmetrischen Stringtheorien und die M-Theorie verschiedene Grenzbereiche einer einzigen Theorie sind, sind die verschiedenen Ansätze miteinander verwandt. Die ersten Versuche eine Stringtheorie zu konstruieren basieren auf der heterotischen $E_8 \times E_8$ Superstringtheorie. In dieser heterotischen Theorie sind sechs der neun Raumdimensionen zu einem kleinen sechs-dimensionalen kompakten Raum, der als *Calabi-Yau-Raum* bekannt ist, zusammengerollt. Die dadurch entstehende vier-dimensionale Theorie wird als $N = 1$ -Supersymmetrie bezeichnet. Falls es Supersymmetrie gibt, findet man auch chirale Fermionen. Durch die Kompaktifizierung der Raumdimensionen wird die $E_8 \times E_8$ Eichsymmetrie auf $E_6 \times E_8$ heruntergebrochen. Die Gruppe E_6 enthält $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ als eine Untergruppe, so dass die Eichgruppe des Standard-Modells durch weitere Symmetriebrechungen erhalten werden kann.

Die weitesten untersuchten Theorien sind die Type II und die Type I Superstringtheorien. Dabei stellt sich eine Klasse von Modellen als besonders nützlich heraus, die der sich schneidenden Branen, die auch in dieser Arbeit behandelt wurden. Wichtige Modelle sind diejenige, die auf der *M-Theorie* basieren. Modelle sich schneidender $D6$ -Branen sind eng verwandt mit der M-Theorie. Die M-Theorie ist eine Theorie, die elf Dimensionen verlangt. Realistische physikalische Modelle erfordern Kompaktifizierungen auf einer sieben-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Um eine vier-dimensionale Theorie mit $N = 1$ -Supersymmetrie zu erhalten, ist es nötig, dass die sieben-dimensionale Mannigfaltigkeit eine G_2 -Holonomie enthält. G_2 -Holonomie ist eine geometrische Einschränkung der Raumkrümmung.

Chirale Fermionen und eine vernünftige Eich-Gruppe entstehen, falls der sieben-dimensionale Raum *Singularitäten* enthält.

6. Zusammenfassung

Zu Beginn dieser Arbeit wurden die Grundlagen der bosonischen Stringtheorie gelegt. Dabei wurden zunächst nicht-relativistische Strings mit bestimmten Randbedingungen und deren Bewegungsgleichungen behandelt. Weiterhin wurde die Nambu-Goto-Wirkung eingeführt, die zu den Bewegungsgleichungen relativistischer Strings führte. Verschiedene Typen der Eichung lieferten dann Vereinfachungen der Bewegungsgleichungen. Daraus ergaben sich dann verschiedenen Schwingungsmuster der Strings. Die Quantisierung offener Strings lieferte dann ein Spektrum von Zuständen, die als Photonen identifiziert werden konnten. Es zeigten sich auch eine Instabilität in der Theorie, durch negative Massenquadrate gelang man zum Tachyonen-Feld. Die Quantisierung geschlossener Strings lieferte Spin-2-Zustände, die als Graviton-Zustände identifiziert werden konnten. Es zeigte sich, dass die bosonische Stringtheorie nur in 26 Dimensionen Sinn macht. Durch die im zweiten Kapitel eingeführte Superstringtheorie, konnten die Raumdimensionen auf 10 beschränkt werden. Die Zustände, die bereits in der bosonischen Stringtheorie gefunden wurden, konnten hier erneut verifiziert werden.

Im dritte Kapitel wurden D -Branen und Eichfelder eingeführt. Dabei wurden zunächst Strings auf Dp -Branen und auch zwischen parallelen Dp -Branen quantisiert. Daraus ergab sich dann eine zentrale Aussage, dass D -Branen Maxwellfelder tragen können. Außerdem wurde gezeigt, dass D -Branen in verschiedenen Konfigurationen vorkommen. Das vierte Kapitel behandelte, wie sich das Standardmodell der Teilchenphysik durch eine Konfiguration, von sich schneidender D -Branen, ergibt. Das sich ergebende Modell hatte eine Schwäche, denn es enthielt zu viele Teilchen. Diese Schwäche wurde jedoch ausgemerzt durch die Einführung der sogenannten Orientifolds. Damit war es also möglich die genaue Anzahl der Teilchen für das Standardmodell anzugeben.

6.1. Perspektiven

Bisher ist es nicht gelungen ein vollständig konsistentes Modell der Teilchenphysik aus Stringtheorien abzuleiten. Dies ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeit. Es existieren zwar Stringmodelle auf D -Branen, dessen offene Strings den Teilcheninhalt des Standardmodells wiedergeben, eine abschließende Theorie bleibt bisher jedoch aus. Der zukünftige Erfolg bzw. Misserfolg wird davon abhängen, inwieweit sich die bisherigen Modelle als richtig erweisen werden. Modelle sich schneidender Brane scheint nicht vollständig realistisch zu sein. Falls die Symmetriebrechung im Zusammenhang eines Stringmodells genauer gearbeitet werden sollte, wäre damit gezeigt, dass das Standardmodell sich aus einer Stringtheorie ableiten ließe. Eine solches Stringmodell würde interessante Voraussagen machen, die wiederum in neuen Experimenten untersucht werden müssten.

Es bleibt spannend.

A. Formelsammlung

Spezielle Relativitätstheorie und Lichtkegel-Koordinaten

Vierervektor

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \quad (\text{A.1})$$

Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren a^μ und b^μ ist definiert als

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = -a^0 b^0 + a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 = \eta_{\mu\nu} a^\mu b^\nu, \quad (\text{A.2})$$

mit

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

als die Metrik. Die Lichtkegel-Koordinaten x^+ und x^- sind definiert als zwei unabhängige Linearkombinationen der Zeitkoordinaten und der gewählten Raumkoordinaten, die üblicherweise durch x^1 repräsentiert wird. Die Lichtkegel-Koordinaten lautet

$$\begin{aligned} x^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \\ x^- &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Das lorentz-invariante Linienelement lautet dann

$$-ds^2 = -2dx^+ dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (\text{A.5})$$

Mit der *Lichtkegel-Metrik*

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

schreibt sich das Skalarprodukt als

$$x \cdot y = -x^- y^+ - x^+ y^- + x^2 y^2 + x^3 y^3 = \hat{\eta}_{\mu\nu} x^\mu y^\nu. \quad (\text{A.7})$$

Die *Lichtkegel-Geschwindigkeit* ist dann

$$\frac{dx^-}{dx^+} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad \text{mit } \beta = \frac{v}{c}. \quad (\text{A.8})$$

Die *Lichtkegel-Impulse* lauten

$$p^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^1) = -p_-, \quad (\text{A.9})$$

$$p^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1) = -p_+. \quad (\text{A.10})$$

Die *Lichtkegel-Energie* ist gegeben durch

$$p^- = \frac{E_{cl}}{c}. \quad (\text{A.11})$$

Quantenfeldtheorie

Die Ein-Photon Zustände sind gegeben durch

$$\sum_{I=2}^{D-1} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Die Ein-Graviton Zustände sind gegeben durch

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle, \quad \text{mit} \quad \xi_{II} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Die Lichtkegel-Eichbedingung lautet

$$x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau, \quad (\text{A.14})$$

mit

$$p^+ = \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^+ \quad \text{und} \quad p^- = \frac{1}{2p^+} ({}^I p^I + m^2). \quad (\text{A.15})$$

Der Heisenberg-Hamilton-operator wird postuliert mit

$$H(\tau) = \frac{p^+(\tau)}{m^2} p^-(\tau) = \frac{1}{2m^2} (p^I(\tau) p^I(\tau) + m^2) \quad (\text{A.16})$$

wobei die nicht-verschwindenden Kommutatorrelationen

$$[x^I, p^J] = i\eta^{IJ} \quad \text{und} \quad [x_0^-, p^+] = i\eta^{-+} = -i, \quad (\text{A.17})$$

sind. Die zeitunabhängigen Schrödinger-Operatoren sind

$$(x^I, x_0^-, p^I, p^+), \quad (\text{A.18})$$

sind und die Heisenberg-Operatoren

$$(x^I(\tau), x_0^-(\tau), p^I(\tau), p^+(\tau)). \quad (\text{A.19})$$

B. Herleitungen

Herleitung der Bewegungsgleichungen (2.17)

Aus der Variation der Wirkung (2.14) ergibt sich

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \dot{y} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta y' \right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx [\mathcal{P}^t \delta \dot{y} + \mathcal{P}^x \delta y'] \\ &= \int_0^a [\mathcal{P}^t \delta y]_{t=t_i}^{t=t_f} dx + \int_{t_i}^{t_f} dt [\mathcal{P}^x \delta y]_{x=0}^{x=a} - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left(\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} \right) \delta y.\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

Hieraus ergeben sich dann die in (2.17) genannten Bewegungsgleichungen.

Herleitung der Bewegungsgleichungen (2.35)

Durch die Variation der Wirkung (2.33) ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \delta X^{\mu'} \right] = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \\ &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right] \\ &= \int_0^{\sigma_1} d\sigma [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right)\end{aligned}\quad (\text{B.2})$$

Da die Variation der Anfangs- und Endpunkte verschwinden soll, wird der erste Term Null, denn $\delta X^\mu(\tau_j, \sigma) = 0$ und $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0$. Der zweite Term verschwindet auf Grund der Wahl der Randbedingungen. Die Bewegungsgleichung für einen sowohl offenen, als auch geschlossenen String lautet

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0.\quad (\text{B.3})$$

mit den Abkürzungen

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}},\quad (\text{B.4})$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}.\quad (\text{B.5})$$

Schnittpunkte

$$\begin{aligned}N_1 = 3, & \quad \ell_1^{(1)} = (1, 2), & \ell_2^{(1)} = (1, -1), & \ell_3^{(1)} = (1, -2); \\ N_2 = 2, & \quad \ell_1^{(2)} = (1, 1), & \ell_2^{(2)} = (1, -2), & \ell_3^{(2)} = (-1, 5); \\ N_3 = 1, & \quad \ell_1^{(3)} = (1, 1), & \ell_2^{(3)} = (1, 0), & \ell_3^{(3)} = (-1, 5); \\ N_4 = 1, & \quad \ell_1^{(4)} = (1, 1), & \ell_2^{(4)} = (3, -4), & \ell_3^{(4)} = (1, -5); \\ N_5 = 1, & \quad \ell_1^{(5)} = (1, 2), & \ell_2^{(5)} = (-1, 1), & \ell_3^{(5)} = (1, 1); \\ N_2 = 6, & \quad \ell_1^{(6)} = (1, 2), & \ell_2^{(6)} = (-1, 1), & \ell_3^{(6)} = (2, -7); \end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Die Zahlen N_j geben die Anzahl der Branen des jeweiligen Satzes an. Die Linien ℓ_j charakterisieren die Richtung auf dem jeweiligen Torus.

Die Schnitzzahlen sind dann

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= 3 & I_{13} &= -3 & I_{14} &= 0, \\
 I_{15} &= 0 & I_{16} &= -3 & I_{23} &= 0, \\
 I_{24} &= 6 & I_{25} &= 3 & I_{26} &= 0, \\
 I_{34} &= -6 & I_{35} &= -3 & I_{36} &= 0, \\
 I_{45} &= 0 & I_{46} &= 6 & I_{56} &= 3.
 \end{aligned}
 \tag{B.7}$$

Wegen $I_{ab} = -I_{ba}$ sind nur die Schnitzzahlen I_{ab} mit $a < b$ dargestellt.

Literatur

- [1] Barton Zwiebach, *First Course in Stringtheory*, 2.Auflage, 2009
- [2] Lisa Randall, *Verborgene Universen*, 1. Auflage, 2006
- [3] Brian Greene, *Das elegante Universum*, 3. Auflage, 2004
- [4] Katrin Becker; Melanie Becker und John H.Schwarz, *Stringtheory and M-Theory*, 1. Auflage, 2007

Abbildungsverzeichnis

2.1. Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen	4
2.2. Weltflächen der offener und geschlossener Strings	6
2.3. Der Parameter-Raum und der Target-Raum I	6
2.4. Parameter-Raum und Target-Raum II	8
2.5. $D2$ -Brane über (x^1, x^2)	11
2.6. Statische Eichung	12
2.7. Eichbedingung $n \cdot X = \lambda\tau$	18
4.1. Zueinander parallele $D2$ -Branen	51
4.2. Drei Branen (i, j, k)	54
5.1. Drei Branen mit Eichbosonen	56
5.2. Links-händige rote, blaue und grüne Quarks	59
5.3. Links-Branen und baryonische Branen	61
5.4. Branenkonfiguration	65
5.5. Branenkonfiguration zum SM	66

Danksagung

Hiermit möchte ich mich besonders bei meinem Betreuer Prof. Dr. York Schröder für seine hervorragende Betreuung bedanken. Er war jederzeit zu erreichen und half sofort weiter.

Außerdem möchte ich mich bei meiner Familie, insbesondere bei meinen Eltern, für ihre großartige Unterstützung bedanken.

Ein großer Dank gebührt meiner Freundin, die immer für mich da war und mir immer viel Kraft gegeben hat.