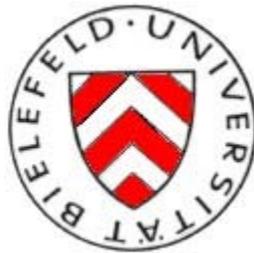


Superstringtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik

Bachelorarbeit

zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science
der Fakultät für Physik
der Universität Bielefeld



vorgelegt von

Ludmilla Lifke

Betreuer & 1. Gutachter: Prof. Dr. York Schröder

2. Gutachter: PD Dr. Markos Maniatis

September 2012

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, 6. September 2012

Inhaltsverzeichnis

| | |
|--|-----------|
| Einleitung | 2 |
| 1 Bosonische Stringtheorie | 5 |
| 1.1 Nichtrelativistische Strings..... | 5 |
| 1.2 Relativistische Strings..... | 9 |
| 1.3 Weltflächen-Ströme..... | 19 |
| 1.4 Relativistische Lichtkegel-Strings..... | 21 |
| 1.5 Offene, relativistische, quantenmechanische Strings..... | 27 |
| 1.6 Geschlossene, relativistische, quantenmechanische Strings..... | 35 |
| 1.7 Zustände offener Strings..... | 38 |
| 1.8 Zustände geschlossener Strings..... | 41 |
| 2 Superstringtheorie | 43 |
| 2.1 Weltflächen-Fermionen..... | 43 |
| 2.2 Neveu-Schwarz-Sektor..... | 46 |
| 2.3 Ramond-Sektor..... | 48 |
| 2.4 Offene Superstrings..... | 50 |
| 2.5 Theorien geschlossener Superstrings..... | 51 |
| 3 D-Branen und Eichfelder | 54 |
| 3.1 Offene Strings auf Dp-Branen..... | 54 |
| 3.2 Offene Strings zwischen parallelen D-Branen..... | 58 |
| 3.3 Sich schneidende D-Branen | 63 |
| 4 Modellierung des Standardmodells auf sich schneidenden D-Branen | 65 |
| 4.1 D-Branen und die Eichgruppe des Standardmodells..... | 65 |
| 4.2 Offene Strings und die Fermionen des Standardmodells..... | 67 |
| 4.3 Das Standardmodell auf sich schneidenden D6-Branen..... | 74 |
| 4.4 Andere String-Wege zum Standardmodell..... | 80 |
| 5 Zusammenfassung | 81 |
| Anhang A: Formelsammlung | 82 |
| Anhang B..... | 85 |
| Anhang C..... | 86 |
| Anhang D..... | 88 |
| Anhang E..... | 89 |
| Literaturverzeichnis..... | 92 |

Einleitung

Längst wurden die Atome der alten Griechen als fundamentale Bausteine der Natur abgelöst. Sie offenbarten eine Substruktur, die teilweise wiederum über eine Substruktur verfügte. Nicht nur die Materie besteht aus winzigen Komponenten, das Gleiche gilt auch für die Kräfte zwischen den Dingen. Die fundamentalen Bausteine der Natur sollen Punktteilchen sein – nulldimensionale Objekte ohne Ausdehnung, die gegebenenfalls jedoch auch als Wellen in Erscheinung treten können.

Da es bereits im 19. Jahrhundert gelang zwei zunächst voneinander unabhängig gedachte Naturerscheinungen zu vereinen, wollte man beim Elektromagnetismus nicht Halt machen – Einstein selbst verbrachte Jahrzehnte damit seine Allgemeine Relativitätstheorie mit der Quantenphysik zu vereinen. Diesen steinigen Weg sollte er nicht alleine beschreiten, auch nicht alleine daran scheitern. Andere Theorien konnten erfolgreich unter einen Hut gebracht werden – so entstand die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung. Die Quantenchromodynamik (QCD) wollte da zwar nicht mitmachen, aber in das errichtete Gebäude des Standardmodells der Teilchenphysik war dann auch die QCD bereit Einzug zu halten. Niemand wusste wie Einsteins Gravitation eingeladen werden konnte. Alle Versuche etwas Neues zu bauen scheiterten. Seit einigen Jahrzehnten gibt es einen neuen Wegweiser auf dem Pfad zu der Theorie, die Alles beschreiben könnte. Die Superstringtheorie.

Sie entstand aus der Ende der 60er Jahre entwickelten Theorie zur Beschreibung hadronischer Phänomenologie – dem *Dual Resonance Model*. Wie sich herausstellte, waren seine elementaren Bestandteile ausgedehnte Objekte – Strings genannt – was von den damaligen Teilchenbeschleunigern nicht bestätigt werden konnte; experimentelle Ergebnisse lieferten keinerlei Hinweise auf eine nicht-punktförmige Struktur innerhalb der Hadronen. So wurde Anfang der 70er Jahre die QCD zu einer besseren Beschreibung der hadronischen Natur herangezogen. Für einige war die Theorie der Strings jedoch *zu schön, um nur eine mathematische Kuriosität zu sein*¹, man gab die Arbeit daran nicht auf [2].

Die Stringtheorie beschreibt eindimensionale Objekte, die sich durch die Raumzeit entwickeln und etwa so lang wie die Planck-Länge ($\sim 10^{-34}$ m) sind. Könnten wir uns die Punktteilchen, wie Elektronen oder Quarks, genauer ansehen, dann würden wir winzige,

¹ J.H.Schwarz in [2], S.47

schwingende Fäden erblicken. Alles in unserem Universum besteht aus straff gespannten, offenen oder geschlossenen, Strings. *Alle* Materie und *alle* Wechselwirkungen bestehen prinzipiell aus demselben Material, das auf unterschiedliche Weisen schwingen kann. So finden sich unter den Zuständen des geschlossenen Strings auch masselose Spin-2 Schwingungsmuster, die als das Wechselwirkungsteilchen der Gravitation interpretiert werden können. Und die neuentdeckte *Supersymmetrie* vereint Bosonen mit den Fermionen, indem sie jedem Teilchen ein supersymmetrisches Partnerteilchen zuordnet.

Damit vereint die Stringtheorie nicht nur alle Materie mit allen Wechselwirkungen, sie erreicht auch die lang ersehnte Verbindung zwischen der Gravitation und der Quantenwelt. Der Preis dafür ist in Form von Raumdimensionen zu entrichten. Die ursprüngliche *bosonische Stringtheorie* ist in einem Universum mit 26 Dimensionen konsistent, enthält jedoch nicht die Fermionen. In der *Superstringtheorie*, mit Supersymmetrie, sind es 10 Raumzeitdimensionen. Da in unserer vierdimensionalen Welt bisher keine supersymmetrischen Teilchen beobachtet werden konnten, muss die Supersymmetrie gebrochen sein. In der zehndimensionalen Welt wird die Supersymmetrie dadurch gebrochen, dass Raumdimensionen aufgewickelt werden; das soll auch erklären warum die zusätzlichen Dimensionen nicht direkt zu beobachten sind.

Eine eingerollte Dimension gab es schon in den 20er Jahren des letzten Jahrhunderts, in der *Kaluza-Klein-Theorie*. Die zusätzliche Dimension sollte sich an jedem Punkt des dreidimensionalen Raumes befinden und stellte einen zusätzlichen Freiheitsgrad dar. In der zehndimensionalen Superstringtheorie sind es sechs Raumdimensionen, die zusammengerollt werden müssen – man spricht von *Calabi-Yau-Räumen*. Diese sechsdimensionalen Mannigfaltigkeiten können jedoch auf sehr viele unterschiedliche Weisen aufgerollt werden. *Wie* sie aufgerollt sind, soll die Eigenschaften der Teilchen in der vierdimensionalen Raumzeit maßgeblich bestimmen. Das wiederum schränkt die möglichen geometrischen Formen der eingerollten Dimensionen ein. Und trotzdem verbleiben viele zehntausende Möglichkeiten für die Calabi-Yau-Räume. *Welche* Möglichkeit genau die zusätzlichen Raumdimensionen der Stringtheorie, die unsere Welt beschreibt, repräsentiert, hat bisher niemand herausgefunden [4].

Neben Strings und zusätzlichen Dimensionen enthält die Stringtheorie D-Branen unterschiedlicher Dimensionalitäten, auf denen die Enden offener Strings enden können. Die

D-Branen selbst sind dynamische, massive Objekte und maßgeblich an der Gestaltung der Realität beteiligt.

Es gibt auch nicht nur *eine* bekannte Stringtheorie, sondern *fünf*. Fünf Superstringtheorien, die alle ein Teil der elfdimensionalen *M-Theorie* sein sollen. Die Theorien enthalten unterschiedlich geartete Strings – so sind in der Typ I Theorie offene und geschlossene Strings enthalten, in den Typ IIA und Typ IIB nur geschlossene Strings und in den beiden heterotischen Theorien ebenfalls nur geschlossene Strings. Untersucht man die Wechselwirkungen zwischen den Strings in einer der Theorien und variiert die Wechselwirkung in eine bestimmte Richtung, so ist es möglich in einer der anderen Superstringtheorien zu landen; die fünf Versionen der Superstringtheorie beschreiben also unterschiedliche Grenzbereiche einer einzelnen Theorie – der M-Theorie. Man nennt es *S-Dualität (strong-weak-duality)*. Der starke Wechselwirkungsbereich der einen Theorie ist dual zu dem schwachen Wechselwirkungsbereich der anderen Theorie. Es gibt noch eine weitere Dualität in der Stringtheorie, die *T-Dualität*. Sie bedeutet, dass sehr klein eingerollte Dimensionen in einer der Theorien, nicht von weit aufgewickelten Dimensionen der anderen Theorie unterschieden werden können [4] [5].

Die elfdimensionale M-Theorie selbst ist *keine* Stringtheorie, sie enthält M-Branen, die keine D-Branen sind. Es gibt sogar eine *Ende-der-Welt-Brane* [6]. Die elfte Dimension dieser Theorie ist so winzig klein, dass sie in der Stringtheorie nicht auffiel. Man vermutet, dass Strings eigentlich zweidimensionale M-Branen in einem elfdimensionalen Universum sind [4]. Wenn all das stimmen sollte, wird durch die Stringtheorien die Physik bei Energien beschrieben, deren direkter Überprüfung wir noch lange nicht fähig sein werden [6]. Bislang konnte die Stringtheorie experimentell nicht verifiziert werden.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie sich das Standardmodell der Teilchenphysik in der Stringtheorie ergeben kann. Da es wohl an die 10^{500} *mögliche* Stringtheorien gibt, sind die Möglichkeiten, *wie* sich das Standardmodell ergeben könnte, zahlreich. In dieser Arbeit geht es um ein Modell auf sich schneidenden D6-Branen.

Im Rahmen dieser Arbeit können nicht alle wichtigen Konzepte der Stringtheorie herausgearbeitet werden, es kann dahingehend kein Anspruch auf Vollständigkeit und/oder

Ausführlichkeit erhoben werden.

Das erste Kapitel beschreibt die bosonische Stringtheorie, die mangels Fermionen im zweiten Kapitel zur Superstringtheorie entwickelt werden muss. Das dritte Kapitel führt D-Branen ein, anschließend wird gezeigt wie Eichfelder durch Strings auf D-Branen entstehen. Und im vierten Kapitel wird das Standardmodell in einer Konfiguration aus Strings und Branen modelliert.

Das Material für diese Arbeit entstammt zum größten Teil dem Buch von B. Zwiebach, *A first course in string theory*, das eine leicht zugängliche Einführung auf dem Niveau eines Bachelor-Studiums der Physik bietet.

1 Bosonische Stringtheorie

In diesem Kapitel werden einige der grundlegenden Konzepte zur Beschreibung offener und geschlossener Strings eingeführt, der relativistische String wird quantisiert und sein Massenspektrum untersucht.

1.1 Nichtrelativistische Strings

Strings sind eindimensionale Saiten mit Masse und Spannung, die zu transversalen und longitudinalen Schwingungen fähig sind. Transversal werden Richtungen senkrecht zur Stringausdehnung genannt, longitudinale Richtung liegt entlang des Strings.

Der String erstreckt sich entlang der x -Achse und sei an seinen Endpunkten fixiert bei $(0,0)$ und $(0, a)$. Die Stringspannung T_0 hat Einheiten der Kraft und somit

$$[T_0] = [\text{Kraft}] = [\text{Energie}] \cdot \frac{1}{L} . \quad (1.1)$$

Die Gesamtmasse eines Strings ist $M = \mu_0 a$, mit μ_0 Masse pro Einheitslänge.

Eine infinitesimale Dehnung des Strings um dx belässt die Spannung während der Dehnung in etwa konstant und die Energieänderung ist gleich der aufgewendeten Arbeit $T_0 dx$. Die

Gesamtmasse des nichtrelativistischen Strings ändert sich nicht. Ein relativistischer String mit höherer Energie, würde eine größere Ruhemasse besitzen. Berücksichtigt man, dass die Energie in Einheiten von Masse mal Geschwindigkeit zum Quadrat gemessen werden kann, ergibt sich

$$[T_0] = \frac{M}{L} [v]^2 = \mu_0 [v]^2. \quad (1.2)$$

Für einen nichtrelativistischen String sind Spannung und die Massendichte beides festzulegende Parameter, die Geschwindigkeit auf der rechten Seite von (1.2) ist die Geschwindigkeit transversaler Wellen.

Der straff eingespannte String gehorcht, wie auch eine Violinensaiten, einer Wellengleichung der klassischen Mechanik

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1.3)$$

v_0 ist die Geschwindigkeit der Wellen. Für die transversalen Wellen auf dem ausgestreckten String gilt

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \quad (1.4)$$

und damit

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (1.5)$$

für einen nichtrelativistischen String.

Je höher die Spannung oder leichter der String, umso schneller bewegen sich die Wellen.

Da die Wellengleichung (1.5) eine partielle Differentialgleichung mit Ableitungen nach Zeit und Ort ist, müssen zur Bestimmung der Lösungen im Allgemeinen Rand- und Anfangsbedingungen betrachtet werden. Die Randbedingungen legen die Lösung am Rand des Systems fest, die Anfangsbedingungen für eine bestimmte Startzeit. Hier werden Dirichlet und Neumann Randbedingungen betrachtet.

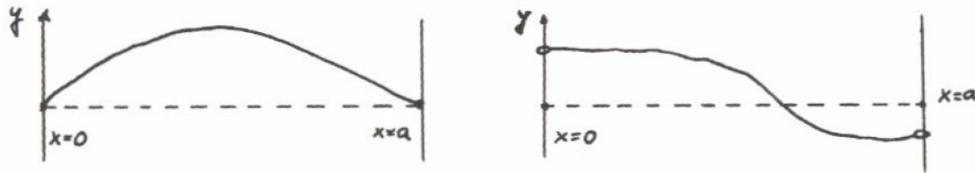


Abbildung 1: Links: String mit Dirichlet Randbedingungen an den Endpunkten. Rechts: String mit Neumann Randbedingungen an den Endpunkten [1].

Wie in Abbildung 1 dargestellt wird, legen Dirichlet Randbedingungen die Positionen der Stringendpunkte fest:

$$y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0 \quad \text{Dirichlet Randbedingungen.} \quad (1.6)$$

Können sich die Stringenden frei entlang der y -Achse bewegen, müssen Neumann Randbedingungen angewendet werden, wie rechts in der Abbildung angedeutet:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x=0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x=a) = 0 \quad \text{Neumann Randbedingungen.} \quad (1.7)$$

Für einen String dessen jeder Punkt sinusartig und in Phase in y -Richtung schwingt, ist

$$y(t, x) = y(x) \sin(\omega t + \varphi), \quad (1.8)$$

wo ω die Winkelfrequenz der Oszillation und φ eine konstante Phase sind. Mit den oben genannten Randbedingungen ergeben sich die folgenden nichttrivialen Lösungen der Wellengleichung, dabei kürzt sich die Zeitabhängigkeit heraus:

Mit Dirichlet Randbedingungen

$$y_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n \neq 0. \quad (1.9)$$

A_n ist eine beliebige Konstante. Der Wert $n = 0$ repräsentiert einen bewegungslosen String und wurde deshalb ausgeschlossen. Die erlaubten Frequenzen sind

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \left(\frac{n\pi}{a}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

Violinensaiten sind beispielsweise Dirichlet-Strings – um die Violine auf die richtige Frequenz zu stimmen, muss die Spannung der Saiten richtig eingestellt werden. Je höher die Spannung umso höher die Tonhöhe.

Mit Neumann Randbedingungen lautet die Lösung

$$y_n(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad n=0,1,2,\dots \quad (1.11)$$

Diesmal kann $n = 0$ nicht ausgeschlossen werden: zwar oszilliert der String nicht, wird aber nach $y(t, x) = A_0$ verschoben. Die Oszillationsfrequenzen sind dieselben wie in (1.10).

Ausschließlich nichtrelativistische Strings sind zu longitudinalen Schwingungen fähig, die von Spannungswellen begleitet werden und hier nicht weiter behandelt werden sollen.

Die Bewegungsgleichung des nichtrelativistischen Strings erhält man durch Variation seiner Wirkung

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(t) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]. \quad (1.12)$$

Definiert man die folgenden Größen als

$$\begin{aligned} \wp^t &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \\ \wp^x &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

so lautet die *Bewegungsgleichung für den nichtrelativistischen String*

$$\frac{\partial \wp^t}{\partial t} + \frac{\partial \wp^x}{\partial x} = 0. \quad (1.14)$$

Mit (1.13) sieht man, dass es sich dabei um die Wellengleichung in (1.5) handelt.

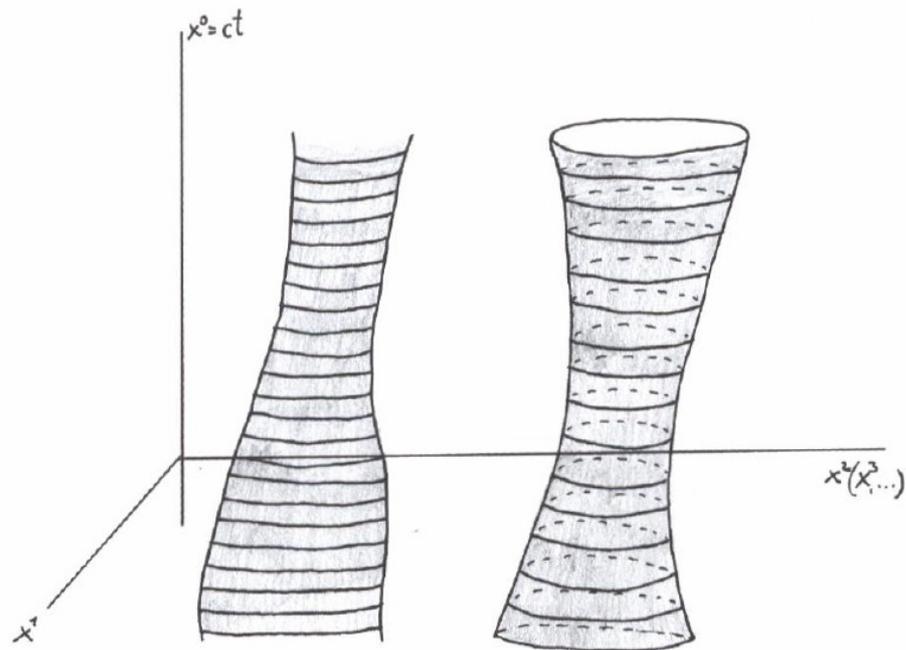


Abbildung 2: Links: Weltfläche eines offenen Strings. Rechts: Weltfläche eines geschlossenen Strings. [1]

1.2 Relativistische Strings

Ziel dieses Abschnittes ist es eine Bewegungsgleichung für den relativistischen String aufzustellen und einige allgemeine Begriffe einzuführen.

Ein relativistisches Punktteilchen beschreibt in der Raumzeit eine *Weltlinie*, seine Wirkung ist proportional zu der auf der Weltlinie vergangenen Eigenzeit $S = mc \int ds$. Eine Lorentz-invariante Größe ist das Produkt aus Eigenzeit und Lichtgeschwindigkeit – die *Eigenlänge* (*proper length*).

Ein relativistischer String beschreibt in der Raumzeit eine *Weltfläche* (*world-sheet*). Die String-Wirkung muss ein Funktional der String-Trajektorie sein. Eine Lorentz-invariante Größe soll die *Eigenfläche* (*proper area*) der Weltfläche sein. Abbildung 2 zeigt die Weltflächen eines offenen und eines geschlossenen Strings.

Um das Flächenfunktional in der Raumzeit zu beschreiben, lassen sich die lokalen

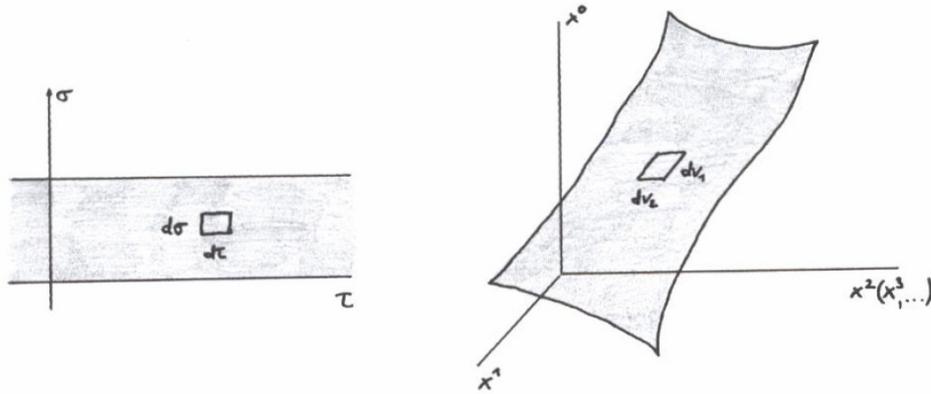


Abbildung 3: Links: Ein kleines Quadrat im Parameterraum (τ, σ) . Rechts: Die Fläche in der Target-Raumzeit mit dem Bild des Quadrats - ein Parallelogramm mit den Seiten dv_1^μ und dv_2^μ . [1]

Koordinaten auf der String-Weltfläche durch τ (Zeit auf dem String) und σ (Position entlang des Strings) parametrisieren.

Mit den üblichen Raumzeit-Koordinaten $x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d)$ wird die Oberfläche durch die Funktionen

$$X^\mu(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)) \quad (1.15)$$

beschrieben – durch Abbilden eines Bereiches aus dem (τ, σ) -Parameterraum in die Raumzeit – auch *String-Koordinaten* genannt.

Abbildung 3 zeigt für einen offenen String links die Oberfläche im Parameterraum, rechts die Oberfläche in der Raumzeit. Dabei kann σ nur Werte in einem endlichen Intervall annehmen, τ kann sich von minus bis plus Unendlich erstrecken. Die Weltlinien der Stringendpunkte haben konstante σ Werte, werden also durch τ parametrisiert.

Um das Flächenfunktional A zu bestimmen, betrachtet man das in der linken Abbildung ausgewählte Element, seine Fläche dA im Targetraum rechts soll bestimmt werden. Im Allgemeinen handelt es sich bei dem infinitesimalen Flächenelement um ein Parallelogramm, das von den Vektoren dv_1^μ und dv_2^μ aufgespannt wird. Diese können auch als

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \quad (1.16)$$

geschrieben werden. So repräsentiert zum Beispiel $\partial X^\mu / \partial \tau$ die Änderung der Raumkoordinaten bezüglich τ . Multipliziert man das mit der Länge $d\tau$ der horizontalen Seite des Rechtecks aus dem Parameterraum, ergibt das den Vektor dv_1^μ , der diese Seite im Targetraum repräsentiert.

Mit der Formel zur Berechnung der Fläche eines Parallelogramms

$$\begin{aligned} dA &= |dv_1| |dv_2| |\sin \theta| = |dv_1| |dv_2| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|dv_1|^2 |dv_2|^2 - |dv_1|^2 |dv_2|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{|dv_1|^2 |dv_2|^2 \cos^2 \theta - |dv_1|^2 |dv_2|^2}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

wobei θ der Winkel zwischen den Vektoren dv_1^μ und dv_2^μ ist und die Terme in der dritten Zeile vertauscht wurden um später ein negatives Vorzeichen unter der Wurzel zu vermeiden, kann das Flächenelement geschrieben werden als

$$dA = \sqrt{(dv_1 \cdot dv_2)^2 - (dv_1 \cdot dv_1)(dv_2 \cdot dv_2)}. \quad (1.18)$$

Das relativistische Skalarprodukt garantiert die Lorentz-Invarianz des Flächenelements.

Mit (1.16) und erneuten Schreibweise als Skalarprodukt ergibt sich das Flächenfunktional

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \quad (1.19)$$

Die Wirkung eines relativistischen Strings ist proportional zu der *proper area* der Weltfläche und lautet

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \quad \text{Nambu-Goto-Wirkung}. \quad (1.20)$$

Das Flächenfunktional musste mit passenden Konstanten multipliziert werden, um die Einheiten der Wirkung zu erhalten. $\sigma_1 > 0$ ist eine Konstante und für die Ableitungen gilt

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X^{\mu'} \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (1.21)$$

Die Skalarprodukte sind in einer flachen Raumzeit definiert: $X \cdot X = \eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$.

Die Wirkung muss reparametrisierungsinvariant sein, d.h. unabhängig von der

Parametrisierung die zur ihrer Berechnung führte. Reparametrisierungsinvarianz in der Stringtheorie entspricht der Eichinvarianz in der Elektrodynamik.

Der Ausdruck unter der Wurzel des Flächenfunktionals in (1.19) kann als Determinante einer Matrix geschrieben werden:

$$\det \gamma_{\alpha\beta} \equiv (\dot{X})^2 \cdot (X')^2 - (\dot{X} \cdot X')^2 \quad (1.22)$$

mit
$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

der *induzierten Metrik* auf der Weltfläche

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} = \frac{\partial X}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X}{\partial \xi^\beta}, \quad (1.24)$$

$\eta_{\mu\nu}$ ist die Minkowski-Metrik des Targetraums. Die Indizes α und β laufen jeweils über zwei Werte, 1 und 2, und $\xi^1 = \tau$, $\xi^2 = \sigma$.

Für das Längenquadrat gilt

$$-ds^2 = dX^\mu dX_\mu = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (1.25)$$

mit einem negativen Vorzeichen, da eine Oberfläche in der Raumzeit behandelt wird. Diese Größe ist eine geometrische Eigenschaft des Vektors dX^μ und darf nicht von der Art der Parametrisierung abhängig sein, sie ist reparametrisierungsinvariant.

Mit Hilfe der induzierten Metrik $\gamma_{\alpha\beta}$ kann die Nambu-Goto-Wirkung (1.20) in reparametrisierungsinvarianter Form geschrieben werden:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad \gamma = \det \gamma_{\alpha\beta}. \quad (1.26)$$

Diese kompaktere Form der Wirkung kann als eine erster Näherung zur Beschreibung auch höherdimensionaler Objekte, wie der D-Branen, dienen ([1], 6.4).

Durch Variation der Nambu-Goto-Wirkung (1.20) erhält man die *Bewegungsgleichung für (offene und geschlossene) relativistische Strings* (Herleitung in [1], S.112f)

$$\frac{\partial \varphi_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \varphi_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0, \quad (1.27)$$

dabei sind

$$\begin{aligned}\wp_\mu^\tau &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X_\mu' - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \\ \wp_\mu^\sigma &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X_\mu'}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}\end{aligned}\quad (1.28)$$

Ströme auf der Weltfläche des Strings, die vom String getragenen *Impulsdichten*.

Um die Lösung am Rand eines Systems zu bestimmen, müssen Randbedingungen beachtet werden, hier also an den Endpunkten der Strings. Da geschlossene Strings über keine Endpunkte verfügen, benötigen sie auch keine Randbedingungen. Endpunkte offener Strings können fixiert oder frei sein. Bleiben die Stringenden während der Bewegung fest, wird die *Dirichlet Randbedingung* angewandt:

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_i) = 0, \quad \mu \neq 0, \quad (1.29)$$

σ_i bezeichnet die σ -Koordinate eines Endpunktes, σ_i kann gleich Null oder gleich σ_1 sein. Da zumindest an den Endpunkten $\partial X^0 / \partial \tau \neq 0$ gilt, ändert sich die Zeit, wenn τ sich ändert und $\mu=0$ muss ausgeschlossen werden.

Die zweite mögliche *Randbedingung* ist die *für freie Endpunkte*

$$\wp_\mu^\sigma(\tau, \sigma_i) = 0, \quad (1.30)$$

$$\text{sie muss auch für } \mu=0 \text{ gelten: } \wp_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = \wp_0^\sigma(\tau, 0) = 0 \quad (1.31)$$

Betrachtet man die Abbildung 1 auf Seite 8, so sieht man, dass sich Dirichlet Randbedingungen ergeben, wenn die String-Endpunkte an ein physikalisches Objekt gebunden sind. Rechts in der Abbildung steht es den Endpunkten frei, sich hoch und runter entlang der vertikalen Linien zu bewegen, horizontale Bewegung ist hingegen verboten. Die Objekte an denen die Strings enden müssen, sind durch die Anzahl ihrer räumlichen Dimensionen charakterisiert und heißen *Dp-Branen*. Der Buchstabe D steht für Dirichlet, p für die Anzahl der räumlichen Dimensionen.

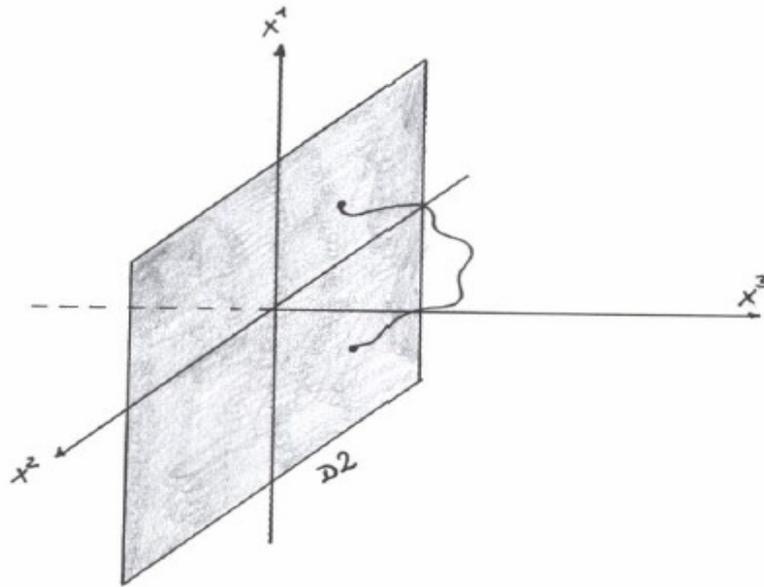


Abbildung 4: Eine D2-Brane, die sich in der (x^1, x^2) Ebene erstreckt und ein String, dessen Endpunkte an die Brane gebunden sind. [1]

Als Beispiel betrachte man in Abbildung 4 eine flache D2-Brane in einem dreidimensionalen Raum. Ihre Lage ist durch eine Bedingung festgelegt: $x^3=0$. Das bedeutet, dass sich die D2-Brane über die Ebene (x^1, x^2) erstreckt. Die String-Koordinate X^3 ist der Dirichlet Randbedingung unterworfen und muss an den Endpunkten verschwinden. Die String-Endpunkte können sich frei entlang der Brane bewegen, sodass ihre Koordinaten X^1 und X^2 die freien Randbedingungen erfüllen.

Wenn die Endpunkte eines offenen Strings freien Randbedingungen entlang aller räumlicher Dimensionen unterliegen, ist es immer noch eine D-Brane, aber diesmal eine *raumfüllende D-Brane*. Da die Brane sich überall im Raum befindet und die Enden des offenen Strings überall auf der Brane sein können, sind die Endpunkte vollkommen frei.

Die aufgestellte Bewegungsgleichung (1.27) beinhaltet die komplizierten Ausdrücke (1.28). Die Reparametrisierungsinvarianz der String-Wirkung wird dazu beitragen diese zu vereinfachen. Die räumliche Parametrisierung der Weltfläche eines Strings kann frei gewählt werden. Es steht also frei, eine passende Parametrisierung auszuwählen.

Für jeden Punkt P auf der Weltfläche soll in einem gewählten Lorentz-System gelten

$\tau(P)=t(P)$ – eine Relation zwischen den konstanten τ -Linien und der Zeit $X^0=ct$ auf der Weltfläche. Diese Wahl der τ -Parametrisierung wird *statische Eichung* genannt, weil die konstanten τ -Linien „statische Strings“ im ausgewählten Lorentz-System sind. Das heißt

$$X^0(\tau, \sigma) \equiv ct(\tau, \sigma) = c\tau \quad \text{oder} \quad \tau = t, \quad \text{Statische Eichung.} \quad (1.32)$$

Dann können die String-Koordinaten geschrieben werden als

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = \{ ct, \vec{X}(t, \sigma) \} \quad (1.33)$$

Damit werden die Ausdrücke in der Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left(0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \\ \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} &= \left(\frac{\partial X^0}{\partial t}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) = \left(c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right), \end{aligned} \quad (1.34)$$

die Parametrisierung trennt Zeit- und Raumkoordinaten.

Mit der Wahl der τ -Koordinaten ist es nun ein Leichtes das Vorzeichen unter der Wurzel in der Nambu-Goto-Wirkung (1.20) zu überprüfen: man stelle sich ein „Stück“ String vor, ohne Geschwindigkeit. Da es sich nicht bewegt ist $\partial \vec{X} / \partial t = 0$ und mit (1.34) wird die Wurzel in (1.20) zu

$$\sqrt{0 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2} (-c), \quad (1.35)$$

eine positive Größe, genau wie erwartet.

Beginnt man damit einen infinitesimalen String zu dehnen, so führt man ihm Energie zu und schafft damit Ruheenergie bzw. -masse. Die potentielle Energie, um einen String der Länge a zu erschaffen, beträgt $V = T_0 a$ und seine Massendichte ist $\mu_0 = T_0 / c^2$. Das bedeutet, dass der String seine Masse allein durch die Dehnung erhält. Die Ruhemasse des Strings ist allein von seiner Spannung abhängig!

Eine sinnvolle String-Geschwindigkeit ist die invariante Transversalgeschwindigkeit

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}, \quad (1.36)$$

der String bewegt sich durch den *Raum*, indem jeder Punkt des Strings sich in die Richtung transversal zu der String-Ausdehnung bewegt. Die transversale Geschwindigkeit $\partial \vec{X}/\partial t$ an jedem Punkt des Strings ist ein Vektor, orthogonal zu dem String und tangential zu der *Raumfläche* des Strings. Die Weltfläche war eine Oberfläche in der Raumzeit, die Raumfläche ist eine Oberfläche im Raum, die sich aus den Strings zusammensetzt, die zu allen Zeiten beobachtet werden – eine „Spur“ des Strings ([1], 6.8).

Nun kann auch eine σ -Parametrisierung gewählt werden – konstante σ -Linien werden derart konstruiert, dass sie senkrecht auf den konstanten τ -Linien stehen. Die Tangenten $\partial \vec{X}/\partial \sigma$ an den Strings sind orthogonal zu den Tangenten $\partial \vec{X}/\partial \tau$ an den konstanten σ -Linien:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} = 0 \quad (1.37)$$

Die String-Wirkung kann mit \vec{v}_\perp ausgedrückt werden. Dafür betrachte man den infinitesimalen Vektor $|d\vec{X}|$ auf dem String und seine Länge ds , im Intervall $d\sigma$:

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| d\sigma, \quad (1.38)$$

$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ ist die Änderung von \vec{X} bezüglich der Länge des Strings und ein Einheitsvektor:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 = 1, \quad (1.39)$$

das letzte Gleichheitszeichen folgt aus (1.38).

Zur Umformung der String-Wirkung können die vereinfachten Bewegungsgleichungen (1.34) benutzt werden und die statische Eichung $\tau = t$; damit werden die Ausdrücke in der Wirkung (1.29) zu

$$\begin{aligned} (\dot{X})^2 &= -c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2, \\ (X')^2 &= \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2, \\ \dot{X} \cdot X' &= \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \stackrel{(1.37)}{=} 0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Einige elementaren Umformungen liefern schließlich

$$(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma} \right)^2 (c^2 - v_{\perp}^2), \quad (1.41)$$

was in die String-Wirkung eingesetzt ergibt

$$S = -T_0 \int dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}. \quad (1.42)$$

Das bedeutet, dass während der σ -Bereich konstant bleibt, die Länge des Strings zeitabhängig ist. Diese Wirkung ist für offene und geschlossene Strings gültig. Die zugehörige Lagrange Funktion ist

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}. \quad (1.43)$$

Vergleicht man sie mit der Lagrange Funktion eines relativistischen Teilchens

$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, mit der Ruheenergie mc^2 und einem relativistischen Faktor, so kann für den relativistischen String $-T_0 \int ds$ als seine Ruheenergie interpretiert werden.

Damit kann die Hamilton-Funktion des relativistischen Strings berechnet werden ([1], Aufgabe 6.9). Seine Lagrangedichte \mathcal{L} aus $L = \int d\sigma \mathcal{L}$ lautet

$$\mathcal{L} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{ds}{d\sigma}. \quad (1.44)$$

Zunächst wird die kanonische Impulsdichte $\vec{\phi}(t, \sigma)$ bestimmt:

$$\begin{aligned} \vec{\phi}(t, \sigma) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \vec{X})} = -T_0 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial v_{\perp}^2}{\partial \dot{X}} \right) \frac{ds}{d\sigma} \\ &= \frac{T_0}{c} \left(1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{ds}{d\sigma} v_{\perp} \end{aligned} \quad (1.45)$$

und in die Hamiltondichte eingesetzt:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H} &= \wp(t, \sigma) \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \mathcal{L} \\
 &= \frac{T_0}{c^2} \frac{v_\perp^2}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{ds}{d\sigma} + T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{ds}{d\sigma} \\
 &= \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \left(v_\perp^2 + \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right) c^2 \right) \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = T_0 \frac{ds}{d\sigma} \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}; \tag{1.46}
 \end{aligned}$$

es folgt die Hamilton-Funktion

$$H = \int ds \mathcal{H} = \int d\sigma \frac{ds}{d\sigma} T_0 \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = T_0 \int ds \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.47}$$

Die Energie des Strings ergibt sich folglich aufgrund seiner transversalen Bewegung, die Masse folgt allein aufgrund seiner Spannung, wie bereits erwähnt wurde.

Etwas anders ausgedrückt, kann man sagen, dass der String durch die Energie parametrisiert wird: Jedes seiner „Teile“ gleicher Länge σ besitzt dieselbe Energiemenge, der Längenparameter ist somit proportional zu seiner Energiemenge. Mit Blick auf (1.47):

$$ds \left(1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{dE}{T_0} = d\sigma, \quad \sigma_1 = \frac{E}{T_0}, \quad \sigma \in [0, \sigma_1]. \tag{1.48}$$

In dieser gewählten σ -Parametrisierung ist die Energiedichte $dE/d\sigma$ eine Konstante gleich der Spannung.

Es ist üblich einen neuen Parameter einzuführen, den *Regge slope* Parameter α' . Dieser Parameter ist seit den frühen Tagen der Stringtheorie bekannt; die Regge Trajektorien ergaben sich, wenn man den Drehimpuls (gemessen in Einheiten von \hbar) gegen das Energiequadrat hadronischer Anregungen auftrug. Damit lässt sich der einzige dimensionsbehaftete Parameter in der String-Wirkung, die Spannung T_0 , ausdrücken als

$$T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'\hbar c} \quad \text{und} \quad \alpha' = \frac{1}{2\pi T_0\hbar c}. \tag{1.49}$$

Jetzt kann mit \hbar, c und α' eine charakteristische Länge, die *String-Länge* l_s konstruiert

werden:

$$\boxed{l_s = \hbar c \sqrt{\alpha'}}. \quad (1.50)$$

Denn es ist $[c] = \frac{L}{T}$, $[\hbar] = \frac{ML^2}{T}$, $[T_0] = \frac{M}{L} \left[\frac{L}{T} \right]^2$; für l_s eingesetzt ergibt

$$[l_s] = \frac{L}{T} \cdot \frac{ML^2}{T} \sqrt{\left(2\pi \frac{L}{T} \frac{ML^2}{T} \frac{M}{L} \frac{L^2}{T^2} \right)^{-1}} = \frac{ML^3}{T^2} \frac{T^2}{\sqrt{2\pi} L^2 M} = L, \text{ die Dimension einer Länge.}$$

Setzt man, wie in der Teilchenphysik üblich, $c = \hbar = 1$, kann die Nambu-Goto-Wirkung geschrieben werden als

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})(X')^2}. \quad (1.51)$$

1.3 Weltflächen-Ströme

Jeder String trägt einen relativistischen Impuls p_μ , der bei einer freien String Bewegung erhalten bleibt. Dabei ist der Impuls p_μ weniger ein Strom, als viel mehr ein Satz von Ladungen, eine für jede seiner Komponenten.

Die zugehörigen Ströme sind

$$(j_\mu^0, j_\mu^1) = (\wp_\mu^\tau, \wp_\mu^\sigma). \quad (1.52)$$

Die Ströme fließen auf der zweidimensionalen Weltfläche, die der String in der Raumzeit beschreibt und verschwinden überall außerhalb der Weltfläche.

Die Ladungen erhält man, indem die Nullten Komponenten \wp_μ^τ über den gesamten Raum integriert werden. Man bekommt den *Raumzeit-Impuls*

$$p_\mu = \int_0^\sigma d\sigma \wp_\mu^\tau(\tau, \sigma), \quad (1.53)$$

τ wurde beim integrieren festgehalten. Dieses Ergebnis stimmt mit der Interpretation überein, dass \wp_μ^τ die kanonische Impulsdichte ist, da es sich bei \wp_μ^τ um die Ableitung der

Lagrangedichte nach der Geschwindigkeit \dot{X}^μ handelt. Der Impuls p_μ ist eine Erhaltungsgröße in der Weltflächen-Zeit τ , sowie in der Minkowski-Zeit t . Bei offenen Strings die auf D-Branen enden ist es möglich, dass der Impuls nicht erhalten ist; dann ist aber der Gesamtimpuls von String und D-Brane erhalten.

Die Wirkung des relativistischen Strings ist per Konstruktion lorentzinvariant bei Lorentztransformationen der Koordinaten X^μ . Es können mit der Lorentz-Symmetrie assoziierte erhaltene Ladungen konstruiert werden:

Die Erhaltungsströme

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = X_\mu \wp_\nu^\alpha - X_\nu \wp_\mu^\alpha, \quad \alpha = \tau, \sigma, \quad (1.54)$$

sind antisymmetrisch $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = -\mathcal{M}_{\nu\mu}^\alpha$.

Die zugehörigen Ladungen sind

$$M_{\mu\nu} = \int (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau). \quad (1.55)$$

$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma$ verschwindet am Weltflächen-Rand offener Strings, da \wp^σ dort verschwindet. Bei konstanten τ -Linien sind die *Lorentz-Ladungen*

$$M_{\mu\nu} = \int d\sigma \mathcal{M}_{\mu\nu} = \int d\sigma (X_\mu \wp_\nu^\tau - X_\nu \wp_\mu^\tau). \quad (1.56)$$

In vier Dimensionen gibt es also sechs erhaltene Ladungen: drei Boosts M_{0i} und drei Rotationen M_{ij} , i, j sind Raumindizes. $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau$ ist die *Drehimpuls-Dichte*. Die Komponenten

M_{ij} messen den Drehimpuls \vec{L} des Strings als $L_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}$, ϵ_{ijk} ist total antisymmetrisch und $\epsilon_{123} = 1$.

Als Operatoren nach der Quantisierung gehorchen die Lorentz-Ladungen der Lorentz-Lie-Algebra².

2 Zur Definition der Lorentz-Lie-Algebra siehe Anhang A.

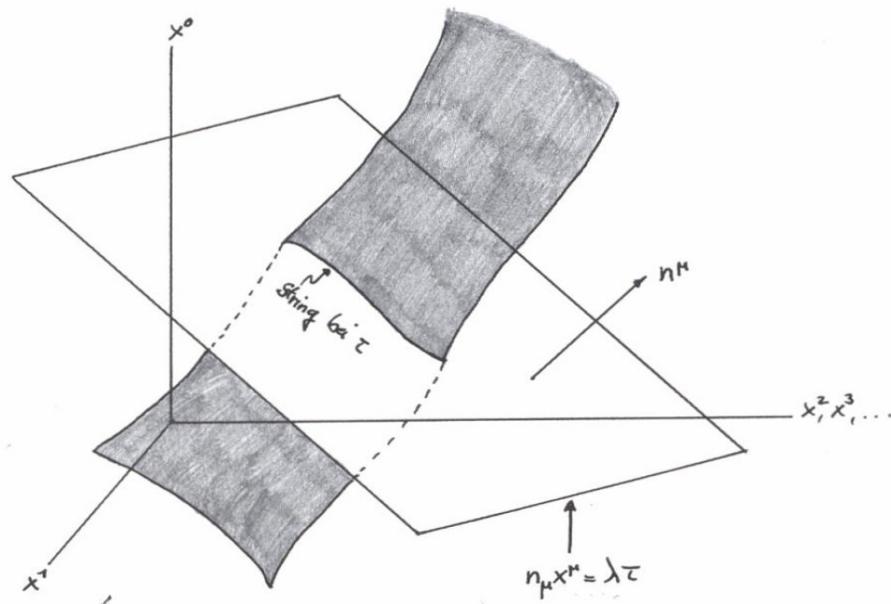


Abbildung 5: Die Eichbedingung $n \cdot X = \lambda \tau$ legt die Strings fest als Kurven an dem Schnitt der Weltfläche mit der Hyperebene orthogonal zu dem Vektor n^μ . [1]

1.4 Relativistische Lichtkegel-Strings

Zur Vereinfachung der Beschreibung der String-Dynamik wurde bisher die statische Eichung benutzt, die eine Beziehung zwischen der Weltflächen-Zeit τ und der Raumzeit-Zeit X^0 herstellt:

$$X^0(\tau, \sigma) = c \tau. \quad (1.57)$$

Nun sollen allgemeinere Eichungen betrachtet werden, insbesondere die Lichtkegel-Eichung, die die Bewegungsgleichung (1.27) $\partial_\tau \varphi_\mu^\tau + \partial_\sigma \varphi_\mu^\sigma = 0$ vereinfachen wird. Insbesondere soll τ gleich einer Linearkombination der String-Koordinaten sein, was geschrieben werden kann als

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda \tau. \quad (1.58)$$

Die Bedeutung des Vektors n^μ ist anschaulich in Abbildung 5 dargestellt.

Für $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ und $\lambda = c$, folgt daraus (1.57), die statische Eichung.

Man wählt $\lambda = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau$; dabei ist $\beta=2$ für offene Strings und $\beta=1$ für geschlossene Strings. Durch diese Art der Eichung wird erreicht, dass die beiden Parameter τ und σ dimensionslos werden. $(n \cdot p)$ ist eine Konstante, p^μ erhaltener Raumzeit-Impuls

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \wp_\mu^\tau(\tau, \sigma). \quad (1.59)$$

Die definierenden Gleichungen der Eichung

$$\begin{aligned} n \cdot X(\tau, \sigma) &= \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \\ (n \cdot p) &= \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \wp^\tau(\tau, \tilde{\sigma}), \end{aligned} \quad (1.60)$$

legen die Parametrisierung offener und geschlossener Strings fest. $n \cdot \wp^\tau$ ist eine Konstante auf der Weltfläche.

Diese Wahl der Eichung führt zu den Zwangsbedingungen ([1], 9.3)

$$\dot{X} \cdot X' = 0, \quad \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad \rightarrow (\dot{X} \pm X')^2 = 0, \quad (1.61)$$

die zu einer erheblichen Vereinfachung der Impulsdichten aus (1.28) beitragen:

$$\begin{aligned} \wp^{\tau\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \\ \wp^{\sigma\mu} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

In die Feldgleichung (1.27) $\partial_\tau \wp_\mu^\tau + \partial_\sigma \wp_\mu^\sigma = 0$ eingesetzt, folgt

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0. \quad (1.63)$$

In der gewählten Parametrisierung sind die Bewegungsgleichungen des Strings Wellengleichungen. Bei einem offenen String mit freien Endpunkten muss zusätzlich $X^{\mu'}$ an den Enden verschwinden.

Die Wellengleichung (1.63) kann explizit gelöst werden. Es werden offene Strings und eine raumfüllende D-Brane betrachtet. Im allgemeinsten Fall ist die Lösung

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)). \quad (1.64)$$

An den freien Endpunkten des Strings – bei $\sigma = 0, \pi$ – müssen Neumann-Randbedingungen betrachtet werden: $\partial X^\mu / \partial \sigma = 0$.

$$\text{Für } \sigma = 0: \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0. \quad (1.65)$$

Da die zwei Ableitungen in der Klammer übereinstimmen, können sich deren Funktionen lediglich durch eine Konstante unterscheiden. (1.64) kann also auch als

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)) \quad (1.66)$$

geschrieben werden.

$$\text{Für } \sigma = \pi: \quad \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0. \quad (1.67)$$

Offensichtlich ist $f^{\mu'}$ eine mit der Periode 2π periodische Funktion.

Eine periodische Funktion $f^{\mu'}$ kann mit Hilfe der allgemeinen Fourierreihe geschrieben werden als

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu)). \quad (1.68)$$

Integrieren und Redefinieren der Konstanten liefert ([1], 9.4):

$$f^\mu(u) = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)). \quad (1.69)$$

Der Ausdruck kann in (1.66) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= \frac{1}{2} \left(f_0^\mu + f_1^\mu(\tau + \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos[n(\tau - \sigma)] + B_n^\mu \sin[n(\tau - \sigma)]) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(f_0^\mu + f_1^\mu(\tau - \sigma) + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos[n(\tau + \sigma)] + B_n^\mu \sin[n(\tau + \sigma)]) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(2f_0^\mu + 2f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau) \cos(n\sigma) + B_n^\mu \sin(n\tau) \cos(n\sigma)) \right), \end{aligned}$$

so dass schließlich

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \cos(n\sigma). \quad (1.70)$$

Die Koeffizienten sollen durch andere ersetzt werden, die eine einfache physikalische Bedeutung haben werden. Unter Ausnutzung der Euler Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ und durch elementare Umformungen folgt

$$A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) = -i \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}), \quad (1.71)$$

wobei $a_n^{\mu*} \equiv \frac{\sqrt{n}(iA+B)}{2\sqrt{2\alpha'}}$ das komplex Konjugierte von $a_n^\mu \equiv \frac{\sqrt{n}(-iA+B)}{2\sqrt{2\alpha'}}$ ist. Der Faktor $\sqrt{2\alpha'}$ wurde eingeführt um die Konstanten dimensionslos zu machen.

f_1^μ ist eine zum Raumzeit-Impuls des Strings proportionale Größe ([1], S.185):
 $f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu$; setzt man noch $f_0^\mu = x_0^\mu$, dann bekommt die Gleichung (1.70) die Form

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}. \quad (1.72)$$

Die Terme der rechten Seite entsprechen dabei der Reihe nach - der Grundschiwingung (*zero mode*), dem Impuls und durch die Summe werden die String-Oszillationen beschrieben.

An dieser Stelle wird eine weitere Notation eingeführt

$$\begin{aligned} \alpha_0^\mu &= \sqrt{2\alpha'} p^\mu, \\ \alpha_n^\mu &= a_n^\mu \sqrt{n}, \\ \alpha_{-n}^\mu &= a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (1.73)$$

$$\text{Es gilt also } \alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*. \quad (1.74)$$

Damit ist die *Lösung der Bewegungsgleichung* für einen offenen String mit freien Endpunkten auf einer raumfüllenden D-Brane

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (1.75)$$

Die gefundene Lösung der Bewegungsgleichung erfüllt die relevanten Randbedingungen – die Neumann-Randbedingungen – muss zudem aber auch die Zwangsbedingungen (1.61), $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$, erfüllen. Dazu ist es notwendig die beliebigen Werte der Konstanten zu spezifizieren, was in der Lichtkegel-Eichung erreicht werden kann.

Es werden nun die Lichtkegel-Koordinaten benutzt³. Die Lichtkegel-Eichung wird derart

gewählt, dass $n \cdot X = X^+$ ist. Dazu sei $n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0\right)$, dann folgt

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}} = p^+. \quad (1.76)$$

³ Zur Definition siehe Anhang A

In die definierenden Gleichungen (1.60)

$$\begin{aligned} n \cdot X(\tau, \sigma) &= \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \\ (n \cdot p) &= \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \phi^\tau(\tau, \tilde{\sigma}), \end{aligned}$$

eingesetzt:

$$\begin{aligned} X^+(\tau, \sigma) &= \beta \alpha' p^+ \tau, \\ p^+ &= \frac{2\pi}{\beta} \phi^{\tau+}, \end{aligned} \tag{1.77}$$

wo $\beta=2$ für offene und $\beta=1$ für geschlossene Strings ist. Die zweite Gleichung besagt, dass die Dichte p^+ konstant entlang des Strings ist.

In der Lichtkegel-Eichung soll mit der einfachen Form von X^+ gezeigt werden, dass die gesamte String-Dynamik in den *transversalen* Koordinaten

$$X^I = (X^2, X^3, \dots, X^d), \quad I=(2, \dots, d) \tag{1.78}$$

steckt.

Die Zwangsbedingungen können in Lichtkegel-Koordinaten ausgedrückt werden:

$$-2(\dot{X}^+ \pm X^{+'}) (\dot{X}^- \pm X^{-'}) + (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2 = 0, \tag{1.79}$$

und es folgt aufgrund von $X^{+'} = 0$ und $\dot{X}^+ = \beta \alpha' p^+$, dass

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\beta \alpha'} \frac{1}{2 p^+} (\dot{X}^I \pm X^{I'})^2, \quad p^+ \neq 0. \tag{1.80}$$

$p^+ = 0$ musste ausgeschlossen werden: Betrachtet man die zweite Gleichung in (1.77), so ist p^+ , die konstante Dichte entlang des Strings, nicht negativ. Also gilt $p^+ \geq 0$; wäre p^+ gleich Null, dann müssten sich p^1 und die Energie weg heben – was nur dann passieren kann, wenn es sich um ein masseloses Teilchen handelt, das sich in genau negativer x^1 Richtung ausbreitet – in Lichtkegel-Koordinaten nicht möglich. Für $p^+ = 0$ ist der Lichtkegel-Formalismus nicht anwendbar.

In Gleichung (1.80) werden die Ableitungen von X^- in Termen von X^I ausgedrückt, bestimmen also diese Funktion bis auf eine Integrationskonstante x_0^- . Zudem war es nicht mehr notwendig die Wurzel zu ziehen (vergleiche (1.61)). Die gesamte String-Entwicklung ist bestimmbar durch $X^I(\tau, \sigma)$, p^+ , und x_0^- .

Mit der allgemeinen Lösung (1.75) lautet die explizite Lösung für die transversalen Koordinaten eines offenen Strings

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (1.81)$$

Außerdem ist

$$X^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' p^+ \tau \stackrel{(1.73)}{=} \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau. \quad (1.82)$$

Analog

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (1.83)$$

Bildet man die Ableitungen von X^μ , so lassen sich daraus zwei nützliche Linearkombinationen bilden ([1], 9.4)

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (1.84)$$

die jeweils für $\mu = -$ und für $\mu = I$ aufgeschrieben werden können und in (1.80) eingesetzt, ist es möglich diese Gleichungen für die Minus-Oszillatoren α_n^- zu lösen ([1], S.189). Dadurch wird die Lösung der Bewegungsgleichungen vervollständigt, da die α_n^- in Termen der transversalen Oszillatoren geschrieben werden können. Es ist

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{p^+} L_n^\perp. \quad (1.85)$$

L_n^\perp nennt man die *transversalen Virasoro-Moden*

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I, \quad (1.86)$$

sie sind die Schwingungsmoden der X^- - Koordinate. Das sieht man, indem die erhaltenen Ergebnisse in (1.83) eingesetzt werden:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (1.87)$$

Für $n = 0$ ist (1.85):

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = 2\alpha' p^- = \frac{1}{p^+} L_0^\perp \quad \rightarrow \quad 2 p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp, \quad (1.88)$$

was in (1.87) benutzt wurde. Man sieht, dass die gesamte Dynamik in den transversalen Koordinaten steckt.

An dieser Stelle ist es möglich einen Ausdruck für die Masse eines Strings anzugeben. Dazu kann das Massenquadrat mit der relativistischen Beziehung

$$M^2 = -p^2 = 2 p^+ p^- - p^I p^I \quad (1.89)$$

berechnet werden. Der erste Term auf der rechten Seite kann umgeschrieben werden

$$2 p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp \stackrel{(1.86)}{=} \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \right) \stackrel{(1.73)}{=} p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I, \quad (1.90)$$

und in das Massenquadrat eingesetzt, folgt

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I. \quad (1.91)$$

Dieses klassische Resultat wird durch die Quantisierung noch einen zusätzlichen Term erhalten. Hier kann man allerdings sehen, dass die Masse eines klassischen Strings eine reelle Zahl ist – da $a^* a = |a|^2 \geq 0$, ist $M^2 \geq 0$.

1.5 Offene, relativistische, quantenmechanische Strings

Es wird weiterhin eine raumfüllende D-Brane angenommen.

In der Quantentheorie des offenen relativistischen Strings soll

$$\left(X^I(\sigma), x_0^-, \phi^{\tau I}(\sigma), p^+ \right) \quad (1.92)$$

ein Satz unabhängiger Operatoren, ohne eine explizite τ -Abhängigkeit, sein ([1], 12.1).

Der Kommutator für die Operatoren $X^I(\sigma)$ und $\phi^{\tau I}(\sigma)$ ist

$$[X^I(\sigma), \wp^{\tau I}(\sigma')] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (1.93)$$

Das bedeutet, dass die Operatoren nur dann nicht miteinander kommutieren sollen, wenn sie sich am denselben Punkt entlang des Strings befinden. Gleichzeitige Messungen an verschiedenen Punkten des Strings sollen nicht miteinander interferieren.

$$\text{Außerdem gilt } [X^I(\sigma), X^J(\sigma')] = [\wp^{\tau I}(\sigma), \wp^{\tau J}(\sigma')] = 0 \quad (1.94)$$

$$\text{und } [x_0^-, p^+] = -i. \quad (1.95)$$

Die Operatoren x_0^- und p^+ kommutieren mit allen anderen Operatoren.

Als Lichtkegel-Energie sollte p^- die X^+ -Entwicklung generieren: $\frac{\partial}{\partial X^+} \Leftrightarrow p^-$. Die Hamilton-Funktion sollte die τ -Translation generieren. In Lichtkegel-Eichung ist $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$, also lässt sich schreiben

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha' p^+ p^-. \quad (1.96)$$

Man kann vermuten, dass die τ -Translation generiert wird durch

$$H = 2\alpha' p^+ p^- \stackrel{(1.59)}{=} 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \wp^{\tau-}. \quad (1.97)$$

Einen Ausdruck für $\wp^{\tau-}$ erhält man aus (1.62) als $\wp^{\tau-} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^-$.

Zunächst muss aber \dot{X}^- bestimmt werden aus (1.83) mit $a \equiv \frac{1}{2\alpha' 2p^+}$:

$$\begin{aligned} \partial_\tau X^- \pm \partial_\sigma X^- &= a(\partial_\tau X^I \pm \partial_\sigma X^I) \\ A: \quad \partial_\tau X^- + \partial_\sigma X^- &= a[(\partial_\tau X^I)^2 + 2\partial_\tau X^I \partial_\sigma X^I + (\partial_\sigma X^I)^2] \\ B: \quad \partial_\tau X^- - \partial_\sigma X^- &= a[(\partial_\tau X^I)^2 - 2\partial_\tau X^I \partial_\sigma X^I + (\partial_\sigma X^I)^2] \\ A-B: \quad \partial_\tau X^- &= a[(\partial_\tau X^I)^2 + (\partial_\sigma X^I)^2]. \end{aligned} \quad (1.98)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
 \wp^{\tau-} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I) \\
 &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} ((2\pi\alpha')^2 \wp^{\tau I} \wp^{\tau I} + X'^I X'^I) \\
 &= \frac{\pi}{2p^+} \left(\wp^{\tau I} \wp^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right).
 \end{aligned} \tag{1.99}$$

Das kann in die Hamilton-Funktion (1.97) eingesetzt werden und ergibt

$$H(\tau) = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\wp^{\tau I}(\tau, \sigma) \wp^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{X'^I(\tau, \sigma) X'^I(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \tag{1.100}$$

Der Hamilton-Operator erzeugt quantenmechanische Bewegungsgleichungen. Seine einfache Form in (1.97), $H = 2\alpha' p^+ p^-$, erinnert an die transversalen Virasoro-Moden. Mit (1.88),

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp, \quad \text{ist}$$

$$H = L_0^\perp. \tag{1.101}$$

Der wahre Hamiltonian wird allerdings eine zusätzliche Konstante benötigen um lorentzinvariant zu sein.

Die quantenmechanische Bewegungsgleichung unterscheidet sich nicht von der bereits betrachteten klassischen: $\ddot{X}^I - X'^I{}'' = 0$. Das Gleiche gilt für die Randbedingungen ([1], S.241).

Die klassischen Variablen α_n^I und a_n^I werden zu quantenmechanischen hermiteschen Operatoren mit nicht-trivialen Kommutationsrelationen ([1], ausführliche Berechnung in 12.2):

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\eta^{IJ} \delta_{m,n}. \tag{1.102}$$

Dabei kommutiert α_0^I mit allen anderen Oszillatoren. Außerdem gilt

$$[x_0^I, \alpha_n^J] = 0 \quad \text{für } n \neq 0 \tag{1.103}$$

$$\text{und} \quad [x_0^I, \alpha_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}. \tag{1.104}$$

Hier ist analog zu (1.73)

$$\begin{aligned}\alpha_0^I &= \sqrt{2\alpha'} p^I, \\ \alpha_n^I &= a_n^I \sqrt{n}, \\ \alpha_{-n}^I &= a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1.\end{aligned}\tag{1.105}$$

$$\text{Damit ist } (\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I, \quad n \in \mathbb{Z}.\tag{1.106}$$

Auch die Operatoren x_0^I und p^I sind hermitesch

$$(x_0^I)^\dagger = x_0^I, \quad (p^I)^\dagger = p^I\tag{1.107}$$

$$\text{und erfüllen } [x_0^I, p^I] = i \eta^{II}.\tag{1.108}$$

Mit $n \geq 1$ sind

$$\begin{aligned}\alpha_{-n}^I & \text{ Erzeugungs-Operatoren,} \\ \alpha_n^I & \text{ Vernichtungs-Operatoren.}\end{aligned}\tag{1.109}$$

Die Entwicklung des Ortsoperators kann mit (1.109) geschrieben werden als

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + 2\alpha' p^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} - \frac{1}{n} \alpha_{-n}^I e^{in\tau} \right) \cos(n\sigma).\tag{1.110}$$

Es gibt also für jede Schwingungsmode und jede transversale Lichtkegel-Richtung ein Paar von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren. Damit besteht ein vollständiger Satz von Basis-Operatoren aus den Null-Schwingungen plus einem unendlichen Satz von Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren.

Die transversalen Schwingungsmoden, die Virasoro-Moden L_n^\perp , werden zu transversalen Virasoro-Operatoren $L_n^\perp \equiv 1/2 \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I$. Da auch die Oszillatoren α Operatoren sind, kommt es auf deren Reihenfolge an. Aus der Kommutator-Beziehung (1.102) folgt, dass sie nur dann nicht miteinander kommutieren, wenn sich deren Moden-Nummern zu Null addieren; das bedeutet, dass die zwei Operatoren in L_n^\perp nur für $n=0$ nicht kommutieren und damit allein L_0^\perp untersucht werden muss:

$$L_0^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I.\tag{1.111}$$

Es soll mit normalgeordneten Operatoren, aufgrund ihrer wohldefinierten Wirkungsweise auf das Vakuum, gearbeitet werden ([1], 12.4). In der ersten Summe auf der rechten Seite steht der Erzeugungsoperator links neben dem Vernichtungsoperator – die Summe ist normalgeordnet.

Die zweite Summe muss umgeordnet werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \eta^{IJ} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p.
 \end{aligned} \tag{1.112}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass $[\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I] = p \delta_{p,p} \eta^{IJ}$ ist und, dass es $(D-2)$ transversale Richtungen gibt.

Die letzte Summe in (1.112) ist eine Summe über alle positiven ganzen Zahlen – ein unendlich großer Beitrag, was nicht ignoriert werden kann, da L_0^\perp in der Berechnung der String-Massen (1.90) enthalten ist

$$2 p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp = p^I p^I + M^2 \tag{1.113}$$

und zusätzliche Terme die Massen der String-Zustände verändern. Das klassisch errechnete Massenquadrat in (1.91) liefert nicht die erwarteten masselosen Zustände der Maxwell-Theorie für offene Strings und die masselosen Zustände geschlossener Strings verhalten sich nicht wie die masselosen Zustände der Gravitation ([1], 12.4). Der letzte Term in (1.112) wird *Ordnungskonstante* a genannt, er wird den zusätzlichen Beitrag an die Massen der String-Zustände liefern.

Der Operator L_0^\perp wird wie folgt *definiert*

$$L_0^\perp \equiv \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I. \tag{1.114}$$

und die Ordnungskonstante a wird in (1.113) eingeführt: $2 p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a)$.

Dann folgt für das Massenquadrat

$$M^2 = -p^2 = 2 p^+ p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right), \tag{1.115}$$

a verschiebt also den Operator um einen konstanten Betrag.

Formal ist $a = \infty$, kann aber mit der *Riemannschen Zeta-Funktion* umgeformt werden ([1], S.253), die als unendliche Summe definiert ist

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1,$$

mit $s \in \mathbb{C}$; die Summe konvergiert nur, wenn der Realteil des Arguments größer als Eins ist. Benutzt man die analytische Fortsetzung der Zeta-Funktion, so kann diese für alle möglichen Werte des Arguments definiert werden und es stellt sich heraus, dass sie, bis auf $s = 1$, für alle Werte endlich ist. Insbesondere ist

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12}.$$

In die Ordnungskonstante a eingesetzt erhält man

$$a = \frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = -\frac{1}{24}(D-2). \quad (1.116)$$

Für die anderen transversalen Virasoro-Moden lauten die Kommutator-Beziehungen ([1], 12.4):

für $m+n \neq 0$ definiert

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp \quad (1.117)$$

die *Virasoro-Algebra ohne zentrale Entwicklung*;

für $m+n=0$ ist durch

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} \quad (1.118)$$

die *zentral entwickelte Virasoro-Algebra* gegeben.

Die Virasoro-Operatoren lassen sich als Generatoren der Reparametrisierung der Weltfläche interpretieren: Der Kommutator eines Virasoro-Operators mit dem Ortsoperator $X^I(\tau, \sigma)$ ergibt⁴

$$[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}, \quad (1.119)$$

mit $\xi_m^\tau(\tau, \sigma) = -i e^{im\tau} \cos(m\sigma)$,
 $\xi_m^\sigma(\tau, \sigma) = e^{im\tau} \sin(m\sigma)$.

Andererseits kann eine Änderung der Weltflächen-Koordinaten geschrieben werden als

4 Berechnung von 1.119 im Anhang B

$$\begin{aligned}\tau &\rightarrow \tau + \epsilon \xi_m^\tau(\tau, \sigma), \\ \sigma &\rightarrow \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma(\tau, \sigma),\end{aligned}\tag{1.120}$$

wo ϵ ein infinitesimaler Parameter ist und für den transformierten Ortsoperator folgt

$$\begin{aligned}X^I(\tau + \epsilon \xi_m^\tau, \sigma + \epsilon \xi_m^\sigma) &= X^I(\tau, \sigma) + \epsilon (\xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}) \\ &= X^I(\tau, \sigma) + \epsilon [L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)].\end{aligned}\tag{1.121}$$

Die Virasoro-Operatoren wirken auf die String-Koordinaten auf dieselbe Weise wie eine Reparametrisierung der Weltfläche.

Da L_0^\perp der Hamilton-Funktion des Strings entspricht, werden durch diesen Virasoro-Operator Zeit-Translationen generiert

$$[L_0^\perp, X^I] = -i \partial_\tau X^I,\tag{1.122}$$

das entspricht der Heisenbergschen Bewegungsgleichung für X^I .

Erhaltene Lorentz-Ladungen waren $M_{\mu\nu} = \int d\sigma \mathcal{M}_{\mu\nu} = \int d\sigma (X_\mu \phi_\nu^\tau - X_\nu \phi_\mu^\tau)$. Das kann umgeformt werden, indem die expliziten Ausdrücke für die Impulsdichten eingesetzt und anschließend integriert werden, es ist dann ([1], 12.5):

$$\begin{aligned}M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma (X^\mu \dot{X}^\nu - X^\nu \dot{X}^\mu) \\ &= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\alpha_{-n}^\mu \alpha_n^\nu - \alpha_{-n}^\nu \alpha_n^\mu).\end{aligned}\tag{1.123}$$

In der Lichtkegel-Eichung ist der Lorentz-Generator M^{-I} von besonderem Interesse, aufgrund von X^- , einer nichttrivialen Funktion transversaler Koordinaten. Konsistenz verlangt von der Ladung M^{-I} ; dass sie Lorentz-Transformationen der String-Koordinaten generiert, die eventuell von einer Weltflächen Reparametrisierung begleitet werden. Verlangt man Lorentzinvarianz von den Ladungen, so müssen diese hermitesch und normalgeordnet sein, der Kommutator zweier Generatoren muss verschwinden ([1], 12.5):

$$[M^{-I}, M^{-J}] = 0.\tag{1.124}$$

Durch Umformen und Ausführen von (1.123) erhält man

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp). \quad (1.125)$$

Eine sehr lange Rechnung⁵ führt zu dem Ergebnis für den Kommutator

$$[M^{-I}, M^{-J}] = -\frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left\{ m \left[1 - \frac{1}{24} (D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24} (D-2) + a \right] \right\}. \quad (1.126)$$

Es gibt zwei bisher unbestimmte Größen – die Ordnungskonstante a und die Anzahl der Dimensionen D . Damit der Kommutator oben Null wird, muss die geschweifte Klammer verschwinden

$$m \left[1 - \frac{1}{24} (D-2) \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{1}{24} (D-2) + a \right] = 0 \quad \text{für alle } m \in \mathbb{Z}^+, \quad (1.127)$$

denn die Summe über die Oszillatoren verschwindet nicht. Der Kommutator der Lorentz-Ladungen kann also dazu genutzt werden, die *kritische Dimension* der Stringtheorie zu bestimmen! Ebenso die Ordnungskonstante a , die zu einer konstanten Verschiebung der Stringmassen führen wird. Es genügt die Bedingung für $m=1$ und $m=2$ zu untersuchen ([1], 12.5).

Für die erste eckige Klammer in (1.127) ist

$$1 - \frac{1}{24} (D-2) = 0 \quad \text{und es folgt die Anzahl der}$$

$$\text{Raumzeit-Dimensionen } \boxed{D=26}. \quad (1.128)$$

Für die zweite eckige Klammer ist

$$\frac{1}{24} (D-2) + a = 0 \quad \rightarrow \quad a = -\frac{1}{24} (26-2) = -1. \quad (1.129)$$

Derselbe Wert ergibt sich auch durch (1.116) für $D=26$.

Damit erhält man $2 p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp - 1)$. Die *Hamilton-Funktion* eines

Strings nimmt dann die folgende Form an

$$H = L_0^\perp - 1. \quad (1.130)$$

⁵ Zur Erörterung siehe Anhang C.

1.6 Geschlossene, relativistische, quantenmechanische Strings

Dieser Abschnitt liefert eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Quantisierung des geschlossenen Strings (ausführlich in [1], Kapitel 13).

Geschlossene Strings haben keine Endpunkte, die Weltflächen-Koordinate σ muss kompaktifiziert werden

$$\sigma \sim \sigma + 2\pi.$$

Zwei Punkte auf der Weltfläche, die sich nur durch ein Vielfaches von 2π unterscheiden, sind derselbe Punkt. Die String-Koordinaten sind dann

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi) \quad \text{für alle } \tau \text{ und } \sigma. \quad (1.131)$$

Das gilt für Strings, die sich in einem einfach zusammenhängenden Raum ausbreiten, wo jeder geschlossene String zu einem Punkt zusammengezogen werden kann (wie im Minkowski-Raum). Sind Raumrichtungen zusammengerollt und wickelt sich ein String darum, kann er nicht mehr zusammengezogen werden.

Eine *allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung* für geschlossene Strings ist

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma). \quad (1.132)$$

X_L^μ (L = linkslaufend) ist eine Welle, die sich gegen negative σ bewegt,

X_R^μ (R = rechtslaufend) ist eine Welle, die sich gegen positive σ bewegt.

Die Entwicklung der String-Koordinaten nach Eigenschwingungen ist

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^\mu e^{-in\sigma}) e^{-in\tau}. \quad (1.133)$$

$\bar{\alpha}_n^\mu$ sind die linkslaufenden Oszillatoren, entsprechend sind die α_n^μ rechtslaufende Oszillatoren. Außerdem gilt hier

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_0^\mu &= \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu, \\ x_0^{L\mu} &= x_0^{R\mu} \equiv x_0^\mu. \end{aligned} \quad (1.134)$$

Bis auf die zero modes, hat die Theorie der geschlossenen Strings den Operator-Inhalt zweier Kopien der Theorie offener Strings. Die Kommutator-Beziehungen nehmen eine Form an, wie

man sie aufgrund der Kommutatoren der offenen Strings erwarten würde:

$$\begin{aligned} [\bar{\alpha}_m^I, \bar{\alpha}_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}, \\ [\alpha_m^I, \alpha_n^J] &= m \delta_{m+n,0} \eta^{IJ}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Zwei „entgegengesetzte“ Oszillatoren kommutieren miteinander $[\alpha_m^I, \bar{\alpha}_n^J] = 0$.

Es können *Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren* definiert werden

$$\begin{aligned} \alpha_n^I &= a_n^I \sqrt{n}, & \alpha_{-n}^I &= a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, & n &\geq 1 \\ \bar{\alpha}_n^I &= \bar{a}_n^I \sqrt{n}, & \bar{\alpha}_{-n}^I &= \bar{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, & n &\geq 1. \end{aligned} \quad (1.136)$$

Nicht-verschwindende Kommutatoren sind

$$[\bar{a}_m^I, \bar{a}_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ}, \quad [a_m^I, a_n^{J\dagger}] = \delta_{m,n} \eta^{IJ} \quad (1.137)$$

und
$$\begin{aligned} [x_0^I, \alpha_0^J] &= [x_0^I, \bar{\alpha}_0^J] = i \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \eta^{IJ} \\ [x_0^I, p^J] &= i \eta^{IJ}. \end{aligned} \quad (1.138)$$

Aufgrund der zwei Arten von Oszillatoren, sollte es für den geschlossenen String zwei Sätze von Virasoro-Operatoren geben:

$$\bar{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_p^I \bar{\alpha}_{n-p}^I, \quad L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I. \quad (1.139)$$

Aufgrund von $\bar{\alpha}_0^\mu = \alpha_0^\mu$ ist

$$L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp. \quad (1.140)$$

Da aber diese zwei Operatoren laut (1.139) sehr unterschiedlich sind, muss deren Gleichheit bedeuten, dass ihre Wirkung auf Zustände geschlossener Strings dieselben Ergebnisse liefert.

Wie bei den offenen Strings (vgl. Gleichung (1.114)), werden die Virasoro-Operatoren *definiert* – als normalgeordnete Operatoren *ohne* eine additive Konstante ([1], 13.2):

$$\begin{aligned} \bar{L}_0^\perp &= \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n \bar{a}_n^{I\dagger} \bar{a}_n^I, \\ L_0^\perp &= \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I. \end{aligned} \quad (1.141)$$

Die Ordnungskonstante ist für den jeweiligen Operator dieselbe wie bei den offenen Strings

($a = -1$), ebenso die kritische Dimension $D = 26$. Das bedeutet, dass offene und geschlossene Strings nebeneinander existieren können.

Das Massenquadrat ist

$$M^2 = -p^2 = 2 p^+ p^- - p^I p^I = \frac{2}{\alpha'} (L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) - p^I p^I. \quad (1.142)$$

Die Hamilton-Funktion des geschlossenen Strings

$$H = \alpha' p^+ p^- = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2. \quad (1.143)$$

Für den offenen Strings war $H = L_0^\perp - 1$; (1.143) ist also eine Summe aus der Hamilton-Funktion für rechtslaufende Operatoren und der Hamilton-Funktion für linkslaufende Operatoren. Die Operatoren L_m^\perp und \bar{L}_m^\perp erfüllen die Virasoro-Algebra (1.117). Zusätzlich verschwinden die Kommutatoren zwischen den Virasoro-Operatoren unterschiedlicher Arten. Der volle Satz der Virasoro-Operatoren der geschlossenen Strings definiert zwei kommutierende Virasoro-Algebren.

Für den offenen String hatte man festgestellt, dass seine Virasoro-Operatoren in derselben Weise auf die String-Koordinaten wirken, wie eine Reparametrisierung der Weltfläche. Bei den geschlossenen Strings werden durch die Linearkombination $L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp$ τ -Translationen auf der Weltfläche generiert; es ist also die Weltflächen-Energie. Aufgrund der statischen Eichung, (1.32), die eine Beziehung zwischen der Weltflächen-Zeit und der Lichtkegel-Zeit herstellt, führt die Weltflächen-Energie zu der raumzeitlichen Hamilton-Funktion (1.143), die die Entwicklung der Lichtkegel-Zeit generiert. Die andere Kombination, $L_0^\perp - \bar{L}_0^\perp$, ist der Weltflächen-Impuls, da sie Translationen entlang der Weltflächen-Koordinate σ generiert; was nicht mit dem Lichtkegel-Impuls verwechselt werden darf – der Weltflächen-Impuls geschlossener Strings muss verschwinden. ([1], 13.2)

1.7 Zustände offener Strings

Die Quantisierung des offenen Strings führte auf diskrete Werte für die Massen der Stringzustände, wodurch sich passende Teilchenzustände ergeben werden.

Die *Grundzustände* für alle Impulswerte sind

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (1.144)$$

sie sind auch Vakuumzustände aller Oszillatoren, werden also durch den Operator a_n^I vernichtet:

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad I = 2, \dots, 25. \quad (1.145)$$

Dabei ist p^+ der Eigenwert des Operators p^+ und \vec{p}_T ist der transversale Impuls, dessen Komponenten die Eigenwerte des Operators p^I sind:

$$\hat{p}^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^+ |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \hat{p}^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = p^I |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (1.146)$$

Der allgemeine Basiszustand des Zustandsraumes kann geschrieben werden als ([1], 12.6)

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (1.147)$$

Die nicht-negative ganze Zahl $\lambda_{n,I}$ gibt an wie oft der Erzeugungsoperator angewandt wird, für jedes $n \geq 1$ gibt es 24 Polarisationsrichtungen. Da alle Erzeugungsoperatoren untereinander kommutieren, ist deren Reihenfolge nicht von Bedeutung. Hier wird man sich auf den Fall beschränken, dass nur eine endliche Anzahl von $\lambda_{n,I}$ für jeden Zustand ungleich Null ist. Da es unendlich viele ganze Zahlen n gibt, enthält die Stringtheorie unendlich viele unterschiedliche Teilchen!

Zur Untersuchung des Massenspektrums offener Strings betrachte man den Massenquadrat-Operator aus (1.115), der geschrieben werden kann als

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (-1 + N^\perp) \quad (1.148)$$

mit
$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I, \quad (1.149)$$

dem *Besetzungszahloperator* – auf einen Zustand angewandt, gibt er die Anzahl der in dem

Zustand enthaltenen Teilchen. Sein Eigenwert setzt sich aus den Moden-Nummern der jeweiligen Operatoren zusammen. Es gilt

$$\begin{aligned} [N^\perp, a_n^{I\dagger}] &= n a_n^{I\dagger}, \\ [N^\perp, a_n^I] &= -n a_n^I, \end{aligned} \tag{1.150}$$

$$N^\perp |\lambda\rangle = N_\lambda^\perp |\lambda\rangle, \quad N_\lambda^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{I=2}^{25} n \lambda_{n,I}.$$

Der n-te Oszillator trägt n Einheiten von $\frac{1}{\alpha'}$ zu M^2 bei. Da die Eigenwerte des Besetzungszahloperators alle positiv sind, gilt für alle String-Zustände $M^2 \geq -\frac{1}{\alpha'}$. N^\perp ist normalgeordnet und auf Grundzustände angewandt vernichtet diese: $N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$.

Die Grundzustände mit $N^\perp = 0$ sind *Anregungen des Skalarfeldes* $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. Um die Masse dieser Anregung zu bestimmen, wirkt man mit dem Massenquadrat auf die Zustände:

$$M^2 |p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp - 1) |p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \tag{1.151}$$

Dank der Ordnungskonstante $a = -1$ ist die Masse nicht Null geworden – bisher wurden keine masselose Skalarteilchen entdeckt. Aber das vorliegende Ergebnis – ein negatives Massenquadrat – deutet auf eine Instabilität in der Theorie hin. Das zugehörige Skalarfeld nennt man *Tachyon*.

Die nächsten Zustände mit $N^\perp = 1$ sind masselos: $M^2 = 0$. Da man mit jedem der transversalen Oszillatoren $a_1^{I\dagger}$ auf die Grundzustände einwirken kann, gibt es $D - 2 = 24$ masselose Zustände:

$$a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle; \quad M^2 a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0. \tag{1.152}$$

Der allgemeine masselose Zustand ist eine Linearkombination dieser Basiszustände:

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad \xi_I \text{ ist der Polarisationsvektor.} \tag{1.153}$$

Vergleicht man diese Zustände mit den Ein-Photon-Zuständen der Quantenelektrodynamik⁶ in

6 Siehe Anhang A.

Lichtkegel-Koordinaten: $\sum_{I=2}^{D-2} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I+} |\Omega\rangle$, so fällt auf, dass auch diese einen transversalen Vektor ξ_I führen und durch den transversalen Lorentz-Index I gezählt werden – der Index ist wichtig, weil aufgrund dessen die Zustände unter Lorentz-Transformationen ineinander transformierbar sind. Es handelt sich um zueinander korrespondierende Zustände:

$$a_1^{I+} |p^+, \vec{p}_T\rangle \Leftrightarrow a_{p^+, p_T}^{I+} |\Omega\rangle. \quad (1.154)$$

Das bedeutet, dass die masselosen Zustände offener Strings (1.152) als die *Photon-Zustände* der Maxwell-Theorie identifiziert werden können!

In unserer vierdimensionalen Raumzeit-Welt haben Photonen $D-2=2$ Polarisationsrichtungen, in der sechszwanzig-dimensionalen Raumzeit-Welt der bosonischen Stringtheorie können die Photonen $D-2=24$ Polarisationsrichtungen aufweisen.

Schließlich noch die Zustände mit $N^\perp = 2$, die man durch

$$a_1^{I+} a_1^{J+} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad \text{oder} \quad a_2^{I+} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (1.155)$$

erhält; das Massenquadrat ist $M^2 = \frac{1}{\alpha'}$. Es gibt $\frac{1}{2}(D-2)(D-1) + (D-2) = 324$ solcher Zustände, sie werden *massive Tensoren* genannt.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu der *Tachyon* genannten Vakuum-Instabilität der bosonischen Theorie offener Strings⁷. Bisher wurden Strings im Hintergrund einer raumfüllenden D-Brane behandelt; einer D25-Brane, die durchaus ein physikalisches Objekt darstellt und damit über eine konstante Energiedichte verfügen kann. Mit diesem Hintergrund ist die Theorie offener Strings gewissermaßen eine Theorie der Brane selbst, was wegen dem Tachyon im Spektrum offener Strings bedeutet, dass die D25-Brane selbst instabil ist und darum zerfällt, zu einem stabilen Hintergrund mit Energie Null. Aber auch alle offenen Strings zerfallen, da deren Endpunkte an D-Branen gebunden sind. Die freigegebene Energie könnte an die geschlossenen Strings übergehen, die nicht an die Existenz von D-Branen gebunden sind.

Auch die Superstringtheorie ist nicht frei von Tachyonen, die entsprechenden Zustände können allerdings geeignet „heraus gewählt“ werden; zudem enthält sie auch geladene D-Branen, wo die Ladungserhaltung die Branen vor Zerfall schützt.

⁷ Folgend der Erörterung in [1]

1.8 Zustände geschlossener Strings

Auch hier sind die *Grundzustände* $|p^+, \vec{p}_T\rangle$. Um Basiszustände zu erzeugen, müssen zweierlei Erzeugungsoperatoren auf die Grundzustände angewandt werden – die links- und die rechtslaufende – $\bar{\alpha}_n^{I\dagger}$ und $\alpha_n^{I\dagger}$; der *allgemeine Basiszustand* ist ([1], 13.3)

$$|\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} \right] \times \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{J=2}^{25} (\bar{a}_m^{J\dagger})^{\bar{\lambda}_{m,J}} \right] |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (1.156)$$

Nicht alle diese Zustände gehören dem Zustandsraum geschlossener Strings an. *Der Basisvektor* $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ gehört dann und nur dann dem Zustandsraum an, wenn er $N^\perp = \bar{N}^\perp$ erfüllt. Diese Zwangsbedingung ergibt sich aus (1.140) $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$. Die Zustandsmassen erhält man aus

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} (N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (1.157)$$

Für die *Grundzustände*

$$N^\perp = \bar{N}^\perp = 0: \quad M^2 = -\frac{4}{\alpha'} \quad \text{Tachyonen}, \quad (1.158)$$

erhält man ein negatives Massenquadrat. Eine Instabilität der Theorie geschlossener Strings, die noch unverstanden ist.

Der *erste angeregte Zustand* muss unter Einwirkung zweier unterschiedlicher Oszillatoren gebildet werden:

$$N^\perp = \bar{N}^\perp = 1: \quad a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 = 0. \quad (1.159)$$

Es handelt sich also um $(D-2)^2$ masselose Zustände.

Allgemein kann der masselose Zustand geschrieben werden als

$$\sum_{I,J} R_{IJ} a_1^{I\dagger} \bar{a}_1^{J\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (1.160)$$

dabei sind die R_{IJ} Elemente einer beliebigen quadratischen Matrix der Größe $(D-2)$. Jede quadratische Matrix kann in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil zerlegt werden:

$$R_{IJ} = \frac{1}{2}(R_{IJ} + R_{JI}) + \frac{1}{2}(R_{IJ} - R_{JI}) \equiv S_{IJ} + A_{IJ}. \quad (1.161)$$

Der symmetrische Teil S_{IJ} kann noch weiter zerlegt werden:

$$S_{IJ} = \left(S_{IJ} - \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S \right) + \frac{1}{D-2} \delta_{IJ} S = \hat{S}_{IJ} + S' \delta_{IJ}, \quad S \equiv S^I{}_I = \delta^{IJ} S_{IJ},$$

in eine spurlose Matrix \hat{S}_{IJ} und das Mehrfache der Einheitsmatrix. Dabei ist $S' = \frac{S}{(D-2)}$:

Damit konnte R_{IJ} in drei Anteile zerlegt werden

$$R_{IJ} = \hat{S}_{IJ} + A_{IJ} + S' \delta_{IJ}. \quad (1.162)$$

Dann können auch die Zustände (1.160) in drei Gruppen linear unabhängiger Zustände aufgespalten werden:

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I+} \bar{a}_1^{J+} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (1.163)$$

$$\sum_{I,J} A_{IJ} a_1^{I+} \bar{a}_1^{J+} |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (1.164)$$

$$S' a_1^{I+} \bar{a}_1^{I+} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (1.165)$$

Vergleicht man die Zustände in (1.163) mit den Graviton-Zuständen der Quantentheorie freier Gravitationsfelder⁸

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ+} |\Omega\rangle, \quad (1.166)$$

fällt auf, dass beide Sätze von Zuständen symmetrische spurlose Matrizen führen - ξ_{IJ} und \hat{S}_{IJ} - und durch dieselben Lorentz-Indizes gezählt werden, sie haben dieselben Impulse und dieselbe Masse Null. Wenn die Basiszustände als zueinander korrespondierend identifiziert werden

$$a_1^{I+} \bar{a}_1^{J+} |p^+, \vec{p}_T\rangle \Leftrightarrow a_{p^+, p_T}^{IJ+} |\Omega\rangle \quad (1.167)$$

repräsentieren die Zustände (1.163)

$$\sum_{I,J} \hat{S}_{IJ} a_1^{I+} \bar{a}_1^{J+} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad \text{1-Teilchen-Graviton-Zustände!} \quad (1.168)$$

8 Siehe Anhang A

Die Zustände in (1.164) ordnet man dem *Kalb-Ramond-Feld* zu, einem antisymmetrischen Tensorfeld $B_{\mu\nu}$. Dieses Eichfeld ist die Tensor-Verallgemeinerung des Maxwell-Eichfeldes A_μ und koppelt auf eine analoge Weise an Strings, wie das Maxwellfeld an Teilchen. So wie Teilchen Maxwell-Ladungen tragen, können Strings Kalb-Ramond-Ladungen tragen⁹.

Der letzte der drei zu besprechenden Zustände (1.165), hat keine freien Indizes, nur einen Freiheitsgrad, repräsentiert also ein masseloses Skalarfeld. Es wird *Dilaton* genannt. Der Erwartungswert des Dilatonfeldes bestimmt über die String-Kopplung! Die Kopplung ist eine dimensionslose Zahl, die die Stärke der String-Wechselwirkungen bestimmt. In der Elektrodynamik wird die Stärke elektromagnetischer Kopplung durch eine Konstante bestimmt – die Feinstrukturkonstante α . Hingegen ist in der Stringtheorie die Kopplung keine Konstante, sondern ein dynamischer Parameter – ein Feld! Und ein Feld kann sich im Raum und in der Zeit entwickeln und sogar von anderen Feldern beeinflusst werden.

2 Superstringtheorie

Die bisher besprochene Theorie enthält ausschließlich bosonische Zustände. Eine realistische Stringtheorie muss aber auch Fermionen beschreiben. Das leisten die Superstringtheorien. Sie beschreiben Superstrings – Bosonen und Fermionen – mit Supersymmetrie, haben also dieselbe Anzahl bosonischer und fermionischer Zustände auf jeder Massenebene.

Dieses Kapitel folgt den Ausführungen in [1], Kapitel 14.

2.1 Weltflächen-Fermionen

Der Ort des klassischen bosonischen Strings wurde durch die String-Koordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$ beschrieben. Klassisch sind $X^\mu(\tau, \sigma)$ kommutierende Variablen, dessen Reihenfolge nicht von Bedeutung ist. Nach der Quantisierung werden sie zu Operatoren auf dessen Reihenfolge

⁹ Das Kalb-Ramond-Feld wird in dieser Arbeit nicht besprochen; weitere Informationen darüber in [1].

es bei der Anwendung durchaus ankommt, da sie nicht zwangsläufig miteinander kommutieren.

Um in der Stringtheorie Fermionen zu bekommen, müssen neue dynamische Weltflächen-Variablen eingeführt werden – $\psi_1^\mu(\tau, \sigma)$ und $\psi_2^\mu(\tau, \sigma)$. Die klassischen Variablen ψ_α^μ ($\alpha=1,2$) kommutieren nicht, sie sind antikommutierende¹⁰ Variablen.

Die Einführung antikommutierender Variablen ist notwendig, da zur Beschreibung relativistischer Fermionen das klassische Dirac-Feld genutzt wird, eine klassisch antikommutierende Feldvariable. Die Quantisierung des Dirac-Feldes ergibt Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, jeweils für Teilchen und Antiteilchen, auch alles antikommutierende Variablen. Das bedeutet insbesondere $f_{p_1, s_1}^+ f_{p_1, s_1}^+ = 0$ für jeden der Impulswerte \vec{p} und Spins s , und damit kann ein Mehrteilchen-Zustand gleichartiger Fermionen, z.B. Elektronen, keine zwei Teilchen mit denselben Werten für Impuls und Spin beschreiben, da

$$f_{p_1, s_1}^+ f_{p_1, s_1}^+ |\Omega\rangle = 0. \quad (2.1)$$

Durch jeden Wert μ von $X^\mu(\tau, \sigma)$ wurde ein Weltflächen-Boson beschrieben. Ein Weltflächen-Fermion wird durch jeden Wert von μ der zwei Komponenten $\psi_1^\mu(\tau, \sigma)$ und $\psi_2^\mu(\tau, \sigma)$ eines Weltflächen-Spinors beschrieben. Die Quantisierung ergibt Teilchenzustände, die sich wie Raumzeit-Fermionen verhalten.

Die Einführung neuen Feldvariablen verändert die Anzahl der aus (1.126) ermittelten Raumzeit-Dimensionen¹¹, da die Lorentz-Generatoren zusätzliche Beiträge erhalten. Für die Superstringtheorien gilt

$$D = 10 \quad \text{und} \quad a = -\frac{1}{2}. \quad (2.2)$$

Die Superstrings leben also in einer zehn-dimensionalen Raumzeit und das Massenquadrat wird um die Konstante $-1/2$ verschoben (statt -1 in der bosonischen Stringtheorie). Die *Superstring-Wirkung* muss einen Beitrag über die transversalen Felder $\psi_\alpha^l(\tau, \sigma)$ führen:

$$S = \frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma (\dot{X}^l \dot{X}^l - X'^l X'^l) + S_\psi, \quad (2.3)$$

¹⁰ Siehe Anhang A zu antikommutierenden Variablen.

¹¹ Eine Erklärung in Anhang E.

$$\text{mit } S_\psi = \frac{1}{2\pi} \int d\tau \int_0^\pi d\sigma \left[\psi_1^I (\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I + \psi_2^I (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I \right]. \quad (2.4)$$

S_ψ ist die *Dirac-Wirkung* für ein Fermion in einer zweidimensionalen (τ, σ) Welt. Durch Variation erhält man die *Bewegungsgleichungen* der neuen Felder

$$(\partial_\tau + \partial_\sigma) \psi_1^I = 0, \quad (\partial_\tau - \partial_\sigma) \psi_2^I = 0. \quad (2.5)$$

Die Bewegungsgleichungen beinhalten, dass $\psi_1^I(\tau, \sigma)$ rechtslaufend ist und $\psi_2^I(\tau, \sigma)$ linkslaufend:

$$\begin{aligned} \psi_1^I(\tau, \sigma) &= \Psi_1^I(\tau - \sigma), \\ \psi_2^I(\tau, \sigma) &= \Psi_2^I(\tau + \sigma). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Für die Felder an den Endpunkten ist

$$\psi_1^I(\tau, \sigma_*) = \pm \psi_2^I(\tau, \sigma_*); \quad (2.7)$$

für den Endpunkt $\sigma_* = 0$ ist $\psi_1^I(\tau, 0) = \psi_2^I(\tau, 0)$ und

für den Endpunkt $\sigma_* = \pi$ ist $\psi_1^I(\tau, \pi) = \pm \psi_2^I(\tau, \pi)$. (2.8)

Das bedeutet, dass der Zustandsraum in zwei Unterräume auseinander bricht, die man als *Sektoren* bezeichnet: der *Ramond-Sektor* (R), für das obere Vorzeichen in (2.7) und der *Neveu-Schwarz-Sektor* (NS) für Zustände, die sich aus dem unteren Vorzeichen ergeben. Das Fermionfeld soll über das volle Intervall $\sigma \in [-\pi, \pi]$ definiert sein:

$$\Psi^I(\tau, \pi) = \pm \Psi^I(\tau, -\pi). \quad (2.9)$$

Das periodische Fermion korrespondiert dann zu Ramond-Randbedingungen, das antiperiodische Fermion zu den Neveu-Schwarz-Randbedingungen:

$$\Psi^I(\tau, \pi) = +\Psi^I(\tau, -\pi) \quad \text{Ramond-Randbedingungen} \quad (2.10)$$

$$\Psi^I(\tau, \pi) = -\Psi^I(\tau, -\pi) \quad \text{Neveu-Schwarz-Randbedingungen} \quad (2.11)$$

Im Folgenden sollen beide Sektoren genauer betrachtet werden.

2.2 Neveu-Schwarz-Sektor

Das Neveu-Schwarz-Fermion Ψ^I ist eine Funktion von $\tau - \sigma$ und ändert sein Vorzeichen, wenn $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$, es muss nach Funktionen mit gebrochenrationalen Moden entwickelt werden, damit seine Antiperiodizität garantiert werden kann:

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{r \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}} b_r^I e^{-ir(\tau - \sigma)}. \quad (2.12)$$

Es ist für $r = n + \frac{1}{2}$ und n eine ganze Zahl:

$$e^{ir(\sigma + 2\pi)} = e^{ir\sigma} e^{i\left(n + \frac{1}{2}\right)2\pi} = e^{ir\sigma} e^{i\pi} = -e^{ir\sigma}. \quad (2.13)$$

Die Entwicklungskoeffizienten b_r^I sind antikommutierende Operatoren. Die Koeffizienten negativer Moden $b_{-1/2}^I, b_{-3/2}^I, \dots$ sind Erzeugungsoperatoren, die positiver Moden $b_{1/2}^I, b_{3/2}^I, \dots$ Vernichtungsoperatoren. Sie erfüllen den Antikommutator

$$\{b_r^I, b_s^I\} = \delta_{r+s,0} \delta^{IJ} \quad (2.14)$$

und können jeweils höchstens einmal in jedem Zustand vorkommen. Diese Operatoren wirken auf das Vakuum, das *Neveu-Schwarz-Vakuum* $|NS\rangle$.

Ein Basiszustand im Neveu-Schwarz-Sektor des Zustandsraumes hat die Form:

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=2}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^9 \prod_{r=1/2, 3/2, \dots} (b_{-r}^J)^{\rho_{r,J}} |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.15)$$

$\rho_{r,J}$ ist entweder Eins oder Null. Die Reihenfolge der b -Operatoren ist für einen einzelnen Zustand beliebig, da sie anders geordnet höchstens ein anderes Vorzeichen liefern können, jedoch keine neuen Zustände.

Analog zu den Betrachtungen in der bosonischen Stringtheorie berechnet man das Massenquadrat als

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-\frac{1}{2} + N^\perp \right), \quad \text{mit} \quad N^\perp = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} r b_{-r}^I b_r^I. \quad (2.16)$$

Der Besetzungszahl-Operator ist eine Summe aus bosonischen und fermionischen Beiträgen.

Die Ordnungskonstante ist $a = -\frac{1}{2}$.

Geordnet nach deren Massen bzw. den Eigenwerten des Besetzungszahl-Operators, sind die Zustände des NS-Sektors:

$$N^\perp=0: \quad |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{2\alpha'}; \quad (2.17)$$

$$N^\perp=\frac{1}{2}: \quad b_{-1/2}^I |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 = 0; \quad (2.18)$$

$$N^\perp=1: \quad \{\alpha_{-1}^I, b_{-1/2}^I b_{-1/2}^J\} |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 = \frac{1}{2\alpha'}; \quad (2.19)$$

$$N^\perp=\frac{3}{2}: \quad \{\alpha_{-1}^I b_{-1/2}^J, b_{-3/2}^I, b_{-1/2}^I b_{-1/2}^J b_{-1/2}^K\} |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 = \frac{1}{\alpha'}. \quad (2.20)$$

Auch hier gibt es also einen Zustand mit negativem Massenquadrat, ein Tachyonfeld. Und es gibt acht masselose Zustände. Die Anzahl der Zustände auf der jeweiligen Massenebene kann aus der Entwicklung der *generierenden Funktion* abgelesen werden ([1], 14.6), sie lautet für den NS-Sektor:

$$f_{NS}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^{n-1/2}}{1-x^n} \right)^8. \quad (2.21)$$

Entwicklung in den ersten Ordnungen ergibt

$$f_{NS}(x) = x^{-1/2} + 8 + 36x^{1/2} + 128x + 402x^{3/2} + 1152x^2 + \dots \quad (2.22)$$

Der erste Term ist das Tachyonfeld bei $\alpha' M^2 = -1/2$, der zweite Term sind die acht masselose Zustände, der dritte Term die 36 Zustände bei $\alpha' M^2 = 1/2$ usw.

Es soll noch ein weiterer Operator eingeführt werden – er zeigt ob es sich bei den gefundenen Zuständen um fermionische oder bosonische Zustände handelt: $(-1)^F$ mit F für Fermionzahl. Der Operator soll +1 für bosonische Zustände und -1 für fermionische Zustände sein. Seine Wirkung auf die Neveu-Schwarz-Grundzustände $|NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ soll den Eigenwert -1 liefern, was die Grundzustände fermionisch macht:

$$(-1)^F |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle = -|NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.23)$$

Der Eigenwert von $(-1)^F$ für einen Zustand ist das Produkt aus der -1 des Grundzustands und den -1 eines jeden fermionischen Oszillators des Zustandes. Das bedeutet, dass ein

Zustand mit nur einem fermionischen Oszillator bosonisch ist, so wie die acht masselose Zustände aus (2.18). Allgemein ausgedrückt, sind Zustände mit ganzzahligem Besetzungszahloperator N^\perp fermionisch, mit halbzahligen N^\perp bosonisch.

2.3 Ramond-Sektor

Das Ramond-Fermion Ψ^I ist periodisch und kann entwickelt werden als

$$\Psi^I(\tau, \sigma) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n^I e^{-in(\tau - \sigma)}. \quad (2.24)$$

Auch hier sind die Oszillatoren d_n^I antikommutierende Operatoren und analog sind die Operatoren mit negativen Moden Erzeugungsoperatoren, die mit positiven Moden Vernichtungsoperatoren. Die Ramond-Oszillatoren erfüllen den Antikommutator

$$\{d_m^I, d_n^J\} = \delta_{m+n,0} \delta^{IJ}, \quad (2.25)$$

alle Erzeugungsoperatoren kommutieren und können deshalb auch hier nur einmal in jedem Zustand vorkommen. Die acht zero modes d_0^I können durch einfache Linearkombinationen zu vier Vernichtungs- und vier Erzeugungsoperatoren angeordnet werden. Da es sich um zero modes handelt, tragen sie nichts zu dem Massenquadrat bei. Sei $|0\rangle$ das Vakuum, dann gibt es 16 entartete Ramond-Grundzustände – acht Zustände $|R_a\rangle$ mit einer geraden Anzahl von Erzeugungsoperatoren wirkend auf das Vakuum und acht Zustände $|R_a\rangle$ mit einer ungeraden Anzahl der Erzeuger – zusammenfassend als $|R_A\rangle$ geschrieben, mit $A=1, \dots, 16$.

Der Ramond-Sektor des Zustandsraumes enthält die Zustände

$$|\lambda\rangle = \prod_{I=2}^9 \prod_{n=1}^{\infty} (\alpha_{-n}^I)^{\lambda_{n,I}} \prod_{J=2}^9 \prod_{m=0}^{\infty} (d_{-m}^J)^{\rho_{m,J}} |R_A\rangle \otimes |p^+ \vec{p}_T\rangle, \quad (2.26)$$

$\rho_{m,J}$ ist entweder Eins oder Null.

Auch hier gibt es einen $(-1)^F$ Operator, er antikommutiert mit allen fermionischen Oszillatoren, der Vakuumzustand $|0\rangle$ soll fermionisch sein:

$$(-1)^F |0\rangle = -|0\rangle. \quad (2.27)$$

Das heißt, alle $|R_a\rangle$ sind fermionisch und alle $|R_{\bar{a}}\rangle$ bosonisch.

Die Berechnung des Massenquadrates ergibt eine verschwindende Ordnungskonstante ([1], 14.6) und

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} N^\perp \quad \text{mit} \quad N^\perp = \sum_{n \geq 1} (\alpha_{-n}^I \alpha_n^I + n d_{-n}^I d_n^I), \quad (2.28)$$

das heißt auch, dass alle Ramond-Grundzustände masselos sind.

Die Zustände an den ersten drei Massenebenen sind

$$M^2=0 : \quad |R_a\rangle \quad || \quad |R_{\bar{a}}\rangle \quad (2.29)$$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} : \quad \alpha_{-1}^I |R_a\rangle, d_{-1}^I |R_a\rangle \quad || \quad \alpha_{-1}^I |R_{\bar{a}}\rangle, d_{-1}^I |R_{\bar{a}}\rangle \quad (2.30)$$

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'} : \quad \begin{array}{l} \{\alpha_{-2}^I, \alpha_{-1}^I \alpha_{-1}^J, d_{-1}^I d_{-1}^J\} |R_a\rangle \\ \{\alpha_{-1}^I d_{-1}^J, d_{-2}^I\} |R_a\rangle \end{array} \quad || \quad \begin{array}{l} \{\alpha_{-2}^I, \alpha_{-1}^I \alpha_{-1}^J, d_{-1}^I d_{-1}^J\} |R_a\rangle \\ \{\alpha_{-1}^I d_{-1}^J, d_{-2}^I\} |R_a\rangle. \end{array} \quad (2.31)$$

Die generierende Funktion lautet

$$f_R(x) = 16 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8. \quad (2.32)$$

Die Potenzreihenentwicklung ergibt

$$f_R(x) = 16 + 256x + 2304x^2 + 15360x^3 + \dots \quad (2.33)$$

Die Anzahl der Zustände ist das Doppelte der jeweiligen Zustände des NS-Sektors.

Die Zustände wurden als zwei Gruppen aufgeschrieben – links von den Doppelstrichen stehen die Zustände mit $(-1)^F = -1$ und rechts sind Zustände mit $(-1)^F = +1$. Für jeden fermionischen Zustand links gibt es einen korrespondierenden Zustand rechts, der aus einem Grundzustand mit entgegengesetzter Fermionzahl hervorging. Es gibt also die gleiche Anzahl fermionischer und bosonischer Zustände auf jeder Massenebene. Das ist ein Zeichen für *Supersymmetrie*. Allerdings Supersymmetrie auf der Weltfläche, noch nicht in der Raumzeit. Man kann die zwei Gruppen nicht mit Fermionen und Bosonen der Raumzeit identifizieren, da die Zustände $|R_a\rangle$ und $|R_{\bar{a}}\rangle$ beide wie Spinoren transformieren ([1], 14.7), was die korrekte Transformationsart der Raumzeit-Fermionen ist, aber nicht für Raumzeit-Bosonen

gelten kann. Die bosonischen Zustände $|R_a\rangle$ können auch keine weitere Art von Fermionen sein, man hätte keine Supersymmetrie mehr.

2.4 Offene Superstrings

Da alle Zustände des R-Sektors Spinor-Indizes tragen, soll dieser Sektor nur Raumzeit-Fermionen liefern. Dazu wird der R-Sektor eingeschränkt auf die Zustände mit $(-1)^F = -1$ (Zustände links in 2.29-31) – die Weltflächen-Fermionen, die nun als Raumzeit-Fermionen erkannt werden – der $\{R-\}$ -Sektor. Die Zustände mit $(-1)^F = +1$ definieren den $\{R+\}$ -Sektor. Die generierende Funktion in (2.32) reduziert sich nach der Kürzung auf

$$f_{R-}(x) = 8 \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+x^n}{1-x^n} \right)^8, \quad (2.34)$$

die Hälfte der Zustände. Entwicklung der Potenzreihe gibt

$$f_{R-}(x) = 8 + 128x + 1152x^2 + 7680x^3 + \dots \quad (2.35)$$

Acht masselose fermionische Zustände.

Im NS-Sektor gab es acht masselose bosonische Zustände.

Die Zustände des NS-Sektors tragen keine Spinor-Indizes, dieser Sektor soll die Raumzeit-Bosonen liefern. Der Grundzustand $|NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ in (2.17) ist tachyonisch mit $(-1)^F = -1$. Die masselosen Zustände $b_{-1/2}^I |NS\rangle \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle$ in (2.18) können mit den acht masselosen Photon-Zuständen eines zehndimensionalen Maxwell-Eichfeldes identifiziert werden. Diese acht bosonischen Zustände können gut mit den acht fermionischen Zuständen des $\{R-\}$ -Sektors in supersymmetrische Übereinstimmung gebracht werden. Auch der NS-Sektor kann in zwei Sektoren aufgeteilt werden: die Bosonen sollen sich fortan aus den Zuständen mit $(-1)^F = +1$ ergeben, das definiert den $\{NS+\}$ -Sektor. Der $\{NS+\}$ -Sektor enthält die masselosen Zustände, alle seine Zustände haben ganzzahlige Werte von $\alpha' M^2$; die Massenebenen stimmen mit denen des $\{R-\}$ -Sektors überein.

In der Stringtheorie offener Strings ergibt sich also durch die Kombination der Sektoren $\{R-\}$ und $\{NS+\}$ ein supersymmetrisches Spektrum. Für die generierenden Funktionen gilt ([1],

14.7) $f_{NS^+}(x) = f_{R^-}(x)$, also die Übereinstimmung in dem Entartungsgrad der Zustände.

Diese offenen Superstrings leben auf einer raumfüllenden D9-Brane. Die Theorie enthält kein Tachyonfeld, die Brane ist stabil.

2.5 Theorien geschlossener Superstrings

Geschlossene Strings erhält man durch multiplikative Kombination linkslaufender und rechtslaufender offener Strings. Da offene Superstrings durch zwei Sektoren beschrieben werden – NS und R – können vier mögliche Sektoren für geschlossene Superstrings geformt werden:

$$(NS, NS), (NS, R), (R, NS), (R, R). \quad (2.36)$$

Der erste Eintrag in den Klammern ist der linkslaufende Sektor, der zweite Eintrag der rechtslaufende Sektor.

Raumzeit-Bosonen erhält man aus den Sektoren (NS, NS) und (R, R); Raumzeit-Fermionen aus (NS, R) und (R, NS). Um auch in der Theorie geschlossener Strings Supersymmetrie zu erhalten, werden die vier Sektoren passend projiziert. Gezählt werden die Fermionen in den jeweiligen Sektoren durch die Operatoren $(-1)^{F_L}$ und $(-1)^{F_R}$.

Wählt man beispielsweise als

$$\begin{aligned} \text{Links-Sektor (} \{NS^+\} \text{ und } \{R^-\} \text{),} \\ \text{Rechts-Sektor (} \{NS^+\} \text{ und } \{R^+\} \text{),} \end{aligned} \quad (2.37)$$

dann gibt es vier Möglichkeiten diese Sektoren miteinander zu kombinieren:

$$(NS^+, NS^+), (NS^+, R^+), (R^-, NS^+), (R^-, R^+). \quad (2.38)$$

Daraus entsteht die *Typ IIA – Superstringtheorie*.

Das Massenquadrat geschlossener Strings ist gegeben durch

$$\alpha' M^2 = 2(\alpha' M_L^2 + \alpha' M_R^2), \quad (2.39)$$

dabei sollen die jeweiligen Sektoren denselben Beitrag leisten, das heißt

$$\alpha' M_L^2 = \alpha' M_R^2. \quad (2.40)$$

Masselose Zustände ergeben sich durch Kombination der masselosen Zustände der jeweiligen Sektoren¹²:

$$(NS+, NS+): \quad \bar{b}_{-1/2}^I |NS\rangle_L \otimes b_{-1/2}^J |NS\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.41)$$

$$(NS+, R+): \quad \bar{b}_{-1/2}^I |NS\rangle_L \otimes |R_b\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.42)$$

$$(R-, NS+): \quad |R_a\rangle_L \otimes b_{-1/2}^I |NS\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.43)$$

$$(R-, R+): \quad |R_a\rangle_L \otimes |R_b\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.44)$$

Es gibt 64 bosonische Zustände in (2.41) (die Zustände tragen zwei unabhängige Vektor-Indizes I, J und laufen über acht Werte), die genauso wie die masselosen Zustände der bosonischen Stringtheorie zwei Vektor-Indizes tragen - man identifiziert diese Zustände darum mit acht Graviton-Zuständen, acht Zuständen des Kalb-Ramond-Feldes und dem Dilatonfeld:

$$(NS+, NS+) \text{ masselose Felder: } g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \phi. \quad (2.45)$$

Die Zustände in (2.44) sind ebenfalls Raumzeit-Bosonen, da sie ein Produkt zweier fermionischer Grundzustände sind. Es gibt also insgesamt $2 \times 64 = 128$ masselose bosonische Zustände. Die jeweils 64 Zustände in (2.42) und (2.43) enthalten nur ein Ramond-Vakuum und sind deshalb fermionisch. Wie durch Supersymmetrie verlangt, ergibt sich bei den masselosen Zuständen die gleiche Anzahl von Bosonen und Fermionen.

Bei der Auswahl der Sektoren in (2.37) können $\{R-\}$ und $\{R+\}$ vertauscht werden; die Typ IIA-Superstrings ergeben sich, wenn die links und rechts eingeschränkten R-Sektoren unterschiedlich sind.

Sind die R-Sektoren vom demselben Typ¹³, ergeben sich andere Strings, die *Typ IIB-Superstrings*:

$$\begin{aligned} &\text{Links-Sektor (} \{NS+\} \text{ und } \{R-\} \text{),} \\ &\text{Rechts-Sektor (} \{NS+\} \text{ und } \{R-\} \text{).} \end{aligned} \quad (2.46)$$

¹² Die Zustände in Gleichungen (2.18) und (2.29).

¹³ Hier mit $\{R-\}$. Die Wahl $\{R+\}$ würde dieselben Ergebnisse liefern.

Es gibt vier Kombinationsmöglichkeiten:

$$(NS+, NS+), (NS+, R-), (R-, NS+), (R-, R-). \quad (2.47)$$

Kombinieren der jeweiligen *masselosen Zustände* ergibt hier:

$$(NS+, NS+): \quad \bar{b}_{-1/2}^I |NS\rangle_L \otimes b_{-1/2}^J |NS\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.48)$$

$$(NS+, R-): \quad \bar{b}_{-1/2}^I |NS\rangle_L \otimes |R_b\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.49)$$

$$(R-, NS+): \quad |R_a\rangle_L \otimes b_{-1/2}^I |NS\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (2.50)$$

$$(R-, R-): \quad |R_a\rangle_L \otimes |R_b\rangle_R \otimes |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (2.51)$$

Die Bosonen in (2.48) sind dieselben wie die Typ IIA-Bosonen in (2.41) Die (R-, R-)-Bosonen in (2.51) unterscheiden sich allerdings von den (R-, R+)-Bosonen in (2.44):

$$(R-, R+) \text{ masselose Felder Typ IIA: } A_\mu, A_{\mu\nu\rho}, \quad (2.52)$$

$$(R+, R+) \text{ masselose Felder Typ IIB: } A, A_{\mu\nu}, A_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (2.53)$$

Die masselosen Bosonen der Typ IIA-Theorie beinhalten das Maxwell-Feld A_μ und ein antisymmetrisches Eichfeld $A_{\mu\nu\rho}$. In der Typ IIB-Theorie erhält man ein Skalarfeld A , das Kalb-Ramond-Feld $A_{\mu\nu}$ und ein total antisymmetrisches Eichfeld mit vier Indizes $A_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Die Sektoren geschlossener Strings in (2.36) können auch anders eingeschränkt werden, als bisher besprochen, was aber nicht zur Supersymmetrie führt – der {NS-}-Sektor enthält das Tachyonfeld.

Die Typ II Theorien A und B sind zwei der möglichen Superstringtheorien. Beide kombinieren Kopien offener, rechts- und linkslaufender Superstrings um geschlossene Superstrings zu beschreiben. Zwei weitere Superstringtheorien nennt man *heterotisch* – sie kombinieren offene, linkslaufende bosonische Strings mit offenen, rechtslaufenden Superstrings. Von den 26 bosonischen Koordinaten stimmen nur zehn mit den Superstring-Koordinaten überein, sodass die Theorien zehndimensional sind. Durch ihre Symmetriegruppen charakterisiert, heißen die zwei heterotischen Superstringtheorien:

$$E_8 \times E_8 \text{ und } SO(32).$$

Die fünfte der Superstringtheorien ist die *Typ I*-Theorie. Sie enthält offene und geschlossene nicht-orientierte Strings. Das bedeutet, die Zustände der Theorie sind invariant unter der Umkehr der Stringorientierung. Die Typ I-Theorie enthält als einzige offene Strings.

3 D-Branen und Eichfelder

In diesem Kapitel soll kurz betrachtet werden wie quantisierte offene Strings in Anwesenheit unterschiedlich gearteter Konfigurationen von D-Branen beschrieben werden können und welche Felder sich dabei ergeben. Zum Schluß wird auf die Möglichkeit sich schneidender D-Branen eingegangen. Der Inhalt richtet sich nach [1], Kapitel 15.

3.1 Offene Strings auf D p -Branen

Eine D p -Brane ist ein ausgedehntes Objekt mit p räumlichen Dimensionen. Die Endpunkte offener Strings enden auf D p -Branen, was der Bewegung der Strings entlang der Branen bestimmte Randbedingungen aufzwingt – die *Dirichlet*-Randbedingungen. Nicht alle ausgedehnten Objekte der Stringtheorie sind D-Branen. So sind Strings 1-Branen, aber nicht D1-Branen. Man nennt Branen mit p räumlichen Dimensionen p -Branen. Das Weltvolumen einer p -Brane ist $(p+1)$ -dimensional.

Sei d die Gesamtzahl räumlicher Dimensionen; hier $d = 25$. Die Gesamtzahl der Raumzeit-Dimensionen ist $D = d + 1 = 26$. Eine D p -Brane mit $p < 25$ erstreckt sich über den p -dimensionalen Unterraum des 25-dimensionalen Raumes. Hier sollen D p -Branen betrachtet werden die p -dimensionale Hyperebenen im d -dimensionalen Raum sind. Zu ihrer Beschreibung sind $(d - p)$ lineare Bedingungen notwendig. Das heißt zum Beispiel, dass eine D2-Brane im dreidimensionalen Raum durch eine Bedingung festgelegt wird: $z = 0$ spezifiziert die (x, y) -Ebene; ein String entlang der z -Achse benötigt zwei lineare Bedingungen: $x = 0$ und $y = 0$. Die Anzahl der notwendigen Bedingungen entspricht der Anzahl räumlicher Koordinaten normal zu der Brane.

Die Raumzeit-Koordinaten x^μ , $\mu = 0, 1, \dots, 25$ müssen in zwei Gruppen aufgeteilt werden: Koordinaten tangential zu dem Weltvolumen der Brane – die Zeit-Koordinate und p räumliche

Koordinaten, und Koordinaten normal zu dem Weltvolumen der Brane – $(d - p)$ -Koordinaten.

$$\begin{aligned} x^0, x^1, \dots, x^p & \quad Dp \text{ tangentielle Koordinate} \\ x^{p+1}, x^{p+2}, \dots, x^d & \quad Dp \text{ normale Koordinaten} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Die Lage der Dp -Brane wird durch das Festlegen der Werte der Koordinaten normal zu der Brane spezifiziert, also durch einen Satz von $(d - p)$ -Konstanten

$$x^a = \bar{x}^a, \quad a = p+1, \dots, d. \quad (3.2)$$

Analog gilt für die String-Koordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$:

$$\begin{aligned} X^0, X^1, \dots, X^p & \quad Dp \text{ tangentielle Koordinaten} \\ X^{p+1}, X^{p+2}, \dots, X^d & \quad Dp \text{ normale Koordinaten} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die String-Koordinaten normal zu der Brane müssen Dirichlet-Randbedingungen erfüllen, da die Endpunkte offener Strings auf Dp -Branen enden,

$$X^a(\tau, \sigma=0) = X^a(\tau, \sigma=\pi) = \bar{x}^a, \quad a = p+1, \dots, d, \quad (3.4)$$

man nennt sie deshalb auch DD-Koordinaten, weil beide String-Enden die Dirichlet-Randbedingungen erfüllen. Die offenen String-Endpunkte können sich frei entlang der zu der Dp -Brane tangentialen Richtungen bewegen, die tangentialen String-Koordinaten erfüllen die Neumann-Randbedingungen:

$$X^{k'}(\tau, \sigma=0) = X^{k'}(\tau, \sigma=\pi) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p, \quad (3.5)$$

und werden NN-Koordinaten genannt.

Auch hier werden die Lichtkegel-Koordinaten benutzt; dazu wird eine räumliche Koordinate benötigt, die zusammen mit X^0 die Koordinaten X^\pm bildet; es muss also $p \geq 1$ angenommen werden.

$$\underbrace{X^+, X^-}_{NN}, \underbrace{X^i}_{DD} \quad i = 2, \dots, p, \quad a = p+1, \dots, d. \quad (3.6)$$

Bei der Quantisierung der offenen Strings auf D-Branen, müssen zwei Sätze von Koordinaten beachtet werden. Dabei erfüllen die NN-Koordinaten $X^i(\tau, \sigma)$ genau dieselben Bedingungen, wie die Lichtkegel-Koordinaten $X^I(\tau, \sigma)$ bei der Quantisierung der offenen Strings endend auf der raumfüllenden D25-Brane aus Kapitel 1. Alle Ergebnisse aus Abschnitt

1.4 gelten beim Ersetzen $I \rightarrow i$.

Für die Koordinaten $X^a(\tau, \sigma)$, die den Dirichlet-Randbedingungen unterliegen, lautet die Entwicklung der Stringkoordinate:

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}^a + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (3.7)$$

Hier gibt es keinen in τ linearen Term und der String hat keinen Netto-Impuls in x^a - Richtung – was einen String beschreibt, dessen Enden an die D-Brane gebunden bleiben müssen; bei einem nichtverschwindenden Term $p^a \tau$ müssten die String-Endpunkte nicht bei $x^a = \bar{x}^a$ für $\tau \neq 0$ bleiben, könnten sich also von der Brane „lösen“; außerdem gibt es kein zero mode α_0^a und die \bar{x}^a werden nicht zu Operatoren. Die Stringkoordinate X^a ist hermitesch, wenn $(\alpha_n^a)^\dagger = \alpha_{-n}^a$.

Das Massenquadrat ist

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a \right). \quad (3.8)$$

Mit zweierlei Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.

Die Zustände mit dem D25-Brane-Hintergrund waren $|p^+, \vec{p}\rangle$ mit $\vec{p} = (p^2, \dots, p^{25})$, einem Vektor mit den Komponenten p^i . Hier läuft der Index über a und i , es gibt aber keine Operatoren p^a (kein Impuls normal zu der Brane), sodass für die *Grundzustände* hier gilt

$$|p^+, \vec{p}\rangle, \quad \vec{p} = (p^2, \dots, p^p). \quad (3.9)$$

Es gibt Oszillatoren *entlang* der Brane

$$a_n^{i\dagger}, \quad n \geq 1, \quad i = 2, \dots, p, \quad (3.10)$$

und Oszillatoren *normal* zu der Brane

$$a_n^{a\dagger}, \quad n \geq 1, \quad a = p+1, \dots, d. \quad (3.11)$$

Die Zustände nehmen die folgende Form an

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} \prod_{i=2}^p (a_n^{i\dagger})^{\lambda_{n,i}} \right] \left[\prod_{m=1}^{\infty} \prod_{a=p+1}^d (a_m^{a\dagger})^{\lambda_{m,a}} \right] |p^+, \vec{p}\rangle. \quad (3.12)$$

Es wird angenommen, dass die Felder, die sich in dieser Theorie ergeben, auf dem $(p+1)$ -dimensionalen Weltvolumen der Dp -Brane leben. Um es zu beweisen, müssten Wechselwirkungen untersucht werden. Dazu werden geschlossene Strings, die nicht an D-Branen gebunden sind und überall in der Raumzeit existieren können, an D-Branen gestreut. Dabei wird untersucht, ob die Wechselwirkungen zwischen den Feldern aus dem Sektor geschlossener Strings und dem Sektor offener Strings auf dem Weltvolumen der D-Brane stattfinden – was tatsächlich der Fall ist. ([1], 15.2)

Leben die Felder auf der Dp -Brane, muss deren Verhalten unter Lorentz-Transformationen, die die D-Brane erhalten, betrachtet werden.

Die Grundzustände sind tachyonisch:

$$|p^+, \vec{p}\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha'}. \quad (3.13)$$

Das Tachyonfeld ist ein Lorentz-Skalar auf der D-Brane.

Die nächsten Zustände können durch zweierlei Operatoren erzeugt werden. Ein Oszillator aus tangentialen Koordinaten an der D-Brane gibt

$$a_1^{i+} |p^+, \vec{p}\rangle, \quad i=2, \dots, p, \quad M^2 = 0, \quad (3.14)$$

$(p-1)$ – masselose Zustände für alle Impulse. Die Zustände tragen einen Index, der auf der Brane lebt und transformieren wie Lorentz-Vektoren. Die Anzahl der Zustände ist dieselbe, wie die Anzahl der Polarisationsgrade für Photon-Zustände. Es handelt sich bei den Zuständen in (3.14) also um *Photon-Zustände*. Das zugehörige Maxwell-Eichfeld lebt auf der D-Brane. *Auf dem Weltvolumen einer Dp -Brane lebt ein Maxwellfeld.*

Ein Oszillator aus Koordinaten normal zu der Brane wirkt auf die Grundzustände

$$a_1^{a+} |p^+, \vec{p}\rangle, \quad a=p+1, \dots, d, \quad M^2 = 0. \quad (3.15)$$

Für alle Impulse gibt es $(d-p)$ -Zustände. Da a kein Lorentz-Index ist, werden durch a die Zustände gezählt. Sie transformieren wie Lorentz-Skalare auf der Brane. *Auf einer Dp -Brane gibt es für jede normale Richtung ein masseloses Skalarfeld.* Diese masselosen Skalare werden als masselose Anregungen der D-Brane interpretiert. Eine zu der ursprünglichen D-Brane leicht verschobene parallele D-Brane kann als eine Null-Energie-Anregung der ursprünglichen Brane angesehen werden. Es gibt genau so viele masselose Skalare wie

Richtungen normal zu der Brane, also Richtungen in die die Brane verschoben werden kann. Die masselosen Skalare sind also die Null-Energie-Anregungen der Dp -Brane. Eine D25-Brane hat keine masselosen Skalarfelder auf ihrem Weltvolumen, konsistent mit der Tatsache, dass sie nicht verschoben werden kann. ([1], 15.2).

3.2 Offene Strings zwischen parallelen D-Branen

Die Endpunkte offener Strings können nicht nur auf einer Dp -Brane enden, die Strings können zwischen zwei Branen ausgestreckt sein. Das sind *gestreckte Strings*.

Man betrachte eine Konfiguration bestehend aus zwei parallelen Dp -Branen derselben Dimensionalität¹⁴. In Abbildung 6 auf der nächsten Seite, ist die Situation für zwei D2-Branen dargestellt. Die Branen haben jeweils denselben Satz longitudinaler und normaler Koordinaten. Die erste Brane befindet sich bei $x^a = \bar{x}_1^a$, die zweite Brane bei $x^a = \bar{x}_2^a$. Für den Fall $\bar{x}_1^a = \bar{x}_2^a$, für alle a , stimmen die Branen im Raum überein – sie liegen übereinander; ansonsten sind sie getrennt. Wie in der Abbildung ersichtlich, gibt es vier unterschiedliche String-Klassen, auch Sektoren genannt, die einzeln betrachtet werden müssen: Strings, deren beide Endpunkte auf jeweils nur einer Brane liegen, bilden zwei Sektoren, die bereits im vorhergehenden Abschnitt besprochen wurden, und Strings, deren Endpunkte auf zwei unterschiedlichen Branen liegen, bilden zwei andere Sektoren. Strings, die sich von Brane 1 nach Brane 2 strecken, sind anders als Strings, die sich von Brane 2 nach Brane 1 strecken – sie unterscheiden sich in ihrer Orientierung.

Für die NN-Koordinaten X^+, X^-, X^i gelten alle entsprechenden Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes. Für die DD-Koordinaten sind die Randbedingungen nun

$$X^a(\tau, \sigma=0) = \bar{x}_1^a, \quad X^a(\tau, \sigma=\pi) = \bar{x}_2^a, \quad a = p+1, \dots, d. \quad (3.16)$$

Für einen String, ausgestreckt von Brane 1 nach Brane 2 gilt

$$X^a(\tau, \sigma) = \bar{x}_1^a + (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a) \frac{\sigma}{\pi} + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^a e^{-in\tau} \sin(n\sigma). \quad (3.17)$$

Um einen String zwischen Brane 2 und Brane 1 zu beschreiben, müssen die entsprechenden

¹⁴ Strings können auch zwischen Branen unterschiedlicher Dimensionen ausgestreckt sein, [1], 15.4.

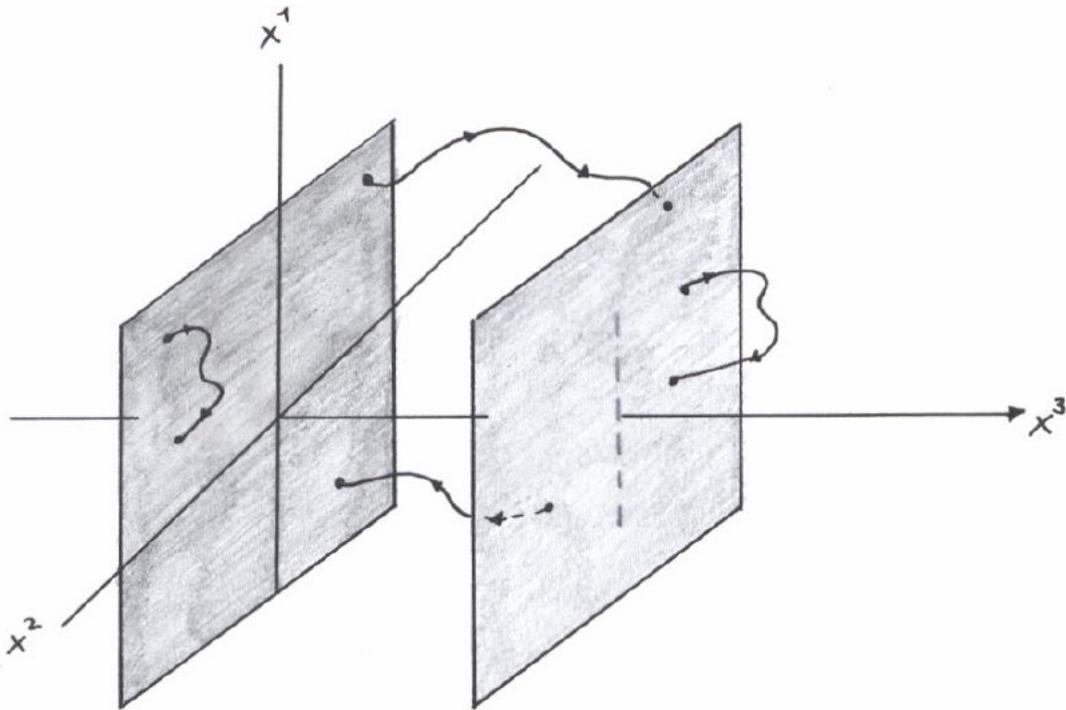


Abbildung 6: Zwei parallele D2-Branen und die vier möglichen String-Typen dieser Konfiguration. [1]

Indizes 1 und 2 vertauscht werden.

Die Konstanten \bar{x}_1^a und \bar{x}_2^a werden nicht zu Operatoren, da sie genauso wie zuvor keine String-Parameter sind. Und auch hier fehlt der Impuls in die x^a -Richtungen. Die zero modes verschwinden hier nicht – $\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^a = \frac{1}{\pi}(\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a)$ – besitzen aber auch keine Interpretation als Impuls¹⁵. Ein nicht-verschwindendes α_0^a bedeutet ausgestreckte Strings und verschwindet genau dann, wenn die zwei D-Branen übereinstimmen.

Den Massenquadrat-Operator erhält man durch $I \rightarrow (i, a)$ und Berücksichtigung der Beziehung für die zero modes.

$$M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2 + \frac{1}{\alpha'}(N^\perp - 1), \quad (3.18)$$

mit
$$N^\perp = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=2}^p n a_n^{i\dagger} a_n^i + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{a=p+1}^d m a_m^{a\dagger} a_m^a.$$

¹⁵ Um als Impuls interpretiert zu werden, müssten sie in \dot{X}^a vorkommen, sie tauchen aber nur in $X^{a'}$ auf. ([1], 15.2)

Die rechte Seite des Massenquadrats beinhaltet einen neuen Term, der der Energie eines klassischen Strings zum Quadrat entspricht¹⁶: $T_0 = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ $\rightarrow \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2 = T_0^2 (\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a)^2$. Wenn die Branen übereinstimmen, verschwindet die Konstante.

Als nächstes sollen die Grundzustände betrachtet werden, das bedeutet hier, dass Grundzustände aus vier unterschiedlichen Sektoren untersucht werden müssen. Man schreibt $|p^+, \vec{p}; [ij]\rangle$, wo i und j 1 oder 2 sind, je nachdem welche Brane sie beschreiben; dabei steht der erste Eintrag in der eckigen Klammer für die Brane an der der String beginnt: $\sigma=0$ und der zweite Eintrag für die Brane wo der String endet: $\sigma=\pi$. Es gibt vier Typen von Grundzuständen

$$|p^+, \vec{p}; [11]\rangle, |p^+, \vec{p}; [22]\rangle, |p^+, \vec{p}; [12]\rangle, |p^+, \vec{p}; [21]\rangle. \quad (3.19)$$

Die Basiszustände nehmen die Form (3.12) an. Die Oszillatoren gleichen sich in Anzahl und Typus, sind aber vollkommen andere Operatoren.

Wo die zu [12] korrespondierenden Felder leben, ist nicht einfach zu beantworten. Es handelt sich um $(p+1)$ -dimensionale Felder, die gewissermaßen auf beiden D-Branen leben. Man nimmt einen $(p+1)$ -dimensionalen Raum an, der nicht unbedingt mit den D-Branen übereinstimmen muss und geht von nichtlokalen Wechselwirkungen zwischen den Feldern aus, was widerspiegelt, dass die D-Branen getrennt sind. Die Interpretation dieser Felder in der Raumzeit verlangt ein neues Denken, dessen Basis aus der Mathematik kommt und Nichtkommutative Geometrie heißt ([1], S.342).

Die Grundzustände der zwischen den Branen ausgestreckter Strings sind¹⁷

$$|p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad M^2 = -\frac{1}{\alpha'} + \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'}\right)^2. \quad (3.20)$$

Für übereinstimmende Branen würde der zweite Term im Massenquadrat verschwinden und die Zustände entsprächen dem bereits bekannten Tachyonfeld. Durch die Trennung der D-Branen erhält das Massenquadrat einen positiven Beitrag. Für den kritischen Abstand zwischen den Branen $|\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a| = 2\pi\sqrt{\alpha'}$ handelt es sich bei den Grundzuständen um masselose Skalarfelder. Für größere Abstände sind die Grundzustände massive Skalarfelder.

¹⁶ Vergleiche mit Gleichung (1.1).

¹⁷ Für die [21]-orientierten Strings tausche man 1 und 2 gegeneinander aus.

Das Anwenden eines Oszillators auf die Grundzustände erzeugt

$$a_1^{a\dagger} |p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad a=p+1, \dots, d, \quad M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2. \quad (3.21)$$

Für jeden Impuls gibt es $(d - p)$ massive Zustände. Da a kein Lorentz-Index ist, sind diese Zustände Lorentz-Skalare und man erhält hier $(d - p)$ massive Skalarfelder.

Oszillatoren aus Koordinaten tangential zu der Brane erzeugen die Zustände

$$a_1^{i\dagger} |p^+, \vec{p}; [12]\rangle, \quad i=2, \dots, p, \quad M^2 = \left(\frac{\bar{x}_2^a - \bar{x}_1^a}{2\pi\alpha'} \right)^2. \quad (3.22)$$

Für jeden Impuls gibt es $(p - 1)$ massive Zustände¹⁸ und sie tragen einen zu der $(p + 1)$ -dimensionalen Raumzeit korrespondierenden Index – man könnte denken, es handelt sich bei den Zuständen um das massive Maxwell-Eichfeld, was aber noch nicht ganz richtig ist.

Ein massives Eichfeld besitzt einen Freiheitsgrad mehr als ein masseloses Eichfeld ([1], Aufgabe 10.7). In einer D -dimensionalen Raumzeit hat es also $(D - 1)$ Zustände für jeden Impulswert. Den Zuständen in (3.22) fehlt also noch ein Freiheitsgrad um das Maxwell-Eichfeld repräsentieren zu können. Dazu muss einer der skalaren Zustände aus (3.21) zu den $(p - 1)$ Zuständen in (3.22) hinüber wechseln. Das ergibt dann für die ersten angeregten Zustände einen massiven Vektor und $(d - p - 1)$ massive Skalare.

Geht der Abstand zwischen den Branen gegen Null, so stimmen sie zwar überein, können aber immer noch unterschieden werden und es bleibt bei den vier Sektoren offener Strings. Allerdings bekommen die Sektoren, die ursprünglich zwischen den Branen ausgestreckter Strings, den Feldinhalt der Sektoren, dessen beide Stringenden auf einer Brane lagen. Das bedeutet, dass es bei zwei übereinstimmenden D-Branen vier masselose Eichfelder gibt. Diese Eichfelder können miteinander wechselwirken – indem sich String-Endpunkte vereinen. Theorien wechselwirkender Eichfelder sind die *Yang-Mills-Theorien*, die bei der Beschreibung schwacher und starker Wechselwirkungen genutzt werden. Auf dem Weltvolumen zweier übereinstimmender D-Branen ergibt sich eine $U(2)$ Yang-Mills-Theorie, es gibt zwar noch zusätzliche Wechselwirkungen, die jedoch bei niedrigen Energien

18 $\{(p + 1) - 2\}$ -Zustände

vernachlässigt werden können. Die 2 in $U(2)$ bedeutet, dass es sich um zwei übereinstimmende D-Branen handelt.

Bei N übereinstimmenden D_p -Branen gibt es N^2 Sektoren und N^2 masselose Eichfelder.

Bei einer einzelnen Brane bedeutet das eine $U(1)$ ¹⁹ Yang-Mills-Theorie, was gerade der Maxwell-Theorie entspricht; und tatsächlich wurde bereits festgestellt, dass jede D-Brane ein Maxwellfeld trägt²⁰.

Die bereits erwähnte $U(2)$ Yang-Mills-Theorie beschreibt im Standardmodell der Teilchenphysik die Elektroschwache Theorie, deren vier Eichbosonen γ, W^+, W^- und Z^0 sind. Abgesehen von dem Photon γ , handelt es sich dabei um massive Eichbosonen, die durch den Higgs-Mechanismus ihre Masse erhalten haben. Der Higgs-Mechanismus könnte hier dadurch realisiert werden, dass die zuvor übereinstimmenden D-Branen mit den masselosen Eichfeldern, auseinander gezogen werden. Allerdings würden nur zwei der String-Sektoren dadurch Masse erhalten, zwei würden masselos bleiben, im Widerspruch zu den elektroschwachen Eichbosonen. Eine Branen-Konfiguration sich *schneidender* D-Branen kann zu einem Teilchenmodell mit dem Inhalt des Standardmodells führen. Die Branen werden derart auseinander gezogen, dass sie sich kreuzen; bei ganz bestimmten Abständen und Schnittwinkeln zwischen den Branen kann es dann zur Entstehung des Higgs-Skalarfeldes kommen [3].

Zwischen Branen ausgestreckte Strings können miteinander wechselwirken. Abbildung 7 auf der nächsten Seite zeigt den möglichen Ablauf.

In einem typischen Prozess vereinen sich zwei Strings zu einem einzigen String. Dabei vereint sich das Ende des ersten Strings mit dem Anfang des zweiten Strings. Das ist möglich, weil je ein Ende der beiden Strings auf einer Brane liegen. Vereinen sich die Endpunkte, so sind sie nicht mehr an die Brane gebunden und können diese verlassen. Der String aus dem $[ij]$ Sektor bildet mit dem String aus dem $[jk]$ Sektor einen Produkt-String im $[ik]$ Sektor: $[ij]*[jk] = [ik]$ über j nicht summiert. (3.23)

¹⁹ $U(1)$ bezeichnet eine Gruppe, deren Elemente komplexe Zahlen mit Einheitslänge sind. Gruppen-Multiplikation ist einfache Multiplikation. An jedem Raumzeit-Punkt sind die Eichparameter der Maxwell-Theorie Elemente der $U(1)$.

²⁰ Im Absatz nach Gleichung (3.14).

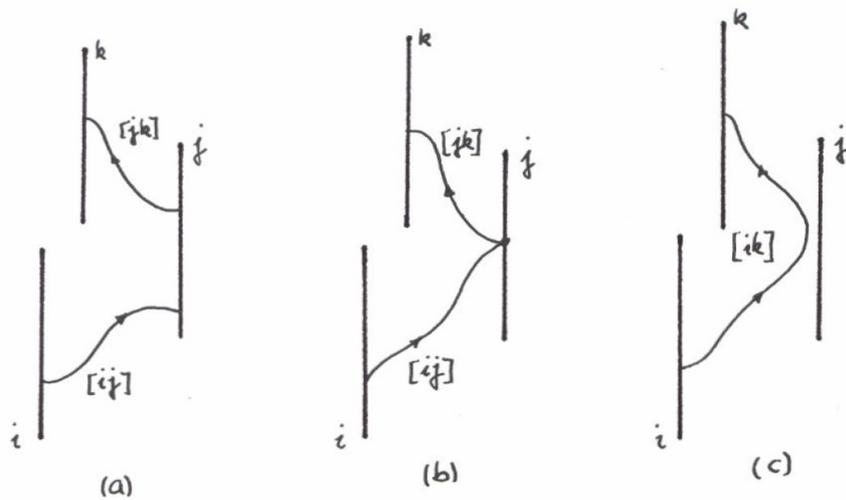


Abbildung 7: (a) Drei D-Branen und Strings in den Sektoren $[ij]$ und $[jk]$.
 (b) Die Strings wechselwirken miteinander, indem das Ende des Strings des $[ij]$ Sektors den Anfang des Strings des $[jk]$ Sektors trifft.
 (c) Der resultierende String des $[ik]$ Sektors. [1]

3.3 Sich schneidende D-Branen

Wie erwähnt, kann eine Konfiguration aus sich schneidenden D-Branen zu einem String-Modell der Teilchenphysik führen. Dazu werden Fermionen benötigt, deshalb wird mit der zehndimensionalen Superstringtheorie gearbeitet. Sechs der zehn Raumzeit-Dimensionen formen einen kompakten, kleinen Raum endlichen Volumens, was notwendig ist, um effektiv eine vierdimensionale Raumzeit zu erhalten. Der kompakte Raum ist so einfach wie möglich aufgebaut: jede Dimension ist zu einem Kreis zusammengerollt, sodass der resultierende Raum ein sechsdimensionaler Torus T^6 ist. Alle Kreise sollen denselben Radius haben und es ist $x^i \sim x^i + 2\pi R$, $i=4, \dots, 9$.

Um eine vierdimensionale Yang-Mills-Theorie zu bekommen, werden D-Branen benötigt, deren mindestens drei Raumdimensionen sich entlang der Raumdimensionen x^1, x^2 und x^3 der effektiven Raumzeit erstrecken. Es müssen Dp -Branen mit $p \geq 3$ sein. Tatsächlich ist es möglich mit D6-Branen in der Typ IIA²¹-Superstringtheorie das Standardmodell der Teilchenphysik zu modellieren. Die restlichen drei Raumdimensionen der D6-Branen liegen

²¹ Eine andere Wahl ist möglich.

auf dem Torus. Die D6-Branen sollen sich schneiden – das heißt die Dimensionen auf dem Torus schneiden sich – was zu einem Sektor offener Strings führt, die sich von einer Brane zu der anderen erstrecken und nahe der Schnittpunkte liegen. Unter gewissen Umständen ergeben solche Strings Materiefelder mit Eigenschaften der Fermionen des Standardmodells.

Die Konfiguration zweier D6-Branen, a und b , deren jeweils drei Richtungen auf den Torus $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$ gewickelt sind, ist spezifiziert durch

$$\text{D6-Brane } a: \quad (l_1^{(a)}, l_2^{(a)}, l_3^{(a)}),$$

$$\text{D6-Brane } b: \quad (l_1^{(b)}, l_2^{(b)}, l_3^{(b)}).$$

Eine Linie l_i entspricht der Richtung der D-Brane auf dem i -ten Torus T^2 . Durch die drei orientierten Linien ist die Orientierung des dreidimensionalen Unterraums der D6-Brane, der auf dem Torus liegt, gegeben. Allgemein gilt: *Die Orientierung eines k -dimensionalen Raumes ist definiert durch die Wahl eines geordneten Satzes von k linear unabhängigen Vektoren.* Hier (l_1, l_2, l_3) .

Die D-Branen können sich mehr als nur einmal auf dem Torus schneiden, die Anzahl ist gegeben durch die *Schnittzahl*

$$I_{ab} = \prod_{i=1}^3 \#(l_i^{(a)}, l_i^{(b)}). \quad (3.24)$$

4 Modellierung des Standardmodells auf sich schneidenden D-Branen

Das Standardmodell der Teilchenphysik enthält die Eichbosonen der Wechselwirkungen (außer der Gravitation) – γ , W^\pm , Z und die 8 Gluonen – und drei Fermion-Familien: die Leptonen – $e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$ und die Quarks – u, d, s, c, b, t . Das Higgs-Boson verleiht den Teilchen ihre Massen. Ein String-Modell der Teilchenphysik muss alle Wechselwirkungen und alle Materie-Teilchen korrekt beschreiben und auch die *chiralen* Fermionen erklären können. Die Modellierung des Standardmodells erfolgt anhand der Darstellung in [1], Kapitel 21 und ist wie dort quantitativer Natur.

4.1 D-Branen und die Eichgruppe des Standardmodells

Auf dem Weltvolumen von N übereinstimmenden D-Branen leben $U(N)$ Eichfelder oder Eichbosonen, deren Dynamik bei niedrigen Energien durch die Yang-Mills-Theorie mit der Eichgruppe $U(N)$ bestimmt wird. Auch alle Eichbosonen des Standardmodells werden durch Yang-Mills-Theorien beschrieben.

Die Eichbosonen der Starken Wechselwirkung – acht Gluonen – werden durch die vierdimensionale $SU(3)$ Yang-Mills-Theorie beschrieben. Die verwandte $U(3)$ Yang-Mills Theorie ergibt sich bei niedrigen Energien auf dem Weltvolumen von drei übereinstimmenden D3-Branen. Die D-Branen-Konfiguration ist in Abbildung 8 dargestellt, man stelle sich die drei Branen als übereinstimmend vor. Es gibt neun Sektoren offener Strings $[ij]$, mit $i, j = 1, 2, 3$. Der erste Eintrag zeigt wo der String beginnt, der zweite Eintrag in der eckigen Klammer wo der String endet. Jeder Sektor enthält String-Zustände die Eichfelder repräsentieren.

Jede der drei D-Branen trägt ein eigenes Maxwell-Eichfeld $A_\mu^{(i)}$, ($i=1,2,3$) – die Strings, deren beide Enden auf einer Brane liegen – das mit den Zuständen $\alpha_{-1} | [ii] \rangle$ assoziiert werden kann. Die Maxwellfelder können nicht miteinander wechselwirken, die Regel (3.23) verbietet es, was aber auch anschaulich klar ist, denn die Endpunkte der Strings liegen auf jeweils unterschiedlichen Branen und haben keine Möglichkeit sich zu vereinen. Sie wechselwirken auch nicht mit sich selbst, da Maxwellfelder freie Felder sind. Sie wechselwirken allerdings mit jedem Zustand der ihre Ladung trägt.

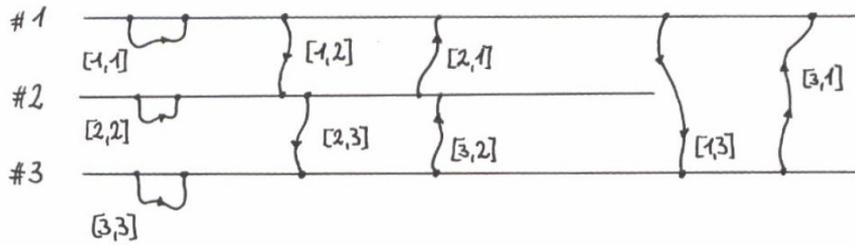


Abbildung 8: Drei übereinstimmende D-Branen und die Eichbosonen der $U(3)$. Der Übersichtlichkeit wegen, sind die Brannen getrennt gezeichnet. [1]

Die String-Zustände sind durch die Werte ihrer Ladungen (q_1, q_2, q_3) bezüglich der Maxwellfelder $A_\mu^{(i)}$ charakterisiert. Ein orientierter String trägt eine Einheit negativer Ladung an seinem $\sigma=0$ Endpunkt und eine Einheit positiver Ladung an seinem $\sigma=\pi$ Endpunkt. So hat beispielsweise der String im $[12]$ Sektor die Ladungen $(-1, 1, 0)$. Die Summe aller drei Ladungen ergibt immer Null. Strings deren beide Endpunkte auf einer D-Brane liegen sind selbst ungeladen, alle drei Einträge sind Null.

Es soll möglich sein, die neun Eichfelder auf den drei Brannen in zwei Sätze nicht miteinander wechselwirkender Felder aufzuteilen. Der eine Satz hat acht Eichfelder, der zweite Satz hat nur ein Eichfeld, das Maxwell-Eichfeld $\bar{A}^{(3)}$ des Zustandes

$$|s_3\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}(\alpha_{-1} |[11]\rangle + \alpha_{-1} |[22]\rangle + \alpha_{-1} |[33]\rangle). \quad (3.25)$$

Dieses Eichfeld wechselwirkt mit keinem der anderen acht Eichfelder. Da Maxwellfelder nur mit geladenen Objekten wechselwirken, trägt keines der Felder die Ladung des $\bar{A}^{(3)}$ Eichfeldes. Man sagt $\bar{A}^{(3)}$ ist von den anderen acht Feldern entkoppelt.

Die $U(3)$ Yang-Mills-Theorie auf den drei übereinstimmenden Brannen enthält also eine entkoppelte $U(1)$ Theorie. Die restlichen acht Eichfelder definieren die $SU(3)$ Eichtheorie. Für unabhängig agierende Gruppen kann man schreiben²²

$$U(3) = SU(3) \times U(1). \quad (3.26)$$

Die acht Gluonen der Quantenchromodynamik werden durch eine $SU(3)$ Eichgruppe

²² Allgemein $U(N) = SU(N) \times U(1)$. $U(N)$ besitzt N^2 Eichfelder, $SU(N)$: (N^2-1) Eichfelder.

beschrieben.

Die *Eichgruppe*

$$SU(3)_F \times SU(2)_w \times U(1)_Y \quad (3.27)$$

beschreibt den vollen Satz der Eichbosonen *des Standardmodells*. F steht für *Farbe* (die Ladung der starken Wechselwirkung), w für Schwache Wechselwirkung und Y für Hyperladung.

Die elektroschwache Yang-Mills-Theorie wird durch $SU(2)_w \times U(1)_Y$ beschrieben, die $SU(2)_w$ enthält drei Eichbosonen. Um sie im Bild übereinstimmender D-Branen zu realisieren, werden zwei weitere übereinstimmende D-Branen benötigt, die nicht mit den drei Branen der $SU(3)_F$ übereinstimmen. Das würde insgesamt ergeben

$$U(3) \times U(2) = SU(3) \times SU(2) \times U(1) \times U(1). \quad (3.28)$$

Die beiden $U(1)$ hier können allerdings nicht dazu genutzt werden die Hyperladung aus (3.27) zu bilden, da auch den Fermionen im Standardmodell die korrekten Werte für die Hyperladung zugewiesen werden müssen, hier aber bisher nur Bosonen beschrieben werden. Es wird notwendig sein zwei weitere übereinstimmende D-Branen einzuführen.

4.2 Offene Strings und die Fermionen des Standardmodells

Die Eichgruppe des Standardmodells (3.27) kann nur masselose Fermionen beschreiben.

Durch spontane Symmetriebrechung erhalten die Fermionen Masse und (3.27) reduziert sich auf die Eichgruppe, die bei niedrigen Energien beobachtet wird

$$SU(3)_F \times U(1)_{em}. \quad (3.29)$$

Die aber zunächst masselosen Fermionen können durch ihre Helizität charakterisiert werden. Rechtshändige Fermion-Zustände haben Helizität gleich $+\frac{1}{2}$, linkshändige Fermionen den Wert $-\frac{1}{2}$. Nur bei masselosen Teilchen ist die Helizität eine lorentzinvariante Größe. Bezeichne f das Teilchen und \bar{f} das Antiteilchen. Es gibt Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für rechts- und linkshändige Teilchen und für die jeweilige Händigkeit von Antiteilchen. Für die Erzeugungsoperatoren schreibt man beispielsweise

$$(f_L^\dagger, f_R^\dagger), (\bar{f}_L^\dagger, \bar{f}_R^\dagger). \quad (3.30)$$

In der Quantenfeldtheorie ergibt sich eine wichtige Eigenschaft der Fermionen: bei Festlegung der Ladung eines *linkshändigen* Teilchens, wird die Ladung des *rechtshändigen Antiteilchens* bestimmt; die Ladungen sind entgegengesetzt.

$$\begin{aligned} f_L^\dagger &\leftarrow \text{entgegengesetzt geladen} \rightarrow \bar{f}_R^\dagger \\ f_R^\dagger &\leftarrow \text{entgegengesetzt geladen} \rightarrow \bar{f}_L^\dagger \end{aligned} \quad (3.31)$$

Die beiden Linien sind unabhängig voneinander und müssen nicht beide in einer Theorie vorkommen.

Es ist eine zentrale Eigenschaft aller Fermionen des Standardmodells, dass sie *chiral* sind. Man sagt ein Fermion ist chiral, wenn die rechts- und linkshändigen Teilchen-Zustände nicht dieselben Ladungen tragen.

Die Ladung eines Teilchens beschreibt seine Reaktion auf Eichbosonen, sodass unterschiedlich geladene rechts- und linkshändige Teilchen unterschiedlich auf dieselben Eichbosonen reagieren. Solange die chirale Eichsymmetrie ungebrochen bleibt, können die Fermionen keine Masse erwerben. Chirale Fermionen sind also masselose Fermionen. Da die Symmetrie gebrochen ist, erhalten die Fermionen ihre Massen und die Eichgruppe (3.27) reduziert sich auf (3.29). Die Massenskala wird durch die Massenparameter des für die Symmetriebrechung verantwortlichen Higgs-Sektors gesetzt.

Die Materie im Standardmodell ordnet sich, der Masse nach, in drei Generationen an, jede davon enthält dieselbe Anzahl identisch geladener Teilchen, Quarks und Leptonen. Die erste Generation enthält die leichtesten Teilchen, die dritte Generation die schwersten. Da es hier in erster Linie vor allem um die Ladungen geht, genügt es nur eine Generation zu betrachten. Außerdem werden nur die linkshändigen Ladungen aller Zustände untersucht, also die Ladungen linkshändiger Teilchen sowie die Ladungen linkshändiger Antiteilchen. Aufgrund von (3.31) folgen daraus die Ladungen für die rechtshändigen Fermionen.

Zunächst die Quarks der ersten Generation: Sie unterliegen der $SU(3)$ -Farbkraft, da sie die Ladung *Farbe* tragen. Die Ladung kommt in drei unterschiedlichen Varianten vor: *rot* (r), *blau* (b) und *grün* (g), sodass es jeweils drei unterschiedliche linkshändige Quarks gibt:

$$q_L^r, q_L^b, q_L^g. \quad (3.32)$$

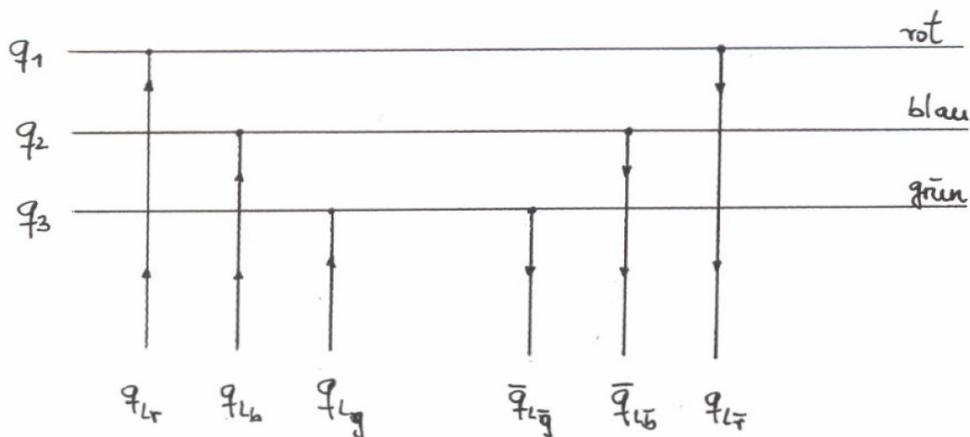


Abbildung 9: Die linkshändigen Quarks sind offene Strings, die auf einer der Farb-Branen enden – je nach der Farbe die sie tragen; die Antiteilchen beginnen auf den Farb-Branen. [1]

Man nennt diese drei Zustände *Darstellung 3* der Gruppe $SU(3)$: $q_L \sim \mathbf{3}$. Die Farbkraft wirkt nicht chiral, die linkshändigen Antiteilchen tragen die entgegengesetzten Ladungen – anti-rot \bar{r} , anti-blau \bar{b} , anti-grün \bar{g} . Man schreibt $\bar{q}_L \sim \bar{\mathbf{3}}$. In der Gruppentheorie bezeichnet man $\mathbf{3}$ und $\bar{\mathbf{3}}$ als *zueinander konjugierte Darstellungen*.

Die Eichbosonen der Farbkraft, die acht Gluonen, ergaben sich aus einer Konfiguration dreier übereinstimmender Branen (vergleiche Abbildung 8). Jede dieser Branen trägt eine der Farbladungen rot, blau bzw. grün – es gibt also eine rote Brane, eine blaue Brane und eine grüne Brane. Gluonen sind offene Strings, deren *beide* Endpunkte in dieser Branen-Konfiguration liegen. Quarks sind Strings, die *nur einen* ihrer Endpunkte auf einer dieser Branen haben. So ist beispielsweise ein offener String, der auf einer roten Brane *endet*, ein linkshändiges rotes Quark. Sein Antiteilchen ist ein offener String, der auf der roten Brane *beginnt*. Der Sachverhalt ist in Abbildung 9 dargestellt. Diese drei $SU(3)_F$ Branen bezeichnet man als *Farb-Branen* oder *baryonische Branen*.

Es soll möglich sein die $SU(3)$ -Ladungen genauso wie die String-Zustände durch ihre Maxwell-Ladungen zu charakterisieren. Die drei Ladungen (q_1, q_2, q_3) definieren die $U(3)$ Ladung eines Zustandes. Die Ladung des entkoppelten $U(1)$ ist proportional zu $(q_1+q_2+q_3)$. Definiert man das Paar (a_1, a_2) durch

$$(a_1, a_2) \equiv (q_1 - q_2, q_2 - q_3), \quad (3.33)$$

dann sind die linkshändigen Quarks aus (3.32) charakterisiert durch

$$\mathbf{3}: q_L^r \equiv (1, 0), \quad q_L^b \equiv (-1, 1), \quad q_L^g \equiv (0, -1). \quad (3.34)$$

Für die drei linkshändigen Antiquarks gilt

$$\bar{\mathbf{3}}: \bar{q}_L^r \equiv (-1, 0), \quad \bar{q}_L^b \equiv (1, -1), \quad \bar{q}_L^g \equiv (0, 1).$$

Wie gehabt, trägt das Ende des Strings, das auf einer Brane endet, eine Einheit positiver Ladung und das Ende, das auf einer Brane beginnt, eine Einheit negativer Ladung.

Das Paar (a_1, a_2) ist ein *Gewichtsvektor*, die beiden Einträge werden *Dynkin Labels* genannt.

Die Quarks tragen neben den $SU(3)_F$ Ladungen auch $SU(2)_w$ Ladungen. Die Darstellung der $SU(2)$, die *Isospin*-Darstellung $I = \frac{1}{2}$ für linkshändige Quarks, hat zwei Zustände: einen mit $I_3 = \frac{1}{2}$ und einen mit $I_3 = -\frac{1}{2}$, I_3 ist die dritte Isospin-Komponente. Für eine bestimmte Farbe ist der Zustand mit dem Wert $I_3 = \frac{1}{2}$ ein *up*-Quark (u), und der Zustand mit $I_3 = -\frac{1}{2}$ ein *down*-Quark (d). Die beiden Quarks – u_L und d_L – bilden ein $SU(2)_w$ -Dublett, die Darstellung $\mathbf{2}$ der Gruppe $SU(2)$. Da es Quarks in drei Farbladungen gibt, gibt es drei $SU(2)$ -Dubletts.

Für die $U(2) = SU(2)_w \times U(1)$ Theorie werden zwei weitere übereinstimmende D-Branen benötigt, dort kann das bisher freie Ende der Quarks beginnen. Man nennt sie *Links-Branen*. Linkshändige Quarks sind also offene Strings, die auf einer der Links-Branen beginnen und auf einer der Farb-Branen enden. Beispielsweise ist ein offener String, der auf einer der Links-Branen beginnt – Brane 1 – und auf einer Farb-Brane endet, ein linkshändiges u -Quark. Ein offener String der auf der anderen der Links-Branen beginnt – Brane 2 – und auf den Farb-Branen endet, ist ein linkshändiges d -Quark.

Die Links-Branen tragen die Ladungen \bar{q}_1 bzw. \bar{q}_2 für Brane 1 bzw. 2. Diese Ladungen definieren die $U(2)$ Ladung eines Zustandes. Die Ladung des entkoppelten $U(1)$ ist proportional zu $(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$. Man setzt

$$a_3 \equiv \bar{q}_1 - \bar{q}_2. \quad (3.35)$$

Zwischen diesem Dynkin-Label und der dritten Komponente des Isospins besteht eine lineare Beziehung:

$$I_3 = -\frac{a_3}{2}. \quad (3.36)$$

Für einen String auf Brane 1 sind die Ladungen $(-1, 0)$, dann ist $a_3 = -1$ und $I_3 = \frac{1}{2}$, das entspricht einem u -Quark.

Die gesamte Branen-Konfiguration zur Beschreibung der ersten Quark-Generation muss also aus drei übereinstimmenden Farb-Branen und zwei übereinstimmenden Links-Branen bestehen. Ob die beiden Sätze selbst übereinstimmen oder nicht, solange sie parallel sind, ergeben sich nicht die Quarks des Standardmodells – die Quarks sind nicht chiral. Bei übereinstimmenden Sätzen werden linkshändige Quarks und rechtshändige Quarks mit genau denselben Ladungen produziert. Werden die beiden Sätze getrennt, bleiben aber parallel, erhalten die Quarks Masse und können nicht chiral sein.

Es ist möglich die Quarks des Standardmodells zu reproduzieren, wenn sich die Farb-Branen mit den Links-Branen *schneiden*. Man beginnt mit parallelen Branen und schiebt sie derart auseinander, dass sie sich kreuzen. Bei auseinander laufenden Branen werden einige Zustände massiv; unter günstigen Umständen wird in der Nähe der Schnittpunkte nur eine der Linien der Zustände aus (3.31) produziert, diese Zustände bleiben masselos und sind chiral. Es gibt sechs Schnittpunkte um die sechs benötigten Quarks zu formen – drei up -Quarks und drei $down$ -Quarks. Abbildung 10 zeigt die Branen-Konfiguration und die darin entstehenden Quarks. Die Antiquarks erhält man durch Umkehr der Orientierung – es sind *rechtshändige* Antiteilchen, wie im Standardmodell verlangt.

Eine übliche Notation im Standardmodell fasst die Informationen über Darstellungen und Ladungen für ein Teilchen zusammen: $(Farbe, Isospin)_Y$. Y ist die Hyperladung. Für alle drei u_L Quarks und alle drei d_L Quarks ist $Y = 1/6$. Dann kann man für die sechs Quark-Zustände zusammenfassend schreiben

$$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}. \quad (3.37)$$

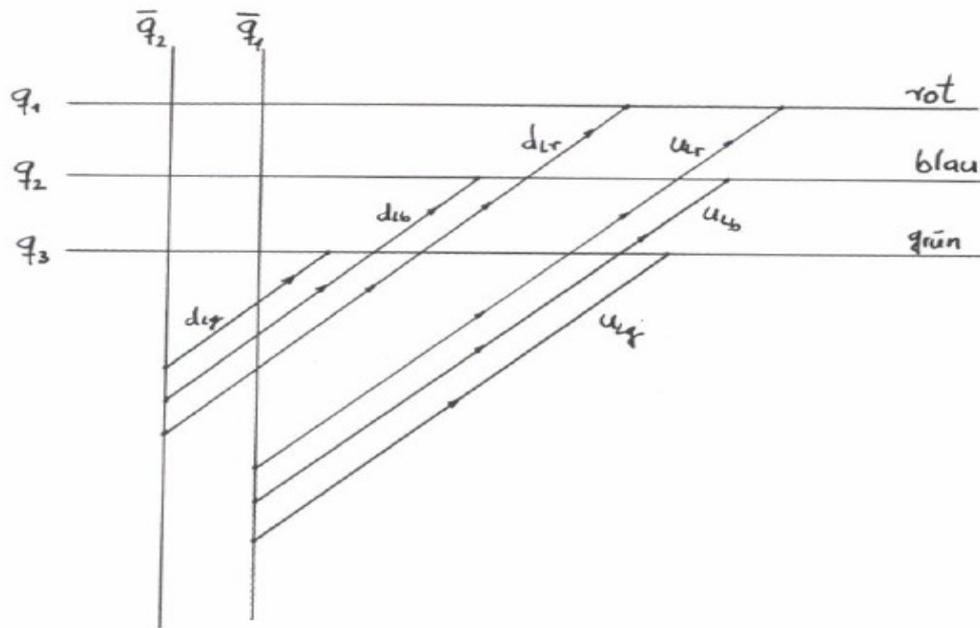


Abbildung 10: Linkshändige Quarks erstrecken sich von den Links-Branen zu den Farb-Branen. [1]

Die Zahlen in der Klammer, die die Darstellungen bezeichnen, sind gleich der Anzahl der Zustände in der jeweiligen Darstellung – das Produkt dieser zwei Zahlen ergibt die Gesamtanzahl der Zustände: $3 \times 2 = 6$.

Die Hyperladung setzt sich aus den Hyperladungen der Brannen-Sätze und den entkoppelten $U(1)$ -Ladungen der Brannen zusammen. Die Farb-Branen sollen eine Hyperladung von $Y = -1/3$ tragen, die Links-Branen $Y = -1/2$. Die $U(1)$ -Ladungen sind Q_1 und Q_2 für die Farb- bzw. die Links-Branen mit

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1 + q_2 + q_3 \\ Q_2 &= \bar{q}_1 + \bar{q}_2. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Die $U(1)$ -Ladungen der Strings, deren beide Endpunkte auf einem der Brannen-Sätze liegen sind gleich Null. Ein linkshändiges Quark, das auf einer Links-Brane beginnt und auf einer Farb-Brane endet, hat $Q_1 = 1$ und $Q_2 = -1$. Seine Hyperladung erhält man aus

$$Y = -\frac{1}{3} Q_1 - \frac{1}{2} Q_2 - \dots \quad (3.39)$$

Die Punkte stehen für Beiträge zusätzlicher D-Branen, die später hinzukommen müssen, hier

aber keinen Beitrag leisten.

Die linkshändigen *Antiquarks* \bar{u}_L und \bar{d}_L erhält man nicht durch die Orientierungsumkehr der bisher besprochenen Quarks, weil die elektroschwache Wechselwirkung chiral agiert – man würde *rechtshändige* Antiquarks bekommen. Tatsächlich sind die linkshändigen Antiquarks \bar{u}_L und \bar{d}_L jedes ein $SU(2)$ -Singulett mit jeweils der Darstellung $\mathbf{1}$. Ihre Endpunkte beginnen auf den Farb-Branen und enden auf jeweils einer *zusätzlichen* D-Brane mit der Ladung Q_3 und einer Hyperladung von -1 für das \bar{u}_L bzw. keinem Beitrag zur Hyperladung für das \bar{d}_L – dann ergeben sich mit (3.39) die korrekten Hyperladungen der linkshändigen Antiquarks. Zusammenfassend sind die Darstellungen der ersten Generation linkshändiger Quarks

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6}, \quad \bar{u}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3}, \quad \bar{d}_L \sim (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3}. \quad (3.40)$$

Dazu gehören auch die jeweiligen rechtshändigen Zustände.

Die linkshändigen Leptonen der ersten Generation sind das Elektron, das Elektron-Neutrino, das Positron und das Antineutrino. Die Leptonen unterliegen nicht der Starken Wechselwirkung, tragen also keine Farbladungen – sind in der $SU(3)$ Darstellung $\mathbf{1}$. Das Elektron und sein Neutrino bilden ein $SU(2)$ -Dublett mit der Hyperladung $Y = -1/2$. Das Positron und das Antineutrino sind $SU(2)$ -Singuletts mit den Hyperladungen 1 bzw. 0 . Zusammenfassend ist

$$\begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2}, \quad e_L^+ \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1, \quad \bar{\nu}_{eL} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0. \quad (3.41)$$

Die linkshändigen Antineutrinos sind Singuletts der Starken und der Schwachen Wechselwirkungen und auch der Hyperladung – sie wurden bisher nicht experimentell bestätigt, könnten aber existieren, da den Neutrinos (geringfügige) Massen nachgewiesen werden konnten. Das Dublett endet auf einer der Links-Branen, muss aber auf einer zusätzlichen Brane beginnen. Die beiden Singuletts verlangen nach zusätzlichen Branen für ihre beiden Endpunkte – die Leptonen benötigen also insgesamt *drei weitere* D-Branen. Die gesamte Branen-Konfiguration wird im nächsten Abschnitt besprochen.

Die Zustände in (3.40) und (3.41) mit ihren zugehörigen rechtshändigen Antiteilchen, bilden den Materieinhalt des Standardmodells, wenn beachtet wird, dass es zwei weitere Kopien all dieser Zustände gibt, die sich lediglich in ihren Massen von der ersten Generation unterscheiden.

Die elektrische Ladung der Zustände kann aus

$$Q_{em} = Y + I_3 \quad (3.42)$$

errechnet werden. Sie ist eine Linearkombination aus der Hyperladung und der dritten Isospin-Komponente. Für die zwei Quarks der ersten Generation ist beispielsweise

$$\begin{aligned} Q_{em}(u_L) &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \\ Q_{em}(d_L) &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Für die linkshändigen Antiteilchen gilt

$$\begin{aligned} Q_{em}(\bar{u}_L) &= -\frac{2}{3} + 0 = -\frac{2}{3}, \\ Q_{em}(\bar{d}_L) &= \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die elektromagnetische Wechselwirkung ist also nicht chiral, weil die Ladungen linkshändiger Teilchen und linkshändiger Antiteilchen entgegengesetzt sind – links- und rechtshändige Zustände werden von der Wechselwirkung nicht unterschieden.

Der vollständige Satz linkshändiger Zustände im Standardmodell lautet

$$3 \times [(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{1/6} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-2/3} + (\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{1/3} + (\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-1/2} + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_1 + (\mathbf{1}, \mathbf{1})_0]. \quad (3.45)$$

4.3 Das Standardmodell auf sich schneidenden D6-Branen

Man erhält Fermionen des Standardmodells, wenn sich die D-Branen, auf denen die String Endpunkte liegen, kreuzen. In der Nähe der Schnittpunkte können Zustände linkshändiger Teilchen und ihre rechtshändigen Antiteilchen entstehen. Bei den Branen soll es sich um D6-Branen im Rahmen der Typ IIA-Superstringtheorie handeln, die auf einen T^6 Torus

gewickelt sind (vergleiche auch Abschnitt 3.3). Das Modell hat vor der Symmetriebrechung alle masselosen Zustände des Standardmodells, aber auch einige zusätzliche Teilchen.

Die Tatsache, dass das Standardmodell seinen Materieinhalt dreimal reproduziert, muss auch durch die D-Branen-Konfiguration erklärbar sein. Das wird möglich, wenn man annimmt, dass sich die D-Branen *mehrfach* schneiden, um genauer zu sein – drei Mal! Die erste Generation der Fermionen entsteht bei dem ersten Schnittpunkt der Branen, die zweite Generation bei dem zweiten Schnittpunkt und die dritte Generation beim dritten Schnittpunkt der Branen. Wie oft sich die Branen tatsächlich schneiden ist durch die Schnitzzahl (3.24) gegeben: $I_{ab} = \prod_{i=1}^3 \#(l_i^{(a)}, l_i^{(b)})$, die ihrerseits durch die Art der Windung bestimmt ist, die sich in den Linien l_i ausdrückt. Die expliziten Werte für die l_i können nicht hergeleitet werden und müssen hier als gegeben angenommen werden²³. Der Betrag der Schnitzzahl gibt die Anzahl der Zustände an den Schnittpunkten der Branen-Sätze an, das Vorzeichen die Orientierung der Strings. Wenn $I_{ab} > 0$, sind die Zustände Strings, die sich von Brane b zu Brane a erstrecken. Wenn $I_{ab} < 0$, erstrecken sich die Strings von Brane a zu Brane b . Die Orientierung der Strings bestimmt die Ladungen der linkshändigen Zustände. Die an den Schnittpunkten produzierten Strings sind chiral im Sinne von (3.31) – nur ein minimaler Fermionen-Satz wird produziert. Die entgegengesetzt orientierten Strings an dem Schnittpunkt repräsentieren die entgegengesetzt geladenen rechtshändigen Antiteilchen, wie durch (3.31) verlangt.

Bezeichne $N_1 = 3$ den ersten Satz von Branen, die drei baryonischen Branen, und stehe $N_2 = 2$ für die zwei Links-Branen.

Die drei baryonischen Branen müssen sich mit den zwei Links-Branen schneiden um die Quarks der ersten Generation zu erzeugen. Die zwei Branen-Sätze müssen sich dreimal schneiden, um alle drei Quark-Generationen zu produzieren.

Des Weiteren wurde in Abschnitt 4.2 festgestellt, dass linkshändige Antiquarks auf den baryonischen Branen beginnen, weitere Branen aber für deren Endpunkte benötigt werden – sie sind Singulets der $SU(2)$ und können nicht auf den N_2 enden. Bezeichne $N_3 = 1$ die D-Brane auf der das \bar{u}_L endet und $N_4 = 1$ die D-Brane, wo das \bar{d}_L endet. Diese Branen

²³ Im Anhang D sind die expliziten Werte für die l_i und die Schnitzzahlen für die Branen-Konfiguration zur Modellierung des Standardmodells angegeben.

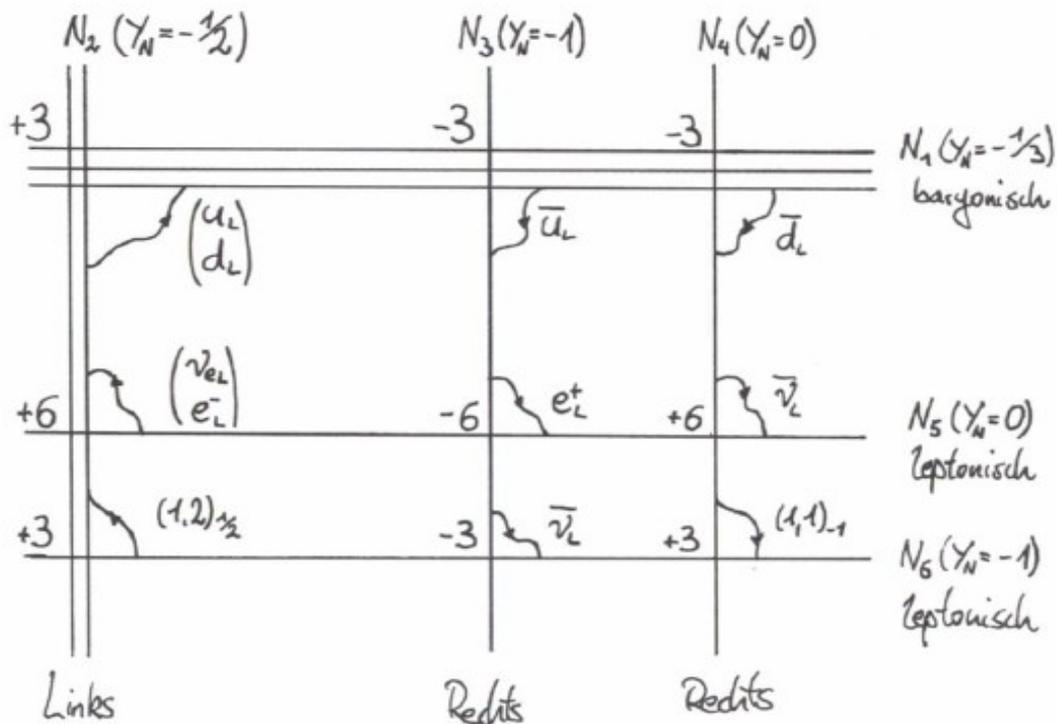


Abbildung 11: Branen-Konfiguration aus $N_1=3$ baryonischen Branen, $N_2=2$ Links-Branen, $N_3=N_4=1$ Rechts-Branen und $N_5=N_6=1$ leptonischen Branen. Y_N sind die Beiträge zur Hyperladung der Strings, die auf der Brane enden. An den Schnittpunkten sind die Schnittzahlen I_{ab} mit $a < b$ angegeben. [1]

werden beide *Rechts-Branen* genannt, wie die rechtshändigen Quarks, die darauf beheimatet sind. Die Rechts-Branen schneiden einander nicht – $I_{34} = 0$ – bilden aber auch keinen Satz übereinstimmender Branen, denn sie tragen unterschiedliche Hyperladungen.

Auch für die Leptonen wurde eine weitere Brane benötigt – sei $N_5 = 1$ die *leptonische D-Brane*. Der Schnitt der leptonischen Brane mit den Links-Branen liefert das Dublett bestehend aus dem Elektron und dem Elektron-Neutrino. Der Schnitt der leptonischen Brane mit der Rechts-Brane N_3 ergibt das linkshändige Positron und ein weiterer Schnitt der leptonischen Brane, diesmal mit der Rechts-Brane N_4 , produziert das linkshändige Antineutrino der ersten Generation. Damit ergibt sich eine Konfiguration aus fünf sich schneidenden D6-Branen, die exakt den Teilcheninhalt des Standardmodells liefert. Leider stimmt das nicht ganz. Abbildung 11 zeigt die tatsächliche Branen-Konfiguration.

Es musste noch eine weitere leptonische Brane hinzugefügt werden, aufgrund einer Regel die

befolgt werden muss:

Der Satz linkshändiger Zustände auf den jeweiligen Branen-Sätzen muss die gleiche Anzahl ankommender und ausgehender Strings haben. (3.46)

Der dreifache Schnitt der baryonischen Branen mit den Links-Branen produziert sechs Zustände die es in drei Farben gibt, also insgesamt 18 Zustände. Der Schnitt der Links-Brane N_2 mit der leptonischen Brane N_5 liefert zwei String-Zustände in sechsfacher Ausführung. Auf den Links-Branen gibt es also achtzehn ausgehende und zwölf ankommende Zustände – es fehlen sechs String-Zustände deren Endpunkte auf N_2 enden müssen. Diese Zustände sollen auf einer leptonischen N_6 Brane beginnen. Ähnliche Überlegungen zeigen, dass auch auf N_3 und N_4 die Bedingung (3.46) nicht erfüllt ist, diese Branen müssen ebenfalls die zusätzliche leptonische N_6 Brane schneiden. Durch die zusätzliche Brane entstehen zusätzliche Teilchen – 12 insgesamt. Aber auch schon die leptonische Brane N_5 ergab doppelt so viele leptonische Zustände, wie im Standardmodell enthalten.

Es sei angemerkt, dass der Schnitt der N_4 Brane mit der N_5 Brane linkshändige Antineutrinos liefert. Die Antiteilchen sind rechtshändig. Die Stringtheorie sagt also rechtshändige Neutrinos voraus!

Die soeben besprochene Branen-Konfiguration kann also die Teilchen des Standardmodells reproduzieren, aber nur gemeinsam mit vielen zusätzlichen Teilchen, die bisher keinen Platz in der Naturbeschreibung haben.

Es ist allerdings möglich, ein Modell zu konstruieren, das exakt den Teilchen-Inhalt des Standardmodells besitzt. Dazu ist es notwendig Orientifolds einzuführen.

Eine Orientifold Op -Ebene ist ein ausgedehntes Objekt – eine Hyperebene – mit p räumlichen Dimensionen. Man erhält eine Op -Ebene, wenn Zustände geschlossener Strings eingeschränkt werden auf solche, die invariant unter Symmetrietransformationen sind, die gleichzeitig die String-Orientierung umkehren und die Koordinaten normal zu der Op -Ebene reflektieren. Die Op -Ebene ist also eine Art Spiegel der Physik am reflektierten Punkt und schneidet den Raum effektiv in zwei Hälften. ([1], Aufgabe 13.6.)

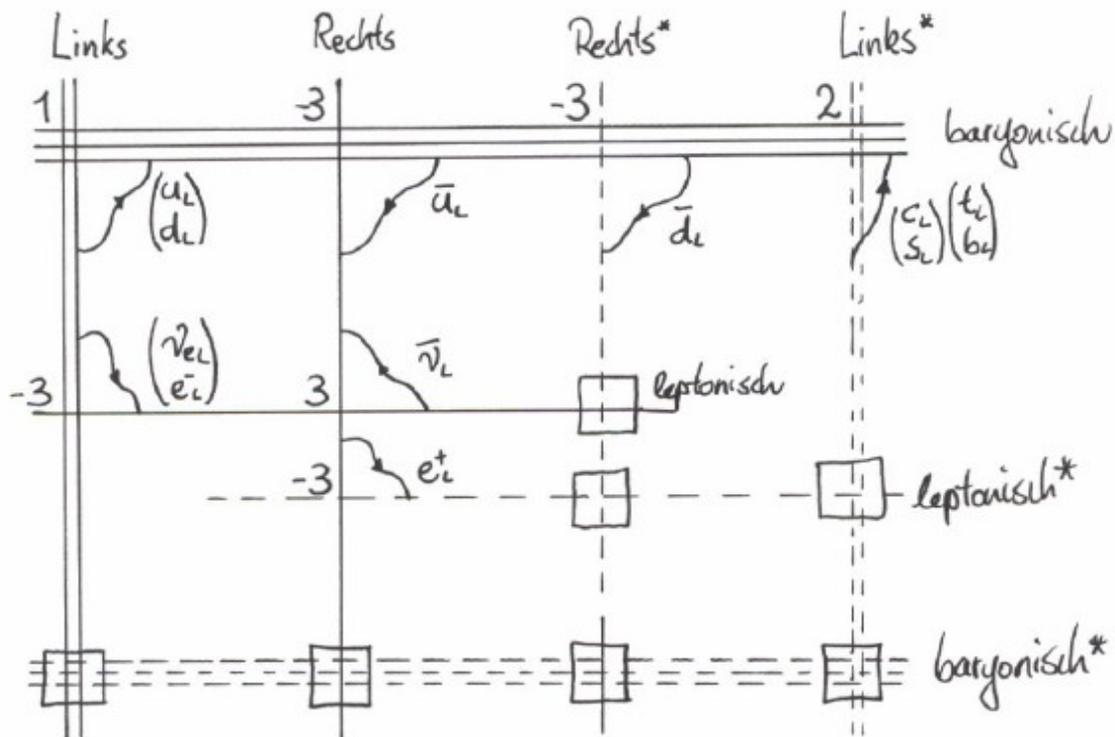


Abbildung 12: Branen-Konfiguration die zu dem Materieinhalt des Standardmodells und seiner Eichgruppe führt. [1]

Das Modell kann an dieser Stelle lediglich skizziert werden. Abbildung 12 zeigt die entsprechende Branen-Konfiguration. Wie zuvor gibt es einen Satz aus drei baryonische Branen und einen Satz zweier Links-Branen, aber nur eine leptonische Brane und nur eine Rechts-Brane. Die von den Orientifolds gespiegelten D-Branen sind als gestrichelte Linien dargestellt. Eingerahmte Branen-Schnittpunkte sind Spiegelbilder bereits berücksichtigter Schnitte und liefern keine neuen Teilchen.

Durch diese Konstruktion lassen sich die zusätzlichen leptonischen Dubletts vermeiden. Es ergeben sich genau drei Lepton-Generationen, durch dreifaches Kreuzen der leptonischen Brane mit den Links-Branen bzw. der Rechts-Brane, und durch das Kreuzen der Rechts-Brane mit dem *Bild* der leptonischen Brane. Die linkshändigen Quark-Dubletts der zweiten und dritten Generationen ergeben sich in einer neuen Weise – an dem Schnitt der baryonischen Brane mit dem *Bild* der Links-Branen. Die Menge ein- und auslaufender Strings stimmt überein – die eingerahmten Schnittpunkte der Branen, als Spiegelbilder bereits berücksichtigter Schnitte, liefern zwar keine neuen Teilchen, müssen aber für die Regel (3.46)

berücksichtigt werden.

Bei der Konstruktion wurden stabile D6-Branen im Rahmen der Typ IIA-Superstringtheorie benutzt, das Modell selbst verfügt aber nicht über Supersymmetrie, es hat nicht dieselbe Anzahl von Bosonen und Fermionen (derselben Masse). Die Supersymmetrie wird durch die Branen und ihre Schnitte gebrochen, was auch notwendig war, um das (nicht supersymmetrische) Standardmodell zu erhalten.

Unklar bleibt ob die elektroschwache Symmetriebrechung korrekt ausgeführt werden kann um den Teilchen ihre Massen zu verleihen. In Modellen sich schneidender D-Branen wird die elektroschwache Symmetrie durch den Prozess der Branen-Rekombination gebrochen. Bei bestimmten Schnittwinkeln kann es im Spektrum offener Strings zu Tachyon-Zuständen kommen, also zu einer Instabilität, die dazu führen kann, dass zwei Branen sich zu einer einzigen vereinen, wodurch aber auch die Eichgruppe, die zum Standardmodell führte, reduziert wird. Es gibt weniger Schnittpunkte, also gibt es weniger Fermionen.

Zudem wurde die Branen-Konfiguration *angepasst* und ergab sich nicht etwa zwangsläufig aus der Forderung des Standardmodell-Spektrums. Die Art, *wie* die Branen auf den Torus gewickelt wurden, seine Größe und die Windungszahlen – all das wurde gewählt.

Die Entstehung der Eichbosonen der Schwachen Wechselwirkung wurde in [1] nicht besprochen, man kann nur vermuten, dass sie auf ähnliche Weise auf den Links-Branen entstehen könnten, wie die Gluonen auf den Farb-Branen.

Zusammenfassend ist festzuhalten, dass unklar bleibt, ob eins der Modelle sich kreuzender D-Branen das erwartete Teilchen-Spektrum *nach* der Symmetriebrechung reproduzieren kann! Der Stringtheorie ist es bisher nicht gelungen ein realistisches Modell der Teilchenphysik zu liefern.

4.4 Andere String-Wege zum Standardmodell

An dieser Stelle soll kurz auf weitere Möglichkeiten eingegangen werden, von den Strings zu den Teilchen des Standardmodells zu gelangen.

So viele mögliche, bekannte Stringtheorien – fünf – es gibt, so viele mögliche Startpunkte zu beginnen gibt es. In jeder der Superstringtheorien kann untersucht werden, wie sich das Standardmodell darin ergeben könnte. Da alle Theorien als unterschiedliche Herangehensweisen an dieselbe Theorie gelten – die M-Theorie – müssen all diese Näherungen irgendwo miteinander verwandt sein.

In der $E_8 \times E_8$ Superstringtheorie sind sechs der neun Raumdimensionen zu einem Calabi-Yau-Raum zusammengerollt. Die Anzahl der Generationen des Standardmodells hängt von der Topologie des Calabi-Yau-Raumes ab und es ist möglich Modelle mit drei Generationen zu erhalten. Durch die Kompaktifizierung der Raumdimensionen wird die $E_8 \times E_8$ - Eichgruppe gebrochen zu $E_6 \times E_8$. Die Gruppe E_6 enthält $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ als Untergruppe, sodass es möglich ist durch weitere Symmetriebrechung(en) die Eichgruppe des Standardmodells zu erhalten. Da die Calabi-Yau-Räume jedoch recht kompliziert sind, ist die Entwicklung solcher Modelle nicht weit fortgeschritten.

Es muss immer gewährleistet sein, dass die natürliche Supersymmetrie der Stringtheorie gebrochen wird um ein realistisches Modell zu beschreiben. Chirale Fermionen benötigen die *minimale $N=1$ Supersymmetrie* für ihre Existenz. Die meisten Modelle mit anders kompaktifizierten Räumen als die Calabi-Yau-Räume, beinhalten jedoch mehr als nur die minimale Supersymmetrie und sind nicht realistisch.

Modelle in der elfdimensionalen M-Theorie verlangen nach der Kompaktifizierung einer sieben-dimensionalen Mannigfaltigkeit. Um eine vierdimensionale Theorie mit minimaler Supersymmetrie zu erhalten, muss die Raumkrümmung eine bestimmte geometrische Eigenschaft erfüllen, unterliegt also einer Zwangsbedingung. Wenn der sieben-dimensionale Raum Singularitäten aufweist, kann es zu chiralen Fermionen kommen. Tatsächlich sind Modelle in der M-Theorie mit den Modellen der Typ IIA-Superstringtheorie verwandt, weil M-Theorie kompaktifiziert auf einem Kreis, gleich der Typ IIA-Theorie ist, mit einem endlichen Wert für die String-Kopplung. [1]

5 Zusammenfassung

Im ersten Kapitel dieser Arbeit wurden die Strings der bosonischen Stringtheorie vorgestellt. Das Spektrum offener Strings zeigte Zustände, die mit den Photonen identifiziert werden konnten. Außerdem zeigte die Theorie eine Vakuum-Instabilität durch das Tachyonfeld mit einem negativen Massenquadrat. Das Spektrum geschlossener Strings lieferte einen Spin 2-Zustand, der als das Graviton identifiziert wurde, und das Dilatonfeld, die dynamische String-Kopplung. Die Anzahl der Dimensionen ergab sich zu 26.

Die Superstringtheorie im zweiten Kapitel reduzierte die Raumzeitdimensionen auf zehn und zeigte Supersymmetrie. Alle erwähnten Zustände der bosonischen Theorie konnten im Superstring-Spektrum identifiziert werden.

Im dritten Kapitel zeigte sich, dass D-Branen Maxwellfelder tragen und dass Konfigurationen paralleler und sich kreuzender D-Branen existieren können. Um die für die Modellierung notwendige vierdimensionale Raumzeit zu erhalten, wurden sechs der Raumdimensionen zu einem Torus zusammengerollt.

Im vierten Kapitel wurde gezeigt, wie sich Eichfelder in Branen-Konfigurationen ergeben können und wie das Standardmodell der Teilchenphysik in einer Konfigurationen sich schneidender D6-Branen modelliert werden kann. Man erhielt ein Modell mit zu vielen Teilchen. Durch Einführung von Orientifolds, war es möglich ein Modell mit dem exakten Teilcheninhalt des Standardmodells zu konstruieren. Der Prozess der Symmetriebrechung, der den chiralen Fermionen ihre Massen verleihen sollte, könnte durch bestimmte Abstände und Schnittwinkel der D-Branen realisiert werden. Wie es tatsächlich durchzuführen ist und ob das Ergebnis die realen Werte annehmen kann, konnte in der Stringtheorie bisher nicht herausgearbeitet werden.

Anhang A: Formelsammlung

Lichtkegel-Koordinaten

Man definiert die Lichtkegel-Koordinaten als zwei unabhängige Linearkombinationen der Zeit-Koordinate und einer gewählten Raum-Koordinate, üblicherweise x^1 :

$$\begin{aligned} x^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1) \\ x^- &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \end{aligned} \tag{A1}$$

Die Koordinaten (x^0, x^1, x^2, x^3) werden also zu dem Satz (x^+, x^-, x^2, x^3) .

Skalarprodukt zweier Vektoren:

$$x \cdot y = -x^- y^+ - x^+ y^- + x^2 y^2 + x^3 y^3 = \hat{\eta}_{\mu\nu} x^\mu y^\nu, \tag{A2}$$

mit der Lichtkegel-Metrik $\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A3

es werden die Indizes $+, -, I$ durchlaufen, mit $I = 2, 3$.

Das invariante Linienelement ist

$$-ds^2 = -2 dx^+ dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \tag{A4}$$

Lichtkegel-Geschwindigkeit

$$\frac{dx^-}{dx^+} = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{A5}$$

Lichtkegel-Energie

$$p^- = \frac{E_{LK}}{c} = -p^+. \tag{A6}$$

Lichtkegel-Punktteilchen

Lichtkegel-Eichbedingung $x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau$ A7

Koordinaten $x^- = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \quad x^I = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau$ A8

Zwangsbedingung $x^2 = -\frac{1}{m^2}$ A9

Impuls $p^- = \frac{1}{2 p^+} (p^I p^I + m^2)$ A10

Unabhängige dynamische Variablen (x^I, x_0^-, p^I, p^+) A11

Nicht verschwindende Kommutator-Relationen für Operatoren

$$[x^I, p^J] = i \eta^{IJ}, \quad [x_0^-, p^+] = i \eta^{-+} = -i$$
 A12

Heisenberg Hamiltonian $H(\tau) = \frac{p^+(\tau)}{m^2} p^-(\tau) = \frac{1}{2m^2} (p^I(\tau) p^I(\tau) + m^2)$ A13

Teilchen-Zustände

a_p Vernichtungsoperator

a_p^\dagger Erzeugungsoperator

$|\Omega\rangle$ Grundzustand (Vakuuzustand)

$$a_{p^+, p_T}^\dagger |\Omega\rangle \quad \text{1-Teilchen-Zustände des Skalarfeldes} \quad \text{A14}$$

$$\sum_{I=2}^{D-2} \xi_I a_{p^+, p_T}^{I\dagger} |\Omega\rangle \quad \text{1-Photonen-Zustände, } \xi_I \text{ Polarisationsvektor} \quad \text{A15}$$

$$\sum_{I,J=2}^{D-1} \xi_{IJ} a_{p^+, p_T}^{IJ\dagger} |\Omega\rangle \quad \text{1-Graviton-Zustände, } \xi_{IJ} \text{ Polarisations-Tensor, } \xi_{II}=0 \quad \text{A16}$$

Lorentz-Lie-Algebra

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} M^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} M^{\rho\mu}. \quad \text{A17}$$

Kommutator $[A, B] = AB - BA \quad \text{A18}$

Antikommutator $\{A, B\} = AB + BA \quad \text{A19}$

A, B Operatoren

Antikommutierende Variablen erfüllen

$$\begin{aligned} ab &= -ba \\ aa &= -aa \quad \rightarrow \quad aa = 0, bb = 0. \end{aligned} \quad \text{A20}$$

Anhang B

Berechnung von (1.119) $[L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] = \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'}$:

Es ist $[L_m^\perp, \alpha_n^J] = -n \alpha_{m+n}^J$ und $[L_m^\perp, x_0^I] = -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I$.

Und (1.81)

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma).$$

$$\begin{aligned} [L_m^\perp, X^I(\tau, \sigma)] &= [L_m^\perp, x_0^I] + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} [L_m^\perp, \alpha_n^\perp] \\ &= -i\sqrt{2\alpha'} \alpha_m^I - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I \\ &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \cos(n\sigma) e^{-in\tau} \alpha_{m+n}^I \\ &= -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2} (e^{-in(\tau-\sigma)} + e^{-in(\tau+\sigma)}) \alpha_{m+n}^I \\ &\stackrel{n \rightarrow n-m}{=} -i\sqrt{2\alpha'} \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (e^{-i(n-m)(\tau-\sigma)} + e^{-i(n-m)(\tau+\sigma)}) \alpha_n^I \\ &= -\frac{i}{2} e^{im(\tau-\sigma)} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau-\sigma)} \alpha_n^I - \frac{i}{2} e^{im(\tau+\sigma)} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in(\tau+\sigma)} \alpha_n^I \\ &= -\frac{i}{2} e^{im(\tau-\sigma)} (\dot{X}^I - X^{I'}) - \frac{i}{2} e^{im(\tau+\sigma)} (\dot{X}^I + X^{I'}) \\ &= -i e^{im\tau} \cos(m\sigma) \dot{X}^I + e^{im\tau} \sin(m\sigma) X^{I'} \\ &= \xi_m^\tau \dot{X}^I + \xi_m^\sigma X^{I'} \end{aligned}$$

Anhang C

Zur Berechnung des Kommutators $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$ müssen die beiden folgenden Ausdrücke in die Kommutator-Klammer geschrieben und ausgeführt werden:

$$M^{-I} = x_0^- p^I - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^I (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^I) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (L_{-n}^\perp \alpha_n^I - \alpha_{-n}^I L_n^\perp) \quad C1$$

und

$$M^{-J} = x_0^- p^J - \frac{1}{4\alpha' p^+} (x_0^J (L_0^\perp + a) + (L_0^\perp + a) x_0^J) - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' p^+}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (L_{-m}^\perp \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J L_m^\perp). \quad C2$$

Jeder der Ausdrücke enthält sieben Terme, d.h. es sind 49 einzelne Kommutator-Ausdrücke auszurechnen (in der Tat aber viel weniger tatsächlich auszuführen, aufgrund der Symmetrie der beiden Ausdrücke C1 und C2), zum Teil mit bis zu fünf Operatoren in einer Kommutator-Klammer nach dem Schema:

$$[AB, CDE] = [A, C]BDE + C[A, D]BE + DC[A, E]B + A[B, C]DE + CA[B, D]E + DCA[B, E].$$

Zum Beispiel der erste Term von C1 mit dem zweiten Term von C2:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4\alpha'} \left[x_0^- p^I, \frac{1}{p^+} x_0^J L_0^\perp \right] = \\ & = \dots [x_0^-, \frac{1}{p^+}] p^I x_0^J L_0^\perp + \frac{1}{p^+} [x_0^-, x_0^J] p^I L_0^\perp + x_0^J \frac{1}{p^+} [x_0^-, L_0^\perp] + \\ & \quad + x_0^- [p^I, \frac{1}{p^+}] x_0^J L_0^\perp + \frac{1}{p^+} x_0^- [p^I, x_0^J] L_0^\perp + x_0^J \frac{1}{p^+} x_0^- [p^J, L_0^\perp] \\ & = \dots \left(\frac{i}{p_{+2}} \right) p^I x_0^J L_0^\perp + \frac{1}{p^+} x_0^- (-i \eta^{IJ}) L_0^\perp. \end{aligned} \quad C3$$

Nur zwei der Kommutatoren liefern einen Beitrag (der erste und der vorletzte nach dem ersten Gleichheitszeichen). Die Punkte stehen für den vernachlässigten Vorfaktor.

Der Kommutator des ersten Terms von C2 mit dem zweiten Term von C1 ist gleich dem negativen von C3. Auf diese Weise heben sich einige Terme gegenseitig auf. Die übrig gebliebenen müssen passend umgeformt und zusammengefasst werden um das Ergebnis in (1.126) zu liefern. Es verbleiben

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{\alpha' p_{+2}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) - \frac{1}{2\alpha' p^+} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^J \alpha_m^I - \alpha_{-m}^I \alpha_m^J) \frac{1}{m} \left(\frac{D-2}{12} (m^3 - m) \right) \\ & \quad + \frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^J \alpha_m^I - \alpha_{-m}^I \alpha_m^J) m \end{aligned} \quad C4$$

Diese Terme können zusammengefasst werden zu:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[a - \frac{1}{m} \frac{D-2}{24} (m^3 - m) + m^2 \right] \\
 & = -\frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[\frac{1}{m} \left(a - \frac{D-2}{24} (m^2 - 1) + m^2 \right) \right] \\
 & = -\frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[\frac{a}{m} - m \frac{D-2}{24} + m + \frac{1}{m} \frac{D-2}{24} \right] \\
 & = -\frac{1}{\alpha' p^+} \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_{-m}^I \alpha_m^J - \alpha_{-m}^J \alpha_m^I) \left[\frac{1}{m} \left(a + \frac{D-2}{24} \right) + m \left(1 - \frac{D-2}{24} \right) \right] \tag{C5} \\
 & = [M^{-I}, M^{-J}] \\
 & = 0 \quad \text{für } a = -1 \text{ und } D = 26 .
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck C5 entspricht der Gleichung (1.126) auf Seite 34.

Anhang D

Wie N_i D6-Branen auf $T^6 = T^2 \times T^2 \times T^2$ gewickelt sind (*eine* Möglichkeit), $i=1, \dots, 6$:

$$\begin{aligned}
 N_1 = 3: & \quad l_1^{(1)} = (1, 2), \quad l_2^{(1)} = (1, -1), \quad l_3^{(1)} = (1, -2); \\
 N_2 = 2: & \quad l_1^{(2)} = (1, 1), \quad l_2^{(2)} = (1, -2), \quad l_3^{(2)} = (-1, 5); \\
 N_3 = 1: & \quad l_1^{(3)} = (1, 1), \quad l_2^{(3)} = (1, 0), \quad l_3^{(3)} = (-1, 5); \\
 N_4 = 1: & \quad l_1^{(4)} = (1, 1), \quad l_2^{(4)} = (3, -4), \quad l_3^{(4)} = (1, -5); \\
 N_5 = 1: & \quad l_1^{(5)} = (1, 2), \quad l_2^{(5)} = (-1, 1), \quad l_3^{(5)} = (1, 1); \\
 N_6 = 1: & \quad l_1^{(6)} = (1, 2), \quad l_2^{(6)} = (-1, 1), \quad l_3^{(6)} = (2, -7).
 \end{aligned}$$

N_i geben die Anzahl der Branen des jeweiligen Satzes an. Durch die Linien $l_n^{(i)}$ sind die Richtungen auf den Tori gegeben, sie sind wie Vektoren mit zwei Komponenten, wobei $n=1,2,3$.

Die Schnitzzahlen sind

$$\begin{aligned}
 I_{12} = 3, & \quad I_{13} = -3, & \quad I_{14} = 0, \\
 I_{15} = 0, & \quad I_{16} = -3, & \quad I_{23} = 0, \\
 I_{24} = 6, & \quad I_{25} = 3, & \quad I_{26} = 0, \\
 I_{34} = -6, & \quad I_{35} = -3, & \quad I_{36} = 0, \\
 I_{45} = 0, & \quad I_{46} = 6, & \quad I_{56} = 3.
 \end{aligned}$$

Weil $I_{ab} = -I_{ba}$ ist, wurden nur die Schnitzzahlen mit $a < b$ aufgelistet. ([1], S.475.)

Anhang E

Die Berechnung der kritischen Dimension in der Superstringtheorie verlangt erweiterte Kenntnisse der Quantenfeldtheorie (z. B. über Fadeev-Popov-Geister) und kann an dieser Stelle nicht hergeleitet werden, soll aber plausibel gemacht werden. Es ist hilfreich Kapitel 2 bereits gelesen zu haben. Die hier benutzte Literatur ist am Ende des Anhangs E aufgelistet, separat von dem Literaturverzeichnis.

In **I** sind die Kommutator-Relationen der Virasoro-Operatoren der bosonischen Strings und der Superstrings notiert. Da sie teilweise unterschiedlich sind, ändern sich die Zwischenschritte bei der Berechnung des Kommutators der Lorentz-Ladungen, $[M^{-I}, M^{-J}] = 0$, die im Kapitel 1 zur Bestimmung der Konstanten a und D führten. Dadurch kann es klarerweise auch zu anderen Werten bei der Bestimmung von D kommen.

In **II** werden Überlegungen anhand der bereits bekannten bosonischen Ordnungskonstanten angestellt. Die Anzahl der kritischen Dimensionen ergibt sich aus der Forderung nach masselosen Zuständen.

I: Für den bosonischen String gilt die (zentral entwickelte) *Virasoro-Algebra* :

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0}. \quad \text{E1}$$

Geschlossene, links- und rechtslaufende Superstrings gehorchen der *Super-Virasoro-Algebra*;

mit NS-Randbedingungen:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp + \frac{D}{8}(m^3-m)\delta_{m+n,0}, \quad \text{E2}$$

mit R-Randbedingungen:

$$[L_m^\perp, L_n^\perp] = (m-n)L_{m+n}^\perp + \frac{D}{8}m^3\delta_{m+n,0}. \quad \text{E3}$$

II: Verlangt man von dem Massenspektrum offener bosonischer Strings, dass der erste angeregte Zustand Photonen liefert, so muss dieser Zustand masselos sein und es muss gelten (vgl. Gleichung

(1.115))

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp + a) = \frac{1}{\alpha'} (1 + a) \stackrel{!}{=} 0. \quad \text{E4}$$

Das wird nur von $a = -1$ erfüllt. Andererseits ist $a = -\frac{D-2}{24}$ (vgl. (1.116)), woraus der Wert der kritischen Dimension bestimmt werden kann.

In der Superstringtheorie gibt es auch fermionische Beiträge an die Ordnungskonstante a . An dieser Stelle wird lediglich der NS-Sektor betrachtet²⁴. Die Ordnungskonstante darin setzt sich aus fermionischen und bosonischen Beiträgen zusammen. Ein Ausdruck für die Ordnungskonstante kann daraus bestimmt werden, dass das Massenquadrat normalgeordnet wird (analog zu dem Vorgehen in Kapitel 1):

Der nicht-normalgeordnete Massenquadrat-Operator im NS-Sektor der Superstringtheorie ist

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} \sum_{p \neq 0} \alpha'_p \alpha'_p + \sum_{r \in \mathbb{Z} + 1/2} r b_{-r}^I b_r^I \right), \quad \text{E5}$$

die erste Summe enthält die bosonischen Oszillatoren, die zweite Summe die fermionischen Oszillatoren mit gebrochenrationalen Moden. In Kapitel 1 wurde die erste Summe bereits normalgeordnet und es ist bekannt, dass die bosonischen Oszillatoren $-\frac{1}{24}$ zu der Ordnungskonstanten a beitragen: $a_B = -\frac{1}{24}$. In der zweiten Summe muss der Term $\frac{1}{2} \sum_{r=-1/2, -3/2, \dots} r b_{-r}^I b_r^I$ normalgeordnet werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{r=-1/2, -3/2, \dots} r b_{-r}^I b_r^I &\stackrel{r \rightarrow -r}{=} \frac{1}{2} \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} (-r) b_r^I b_{-r}^I \\ &\stackrel{(2.14)}{=} \frac{1}{2} \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} r b_{-r}^I b_r^I - \frac{D-2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=1/2, 3/2, \dots} r b_{-r}^I b_r^I - \frac{1}{24} \frac{D-2}{2}. \end{aligned} \quad \text{E6}$$

Das bedeutet also, dass die antiperiodischen fermionischen Oszillatoren des NS-Sektors die Konstante

$a_{NS} = -\frac{1}{48}$ zu der Ordnungskonstante a beitragen. Die gesamte Ordnungskonstante ist

$$a = (D-2)(a_B + a_{NS}) = (D-2) \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{48} \right) = -\frac{D-2}{16}. \quad \text{E7}$$

²⁴ Das genügt auch, denn der Beitrag des Ramond-Sektors an die Ordnungskonstante ist gleich Null.

Verlangt man nun von den ersten angeregten Zuständen des NS-Sektors, dass sie masselos sind, dann muss für das Massenquadrat gelten (vgl. auch (2.16) und (2.18)):

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} (N^\perp + a) = \frac{1}{\alpha'} \left(\frac{1}{2} + a \right) \stackrel{!}{=} 0. \quad \text{E8}$$

Das wird nur von $a = -\frac{1}{2}$ erfüllt.

Andererseits gilt E7 und damit

$$-\frac{1}{2} = -\frac{D-2}{16}. \quad \text{E9}$$

Daraus folgt die

Anzahl der Raumzeit-Dimensionen: $\boxed{D = 10.}$

Anhang E wurde durch folgende Literatur inspiriert:

- Balin, A., Love, A. *Supersymmetric gauge field theory and string theory*, Taylor & Francis 1996, Kapitel 8, S.174ff.
- Becker, K., Becker, M., Schwarz, J.H. *String theory and M-theory*, Cambridge 2007, Kapitel 4 S.109ff.
- Johnson C.V. *D-Branes*, Cambridge 2003, Kapitel 2, S.24ff und Kapitel 7, S.155ff.
- Szabo, R.J. *String theory and D-Branes dynamics*, 2. Auflage, Imperial College Press, 2. Auflage 2011, Kapitel 4, S.44-5.
- Zwiebach, B. *A First Course in String Theory*, 2. Auflage, Cambridge 2009, Kapitel 14, S.313-4.

Literaturverzeichnis

- [1] *A First Course in String Theory*, B. Zwiebach, 2. Auflage, Cambridge 2009, ISBN 9780521880329
- [2] *The birth of String Theory*, edited by A.Cappelli, E.Castellami, F.Colomo, P.DiVecchia, Cambridge 2012, ISBN 9780521197908
- [3] *Getting just the Standard Model at intersecting branes*, L.E. Ibanez, F. Marchesano, R. Rabadan, (2001). [arXiv:hep-th/0105155].
- [4] *Das elegante Universum*, B.Green, 3. Auflage, BvT Verlag, Berlin 2004, ISBN 3833302216
- [5] *Die Entdeckung des Unteilbaren*, J. Resag, Spektrum Akademischer Verlag 2010, ISBN 3827424846
- [6] *The little book of string theory*, S.S.Glubser, Princeton University Press 2010, ISBN 9780691142890