

Untersuchung des Parameterraums eines 4-Generationen-Standardmodells

Bachelorarbeit

an der Fakultät für Physik
der Universität Bielefeld

von
Kilian Leßmeier

August 2009

PD Dr. York Schröder

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort.....	3
2	Einleitung.....	4
2.1	Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik.....	4
2.2	Hadronen und Flavorquantenzahlen.....	5
2.3	CP-Verletzung am Beispiel des neutralen Kaons.....	6
2.4	Die CKM-Matrix.....	9
2.5	Motivation.....	10
3	Untersuchung des Parameterraums.....	11
3.1	Parametrisierung der CKM-Matrix für N Generationen.....	11
3.2	Bedingungen an die Parametersets.....	13
3.3	Schematischer Aufbau des Programms.....	18
4	Ergebnisse und Diskussion.....	20
4.1	Winkel-Winkel-Schnitte.....	20
4.2	Winkel-Phase-Schnitte.....	23
4.3	Phase-Phase-Schnitte.....	25
5	Zusammenfassung.....	27
6	Referenzen.....	28

1. Vorwort

In dieser Arbeit wurde eine numerische Analyse von möglichen Parametersets für eine Quark-Mischungsmatrix für ein durch eine vierte Fermion-Generation erweitertes Standardmodell durchgeführt. Dies geschah in Analogie zu der Arbeit „How much space ist left for a new family“ von A.Lenz et al.(vgl. [1]) .

Basis der numerischen Analyse bildeten verschiedene Bedingungen, die durch die FCNC-Prozesse¹ der Mischung von K, D, B_d oder B_s -Mesonen, sowie dem Zerfall $b \rightarrow s\gamma$ gegeben waren. Die Abweichung zwischen den Bedingungen für ein Standardmodell mit vier Generationen (SM4) und einem Standardmodell mit drei Generationen (SM3) sollte in einem durch experimentelle Einschränkungen vorgegebenen Rahmen bleiben

Das Ziel der Analyse war es herauszufinden, inwiefern die aktuellen Forschungsergebnisse die mögliche Existenz einer vierten Generation einschränken.

2. Einleitung

¹ Flavor changing neutral current: Prozesse bei denen die Flavorquantenzahl eines Fermions geändert wird, aber die elektrische Ladung erhalten bleibt

In diesem Kapitel wird eine kurze Einleitung in das Standardmodell der Teilchenphysik gegeben, um anschließend mit Hilfe der Kapitel (2.2) und (2.3) die Relevanz und Einordnung einer Quarkmischungsmatrix in dieses zu verdeutlichen.

2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Das Standardmodell der Teilchenphysik klassifiziert die bekannten Elementarteilchen und beschreibt die Wechselwirkung zwischen diesen. Die Teilchen lassen sich in drei Klassen einteilen: In Leptonen, Quarks und die Austauscheteilchen der Wechselwirkungen.

Es gibt jeweils sechs Leptonen und Quarks, die sich in drei Generationen wie folgt gliedern lassen:

	I	II	III	Q
Leptonen	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$	0 -1
Quarks	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$	+2/3 -1/3

Tabelle 1: Elementarteilchengenerationen

Q bezeichnet die elektrische Ladung der einzelnen Teilchen. Die Zuordnung zu den Generationen ist Konvention. Die häufigste Einteilung ist die obige, die nach steigender Masse sortiert.

Ferner gibt es zu jedem Lepton und Quark ein Antiteilchen, welches über eine entgegengesetzte el. Ladung verfügt. Jedes Quark und Antiquark besitzt eine von drei verschiedenen so genannten Farben, die meistens mit rot, grün und blau, bzw. mit antirot, antigrün und antiblau bezeichnet werden.

Das Standardmodell beschreibt drei fundamentale Wechselwirkungen:

- 1. Die elektromagnetische Wechselwirkung:** Sie wirkt zwischen allen Teilchen, die über eine el. Ladung verfügen und wird über das masselose und elektrisch neutrale Photon übertragen.

- 2. Die starke Wechselwirkung:** Sie wirkt zwischen allen Teilchen, die farbgeladen sind. Daher koppelt sie nicht an Leptonen. Sie wird über Gluonen vermittelt, die jeweils über eine Farbe und eine Antifarbe verfügen. Da die Anzahl der Farben als drei gemessen wurde, ergibt dies eine maximal mögliche Anzahl von neun Gluonen. Allerdings bildet die Summe aller Farben mit ihren Antifarben einen farblosen Zustand, der nicht die starke Wechselwirkung vermitteln kann, wodurch die Anzahl der Gluonen auf acht reduziert wird.
- 3. Die schwache Wechselwirkung:** Ihr unterliegen sowohl Quarks als auch Leptonen, wobei Prozesse mit Ladungsaustausch durch zwei geladene Austauschteilchen, das W^+ und das W^- (Massen $m_w \approx 80.4 \text{ GeV}$), und neutrale Prozesse durch ein neutrales Austauschteilchen, das Z^0 (Masse $m_z \approx 91.2 \text{ GeV}$) beschrieben werden. Die Austauschteilchen der schwachen Wechselwirkungen werden als Vektorbosonen bezeichnet.

2.2 Hadronen und Flavorquantenzahlen

Hadronen sind Teilchen, die, im Gegensatz zu den Leptonen, der starken Wechselwirkung unterliegen. Sie sind keine elementaren Teilchen, sondern sind aus Quarks zusammengesetzt. Da Quarks eine Farbladung haben und diese nicht isoliert vorliegen kann, gibt es nur Hadronen, die mindestens aus einem Quark(q) und einem Antiquark(\bar{q}) bestehen, die die gleiche Grundfarbe tragen, z.B. rot und antirot. Teilchen, die ein $q\bar{q}$ -System bilden, nennt man Mesonen. Eine weitere Möglichkeit ist die Bildung von Hadronen aus drei Quarks oder drei Antiquarks, wobei alle Farben, bzw. Antifarben vorkommen und sich zu weiß addieren. Solche Hadronen nennt man Baryonen, bzw. Antibaryonen.

Die Quarks lassen sich anhand ihrer Masse in leichte (up, down, strange) und schwere (charm, bottom, top) Quarks einteilen. Teilt man den verschiedenen Quarks Quantenzahlen, die so genannten Flavors, zu, so kann man mit Hilfe dieser Quantenzahlen die Hadronen eindeutig darstellen und klassifizieren.

Die hier relevanten Flavorquantenzahlen sind:

	Q	S	C	B	T
u	+2/3	0	0	0	0
d	-1/3	0	0	0	0
c	+2/3	0	1	0	0

s		-1/3	-1	0	0	0
t		2/3	0	0	0	1
b		-1/3	0	0	-1	0

Tabelle 2: Quarkklassifizierung

Hierbei steht S für Strangeness, C für Charmness, B für Bottomness und T für Topness.

Antiquarks haben im Vergleich zu den Quarks entgegengesetzte Quantenzahlen.

In der Theorie der starken Wechselwirkung können keine Prozesse stattfinden, die zu einer Änderung von Flavorquantenzahlen führen. Somit sind diese hier erhalten.

2.3 CP-Verletzung am Beispiel des neutralen K-Mesons

Dieses Kapitel orientiert sich an der Darstellung der CP-Verletzung in dem Lehrbuch „Einführung in die Elementarteilchenphysik“ von D.Griffiths[2].

C und **P** sind Transformationen, die Ladung bzw. Raumkoordinaten eines Teilchens ändern. **C** ist die Ladungskonjugation, die das Vorzeichen der elektrischen Ladung eines Teilchens ändert und dieses somit in sein Antiteilchen überführt.

P ist die Parität, die die räumlichen Koordinaten eines Teilchens spiegelt. In 4-Vektorschreibweise lässt sie sich ausdrücken als:

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = \Lambda_P^\mu{}_\nu x^\nu \quad ; \quad \Lambda_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Formel 1: Paritätstransformation eines 4-Vektors

Da die zweifache Ausführung der Operationen die ursprüngliche Ladung, bzw. den Ausgangspunkt wieder herstellen soll, besitzen sowohl Parität als auch Ladungskonjugation die Eigenwerte ± 1 .

Ein neutrales Kaon besteht aus einem Down- und einem Anti-Strange-Quark und besitzt somit die Strangeness $S = +1$. Gemäß [2] wurde ein Übergang von einem Kaon in sein Antiteilchen erstmals durch Gell-Mann und Pais anhand der in Abb.1 gezeigten schwachen Prozesse vorausgesagt. Bei diesen Prozessen ändert sich die Strangeness von +1 auf -1 für das Antikaon. Somit können diese Prozesse nicht im Rahmen der starken Wechselwirkung stattfinden.

In niedrigster Ordnung tragen folgende rein schwache Diagramme zu den Kaon-Antikaon-Oszillationen bei:

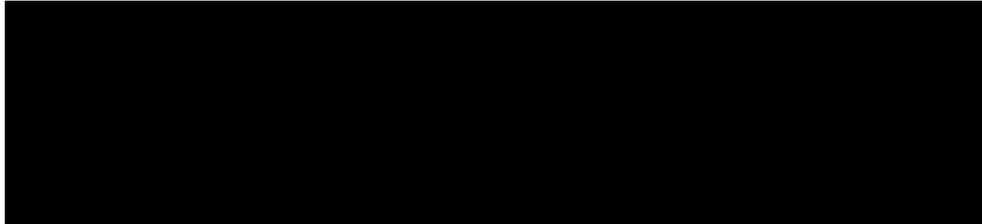


Abbildung 1: Kaon-Antikaon-Mischung (Quelle: <http://ppd.fnal.gov>)

Es gibt weitere Diagramme, die die Kaon-Antikaon-Mischung beschreiben können[2].

Die Kaonen erfüllen für die Parität folgende Bedingungen:

$$P|K^0\rangle = -|K^0\rangle \quad P|\bar{K}^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle$$

Größen mit einer solchen Eigenschaft werden als Pseudoskalare bezeichnet.

Da die Ladungskonjugation jedes Teilchen in sein Antiteilchen umwandelt, muss für das System der Kaonen folgendes gelten:

$$C|K^0\rangle = |\bar{K}^0\rangle \quad C|\bar{K}^0\rangle = |K^0\rangle$$

Fügt man diese beiden Operationen zusammen, so erhält man:

$$CP|K^0\rangle = -|\bar{K}^0\rangle \quad CP|\bar{K}^0\rangle = -|K^0\rangle$$

Dies führt zu zwei Eigenzuständen für **CP**, die Linearkombinationen zwischen Kaon und Antikaon darstellen:

$$\begin{aligned} |K_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{mit } CP|K_1\rangle = |K_1\rangle \\ |K_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle) \quad \text{mit } CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle \end{aligned}$$

Es ist experimentell bekannt, dass Kaonen zu einem großen Anteil in Pionen zerfallen ($|K_1\rangle$ zu ca. 69% in zwei Pionen und $|K_2\rangle$ zu ca.13% in drei Pionen [3]). Da **CP** bei einem System

bestehend aus zwei Pionen einen Eigenwert von +1 annimmt, bei einem System aus drei Pionen jedoch einen von -1, bedeutet dies, dass, unter der Annahme der **CP**-Erhaltung, nur folgende Zerfälle erlaubt sind:

$$K_1 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \text{ oder } K_1 \rightarrow \pi^+ \pi^-$$

$$K_2 \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0 \text{ oder } K_2 \rightarrow \pi^0 \pi^+ \pi^-$$

Aufgrund von theoretischen Überlegungen konnte man vorhersagen, dass der Zerfall in zwei Pionen deutlich schneller als der Zerfall in drei Pionen stattfinden würde[2].

Aus den beiden Eigenzuständen K_1 und K_2 lässt sich durch Addition ein Strahl aus Kaonen bilden:

$$|K^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K_1\rangle + |K_2\rangle)$$

Würde man einen solchen Strahl nehmen, dann würde der K_1 -Anteil schnell zerfallen, so dass in einiger Entfernung zur Quelle der Strahl, unter der Annahme von **CP**-Erhaltung, nur noch aus dem K_2 -Anteil bestünde.

Dies wurde 1964 experimentell von Cronin und Fitch widerlegt, als sie einen Strahl von Kaonen nach 17.4 m auf die Zerfallsprodukte untersuchten. Aufgrund der experimentell bekannten Lebensdauer der beiden Zustände ($\tau_1 \approx 0.896 \cdot 10^{-10} \text{ s}$ und $\tau_2 \approx 5.116 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ [3]) sollte der K_1 -Anteil bereits nach wenigen Zentimetern zerfallen sein.

Bei 22700 gemessenen Zerfällen wurden 45 als Zwei-Pionen-Zerfälle identifiziert, was ein Beweis für die **CP**-Verletzung ist.

2.4 Die CKM-Matrix

Die Mischungsmatrix für Quarks wurde eingeführt, um die experimentell beobachteten Prozesse zu beschreiben, bei denen Quarks einer Generation in Quarks einer anderen transformieren, wie z.B. der Zerfall eines Strange-Quarks in ein Up-Quark.

Für ungemischte Zustände, wie in Tab.1, war dies laut [2] nicht durch die Theorie der schwachen Wechselwirkung beschreibbar.

N. Cabibbo führte zu diesem Zweck eine unitäre 2×2 -Mischungsmatrix ein. Da zu diesem Zeitpunkt lediglich drei Teilchen in zwei Generationen bekannt waren (das Charm-Quark war noch unbekannt), reichte eine 2×2 -Matrix für die Mischung aus.

M. Kobayashi und T. Masukawa erkannten, dass eine Mischungsmatrix für drei Generationen eine komplexe Phase enthalten würde, die nicht wegtransformiert werden kann und mit deren Hilfe sich die CP-Verletzung in das Modell der schwachen Wechselwirkung einbauen lassen würde.

Die so vorausgesagte dritte Generation von Teilchen wurde 1977 (Bottom-Quark) und 1995 (Top-Quark) experimentell nachgewiesen, wofür M. Kobayashi und T. Masukawa 2008 den Nobelpreis für Physik bekamen.

Um die generationsübergreifenden Prozesse beschreiben zu können, werden die Quarkdubletten aus Tab.1 in Paare überführt, bei denen die Quarks mit einer negativen Ladung Linearkombinationen der eigentlichen Quarks d, s und b sind:

$$\begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}$$

Der Anteil eines Quarks an der jeweiligen Linearkombination wird durch die Mischungsmatrix bestimmt:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}$$

Formel 2: Quarkmischung für drei Generationen

Die Indizes des Matrixelements geben die Quarks an, zwischen denen die jeweilige Kopplung stattfindet. Da die Mischungsmatrix kleine Abweichungen von der Einheitsmatrix aufweist, können so generationsübergreifende Prozesse beschrieben werden.

In der hier verwendeten Parametrisierung nimmt die Mischungsmatrix folgende Form an:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

Formel 3: CKM-Matrix für 3 Generationen

Als Kurznotation wird hier verwendet: $c_{ij} = \cos(\theta_{ij})$ und $s_{ij} = \sin(\theta_{ij})$

Diese Parametrisierung ist äquivalent zu der in (3.1) beschriebenen für den Fall von drei Generationen.

2.5 Motivation

Das Standardmodell für drei Generationen ist in der Lage viele Phänomene der Elementarteilchenphysik zu erklären und ist heutzutage allgemein akzeptiert. Allerdings ist die mögliche Anzahl der Fermiongenerationen nicht vorgeschrieben[4]. Da einige Probleme existieren, die mit dem gegenwärtigen Standardmodell nicht oder unzureichend erklärt werden können, könnte das Einführen einer vierten Generation hier möglicherweise Abhilfe schaffen. Solche Probleme umfassen beispielsweise die Baryogenese² und die Flavorphysik[1]. Außerdem könnte eine neue Familie die Grenzen für das Higgs-Boson einschränken und bei Problemen in der Astrophysik, wie z.B. der Dunklen Materie, Lösungen bieten[4].

Insofern muss die Möglichkeit der Existenz einer vierten Generation in Betracht gezogen werden.

3. Untersuchung des Parameterraums

3.1 Parametrisierung der CKM-Matrix für N Generationen

Die in dieser Arbeit gewählte Parametrisierung der CKM-Matrix basiert auf einer Arbeit von H.Harari und M.Leurer [5].

Um die Mischung von N Generationen an Quarks beschreiben zu können, benötigt man eine $N \times N$ -Mischungsmatrix.

$$\begin{pmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ M \\ q'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & K & V_{1n} \\ V_{21} & V_{22} & K & V_{2n} \\ M & M & & M \\ V_{n1} & V_{n2} & K & V_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ M \\ q_n \end{pmatrix}$$

Formel 4: Quarkmischung für N Generationen

² Baryogenese: Theorie, die versucht das Ungleichgewicht von Materie und Antimaterie im Universum zu erklären.

Für $\theta_{i,j} = 0$ ergibt sich in beiden Fällen die Einheitsmatrix in N Dimensionen, was den Vorteil hat, dass die CKM-Matrix für N Generationen durch Nullsetzen der zusätzlichen Winkel $\theta_{1,N}, K \theta_{N-1,N}$ auf die CKM-Matrix für N-1 Generationen zurückgeführt werden kann.

Für N=4 erhält man in der Kurznotation von (2.4) folgende Parametrisierung:

$$V_{CKM}^{(4)} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13}c_{14} & c_{13}c_{14}s_{12} & c_{14}s_{13}e^{-i\delta_{13}} & s_{14}e^{-i\delta_{14}} \\ -s_{12}c_{23}c_{24} - c_{12}c_{24}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23}c_{24} - c_{24}s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13}c_{24} & c_{14}s_{24}e^{-i\delta_{24}} \\ -c_{12}c_{13}s_{14}s_{24}e^{i(\delta_{14}-\delta_{24})} & -c_{13}s_{12}s_{14}s_{24}e^{i(\delta_{14}-\delta_{24})} & -s_{13}s_{14}s_{24}e^{-i(\delta_{13}+\delta_{24}-\delta_{14})} & c_{14}s_{24}e^{-i\delta_{24}} \\ c_{34}s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}c_{34}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}c_{34}s_{23} - c_{23}c_{34}s_{12}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{13}c_{23}c_{34} & c_{14}c_{24}s_{34} \\ -c_{12}c_{13}c_{24}s_{14}s_{34}e^{i\delta_{14}} & -c_{12}c_{23}s_{24}s_{34}e^{i\delta_{24}} & -c_{13}s_{23}s_{24}s_{34}e^{i\delta_{24}} & \\ +c_{23}s_{12}s_{24}s_{34}e^{i\delta_{24}} & -c_{13}c_{24}s_{12}s_{14}s_{34}e^{i\delta_{14}} & -c_{24}s_{13}s_{14}s_{34}e^{i(\delta_{14}-\delta_{13})} & \\ +c_{12}s_{13}s_{23}s_{24}s_{34}e^{i(\delta_{13}+\delta_{24})} & +s_{12}s_{13}s_{23}s_{24}s_{34}e^{i(\delta_{13}+\delta_{24})} & & \\ -c_{12}c_{13}c_{24}c_{34}s_{14}e^{i\delta_{14}} & -c_{12}c_{23}c_{34}s_{24}e^{i\delta_{24}} + c_{12}s_{23}s_{34} & -c_{13}c_{23}s_{34} & c_{14}c_{24}c_{34} \\ +c_{12}c_{23}s_{13}s_{34}e^{i\delta_{13}} & -c_{13}c_{24}c_{34}s_{12}s_{14}e^{i\delta_{14}} & -c_{13}c_{34}s_{23}s_{24}e^{i\delta_{24}} & \\ +c_{23}c_{34}s_{12}s_{24}e^{i\delta_{24}} & +c_{23}s_{12}s_{13}s_{34}e^{i\delta_{13}} & -c_{24}c_{34}s_{13}s_{14}e^{i(\delta_{14}-\delta_{13})} & \\ -s_{12}s_{23}s_{34} & +c_{34}s_{12}s_{13}s_{23}s_{24}e^{i(\delta_{13}+\delta_{24})} & & \\ +c_{12}c_{34}s_{13}s_{23}s_{24}e^{i(\delta_{13}+\delta_{24})} & & & \end{pmatrix}$$

Formel 8: CKM-Matrix für 4 Generationen

Es wird gefordert, dass die Parameter einer Mischungsmatrix für Quarks so gewählt werden, dass die Matrix unitär ist.

3.2 Bedingungen an die Parametersets

Nach (3.1) verfügt man über neun freie Parameter für die CKM-Matrix, die sich in sechs Winkel und drei Phasen aufteilen. Hinzu kommen noch Massen für die neuen Quarks, die hier mit b' und t' bezeichnet werden. Nach [6] sind die Massen der Quarks nicht voneinander unabhängig, wenn sie die experimentellen Ergebnisse nicht verletzen sollen und erfüllen folgende Relation[1]:

$$m_{b'} = m_{t'} - 55 \text{ GeV}$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Masse des Higgsbosons in folgendem Bereich liegt, damit der Fehler für die obige Relation maximal 10% beträgt:

$$114 \text{ GeV} \leq M_H \leq 313 \text{ GeV}$$

Somit kann man sich auf die Verwendung einer Masse beschränken, wobei hier die Masse des t' -Quarks gewählt wird.

Die zehn Parameter bilden als Liste geschrieben ein Parameterset. Die hier verwendete Konvention lautet:

$$l = \{\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{14}, \theta_{23}, \theta_{24}, \theta_{34}, \delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{24}, m_{t'}\}$$

Um die Parametersets auf ihre Kompatibilität mit den aktuellen Messergebnissen zu testen, werden die Bedingungen aus [1] übernommen. Mit Hilfe der Bedingungen soll die Abweichung zwischen dem SM4 und dem SM3, die ein Parameterset verursacht, bestimmt werden. Parametersets, bei denen die Abweichungen in einem vorgegebenen Rahmen liegen, werden als erlaubt betrachtet.

Die Bedingungen lassen sich in drei Gruppen unterteilen:

1. Bedingungen durch Mischung der neutralen K- und B-Mesonen

Nach [2] sind die neutralen B- und D-Mesonen die einzigen stabilen Teilchen, die die in (2.3) beschriebene Umwandlung zwischen Teilchen und Antiteilchen vollführen kann.

In [1] werden zusätzlich zum K-Meson zwei neutrale B-Mesonen, das $B_d = d\bar{b}$ und das $B_s = s\bar{b}$, betrachtet. Die Diagramme sind analog zu denen in Abb.1.

Die Grundlage für die Bedingungen an die neutralen K- und B-Mesonen bildet die Schrödingergleichung aus [7]:

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} |B_s(t)\rangle \\ |\bar{B}_s(t)\rangle \end{pmatrix} = \left(M^s - \frac{i}{2} \Gamma^s \right) \cdot \begin{pmatrix} |B_s(t)\rangle \\ |\bar{B}_s(t)\rangle \end{pmatrix}$$

Formel 9: Schrödingergleichung für Mischung neutraler B-Mesonen

Für K^0 und B_d gilt dieselbe Gleichung. Hierbei sind M und Γ 2x2-Matrizen, die als Massen- bzw. Zerfallsmatrix bezeichnet werden.

Laut [1] ist die Massendifferenz zwischen dem jeweiligen Meson und seinem Antimeson gegeben durch

$$\Delta M = 2|M_{12}|,$$

wobei die Massenmatrixelemente in drei bzw. vier Generationen folgende Form haben[1]:

Für drei Generationen:

$$M_{12}^{K^0} \propto \eta_{cc} (\lambda_c^{K^0})^2 S_0(x_c) + 2\eta_{ct} \lambda_c^{K^0} \lambda_t^{K^0} S(x_c, x_t) + \eta_{tt} (\lambda_t^{K^0})^2 S_0(x_t)$$

$$M_{12}^{B_d} \propto \eta_{tt} (\lambda_t^{B_d})^2 S_0(x_t)$$

$$M_{12}^{B_s} \propto \eta_{tt} (\lambda_t^{B_s})^2 S_0(x_t)$$

Für vier Generationen:

$$M_{12}^{K^0, SM^4} \propto \eta_{cc} (\lambda_c^{K^0})^2 S_0(x_c) + 2\eta_{ct} \lambda_c^{K^0} \lambda_t^{K^0} S(x_c, x_t) + \eta_{tt} (\lambda_t^{K^0})^2 S_0(x_t) \\ + 2\eta_{ct'} \lambda_c^{K^0} \lambda_{t'}^{K^0} S(x_c, x_{t'}) + 2\eta_{t't'} \lambda_{t'}^{K^0} \lambda_{t'}^{K^0} S(x_t, x_{t'}) + \eta_{t't'} (\lambda_{t'}^{K^0})^2 S_0(x_{t'})$$

$$M_{12}^{B_d, SM^4} \propto \eta_{tt} (\lambda_t^{B_d})^2 S_0(x_t) + \eta_{t't'} (\lambda_{t'}^{B_d})^2 S_0(x_{t'}) + 2\eta_{tt'} \lambda_t^{B_d} \lambda_{t'}^{B_d} S(x_t, x_{t'})$$

$$M_{12}^{B_s, SM^4} \propto \eta_{tt} (\lambda_t^{B_s})^2 S_0(x_t) + \eta_{t't'} (\lambda_{t'}^{B_s})^2 S_0(x_{t'}) + 2\eta_{tt'} \lambda_t^{B_s} \lambda_{t'}^{B_s} S(x_t, x_{t'})$$

mit $x_i = \frac{m_i^2}{m_W^2}$.

Hierbei bezeichnen $S_0(x)$ und $S(x, y)$ die so genannten Inami-Lim-Funktionen, die gegeben sind durch[8]:

$$S(x, y) = -xy \left[\frac{1}{y-x} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{1}{1-y} - \frac{3}{4} \frac{1}{(1-y)^2} \right) \ln(y) + \frac{1}{x-y} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{4} \frac{1}{(1-x)^2} \right) \ln(x) - \frac{3}{4} \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-y} \right]$$

$$S_0(x) = -\frac{4x-11x^2+x^3}{4(1-x)^2} + \frac{3x^3 \ln(x)}{2(1-x)^3}$$

Die Inami-Lim-Funktion für eine Variable ist der Grenzfall von $S(x, y)$ für $x \rightarrow y$.

Die Lambdas sind Produkte aus Mischungsmatrixelementen, die für die jeweiligen Mesonen durch

$$\lambda_x^{K^0} = V_{xd} V_{xs}^*, \quad \lambda_x^{B_d} = V_{xd} V_{xb}^*, \quad \lambda_x^{B_s} = V_{xs} V_{xb}^*$$

gegeben sind.

In niedrigster Ordnung sind die FCNC-Prozesse der neutralen Mesonen rein schwache Prozesse. In höheren Ordnungen müssen aber die Korrekturen der Quantenchromodynamik berücksichtigt werden, da die starke Wechselwirkung mittels Gluonen zwischen den beteiligten Quarks wirken kann.

Die Größe dieser Korrekturen wird durch die η s vermittelt, die folgende Werte annehmen[1]:

$$\eta_{cc} = 1.38 \pm 0.3, \quad \eta_{ct} = 0.47 \pm 0.04, \quad \eta_{tt} = 0.5765 \pm 0.0065$$

Zur Vereinfachung werden die QCD-Korrekturen für die neuen Quarks gleich denen der alten Quarks gesetzt:

$$\eta_{t't'} = \eta_{u'} = \eta_u \quad \text{und} \quad \eta_{ct'} = \eta_{ct}$$

Im Allgemeinen sind die Massenmatrixelemente auch von den Up-Quarks abhängig. Diese Abhängigkeit wird mit Hilfe der Unitarität

$$\lambda_u^X + \lambda_c^X + \lambda_t^X = 0 \quad \text{für drei Generationen}$$

$$\lambda_u^X + \lambda_c^X + \lambda_t^X + \lambda_{t'}^X = 0 \quad \text{für vier Generationen}$$

der CKM-Matrix eliminiert (Abhängigkeit von Up-Quark in Inami-Lim-Funktionen versteckt).

Mit Hilfe der Massenmatrixelemente lässt sich ein Parameter Δ definieren, der ein Maß für die Abweichung des Standardmodells mit vier Generationen von dem mit dreien darstellt:

$$\Delta = \frac{M_{12}^{SM4}}{M_{12}^{SM3}} = |\Delta| e^{i\phi^\Delta}$$

Werte für Δ nahe bei 1 bedeuten, dass die Abweichung vom SM3 gering ist.

2. Einschränkung durch den Zerfall $b \rightarrow s\gamma$

Auf analoge Art und Weise lässt sich die Abweichung für den Zerfall des Bottom-Quarks in ein Strange-Quark plus Gamma-Strahlung definieren. Diese ist gegeben durch[1]:

$$\Delta_{b \rightarrow s\gamma} = \frac{|\lambda_t^{SM4}|^2 D_0'(x_t)^2 + 2 \operatorname{Re}(\lambda_t^{SM4} \lambda_{t'}^{SM4}) D_0'(x_t) D_0'(x_{t'}) + |\lambda_{t'}^{SM4}|^2 D_0'(x_{t'})^2}{|\lambda_t^{SM3}|^2 D_0'(x_t)^2}$$

D_0' ist die zugehörige Inami-Lim-Funktion, die definiert ist als:

$$D_0'(x) = -\frac{-7x + 5x^2 + 8x^3}{12(1-x)^3} + \frac{x^2(2-3x)}{2(1-x)^4} \ln(x)$$

Hier werden die gleichen Lambdas verwendet wie bei der Mischung der B_s -Mesonen. Gemäß [1] führen Werte für $\Delta_{b \rightarrow s\gamma}$ um 1 nur zu kleinen Abweichungen für den Quotienten der Zerfallsraten $\Gamma(b \rightarrow s\gamma)^{SM4} / \Gamma(b \rightarrow s\gamma)^{SM3}$.

3. Direkte Bedingungen an die Matrixelemente

Die drei direkten Bedingungen an die Matrixelemente in [1] lauten:

- (i) Die Matrixelemente, die die Mischung der ersten drei Generationen beschreiben, sollen in einer 2σ -Umgebung liegen:

$$|V_i| - 2\Delta V_i < |V_{CKM4,i}| < |V_i| + 2\Delta V_i,$$

wobei ΔV_i den Fehler des Matrixelementes V_i bezeichnet.

Die verwendeten Werte für die CKM-Matrix für drei Generationen entsprechen denen aus [3].

- (ii) Das in [1] definierte χ^2 :

$$\chi^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=ud,us,ub,cd,cs,cb} \left(\frac{|V_{CKM4,i}| - |V_i|}{\Delta V_i} \right)^2$$

n entspricht der Anzahl der Freiheitsgrade und ist in diesem Fall sechs.

(iii) Gemäß [1] existiert für $|V_{ub'}V_{cb'}|$ eine obere Schranke in Abhängigkeit von der Masse des b' -Quarks. Aus den drei gegebenen Wertepaaren

$$|V_{ub'}V_{cb'}| \leq \begin{cases} 0.00395 & m_{b'} = 200 \text{ GeV} \\ 0.00290 & \text{für } m_{b'} = 300 \text{ GeV} \\ 0.00193 & m_{b'} = 500 \text{ GeV} \end{cases}$$

wird mit Hilfe der Mathematik-Software MATHEMATICA (Version7, Wolfram Research) eine inter- bzw. extrapolierende Funktion erzeugt, die folgenden Verlauf hat:

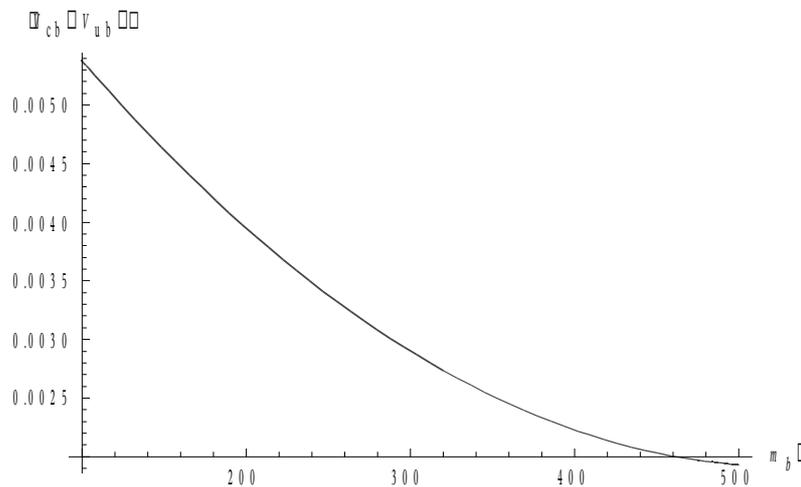


Abbildung 2: Interpolierende Funktion

Mit Hilfe dieser Funktion ist ein direkter Vergleich für ein gegebenes Parameterset möglich.

3.3 Schematischer Aufbau des Programms

Das mit MATHEMATICA geschriebene Programm besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil werden die benötigten Funktionen (3.2) und CKM-Matrixelemente (3.1) definiert. Der zweite Teil besteht aus einer Schleife, die vorgegebene n_{\max} Mal durchlaufen wird.

In der Schleife wird abgefragt, ob die zufällig generierten Parametersets die Bedingungen aus (3.2) für vorgegebene Abweichungen erfüllen.

(i) Einschränkung der Parameter

Für die Winkel der zufällig generierten Parametersets werden die in [1] aufgelisteten Grenzen verwendet:

	θ_{12}	θ_{13}	θ_{14}	θ_{23}	θ_{24}	θ_{34}
Min. Wert	0.222	0.0033	-0.069	0.038	-0.19	-0.8
Max. Wert	0.232	0.0048	0.069	0.046	0.19	0.8

Tabelle 3: Einschränkung der Winkel

Die CP-Verletzenden Phasen werden nicht eingeschränkt: $0 \leq \delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{24} \leq 2\pi$

Die Masse des t' -Quarks wurde aus dem in [1] gegebenem Intervall

$$300\text{GeV} \leq m_{t'} \leq 650\text{GeV}$$

gewählt.

(ii) Maximal erlaubte Abweichungen

Die hier verwendeten maximalen Abweichungen für (3.2.1) und (3.2.2) sind identisch mit den „konservativen Grenzen“ aus [1]:

Parameter	Grenzen
$ \Delta_{B_d} $	1 ± 0.3
$\phi_{B_d}^\Delta$	$0 \pm 10^\circ$
$ \Delta_{B_s} $	1 ± 0.3
$\phi_{B_s}^\Delta$	frei
$\text{Re}(\Delta_{K^0})$	1 ± 0.5
$\text{Im}(\Delta_{K^0})$	0 ± 0.3
$\Delta_{b \rightarrow s\gamma}$	1 ± 0.15

Tabelle 4: Grenzen für Abweichungen vom SM3

Falls ein Parameterset alle gesetzten Rahmenbedingungen erfüllt, wird es in einer Textdatei gespeichert. Ansonsten wird es verworfen.

4. Ergebnisse und Diskussion

Insgesamt wurden ca. 164.000.000 zufällige Parametersets auf die oben beschriebene Art und Weise erzeugt, wovon 182.829 erlaubte Sets sind.

Die Menge aller Parametersets, die als erlaubt eingestuft werden, bilden einen zehndimensionalen Körper. Im nächsten Abschnitt werden verschiedene Schnitte dieses Körpers betrachtet.

Schnitte mit der Masse werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Diese Kombinationen sind häufig nicht sensitiv, allerdings gibt es Ausnahmen, die für nichttriviale Einflüsse auf die erlaubten Parameterregionen sorgen. Dies wird ausführlicher in [1] behandelt.

Falls nach (3.3) erlaubte Gebiete keine Parametersets enthalten, bedeutet dies nicht zwangsläufig, dass dort keine zu finden sind. Möglicherweise sind in diesen Gebieten die übrigen Parameter so sensitiv, dass die durchgeführte Zufallssuche keine Treffer ergab. Diese unwahrscheinliche Möglichkeit wird im Folgenden nicht mehr explizit erwähnt, sollte jedoch beachtet werden.

Die Schnitte wurden mit Hilfe von MATHEMATICA erstellt. Hierzu wurden die als Textdatei abgespeicherten Parametersets als Liste eingelesen und jeweils zwei Listenelemente gegeneinander aufgetragen.

4.1 Winkel-Winkel-Schnitte

Die folgenden vier Schnitte sollen repräsentativ Einblicke in die Struktur des Körpers der zulässigen Parametersets geben. Die weggelassenen Sets sind im Allgemeinen deutlich weniger sensitiv und tragen somit weniger zur Einschränkung des Parameterraums bei.

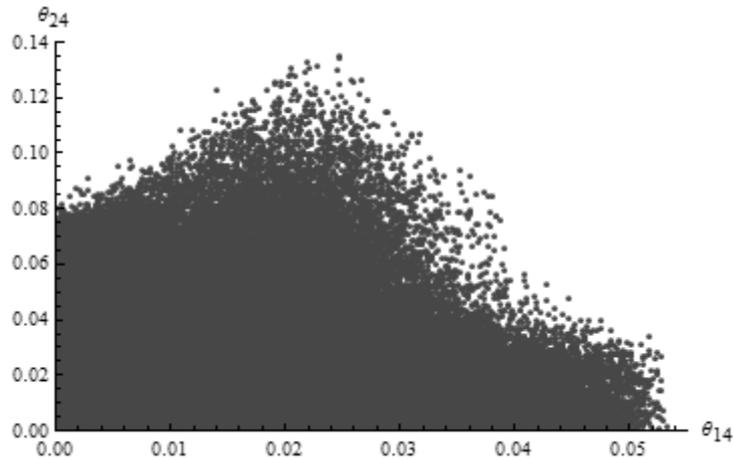


Abbildung 3: Theta14-Theta24-Schnitt

Abbildung 3 zeigt einen Teil des Schnitts zwischen θ_{14} auf der x- und θ_{24} aus der y-Achse. Die Kombination liefert deutliche Einschränkungen. Geschätzte 40% der nach (3.3) möglichen Parameter werden durch die Bedingungen ausgeschlossen. Dennoch bleiben die erlaubten Regionen sehr groß.

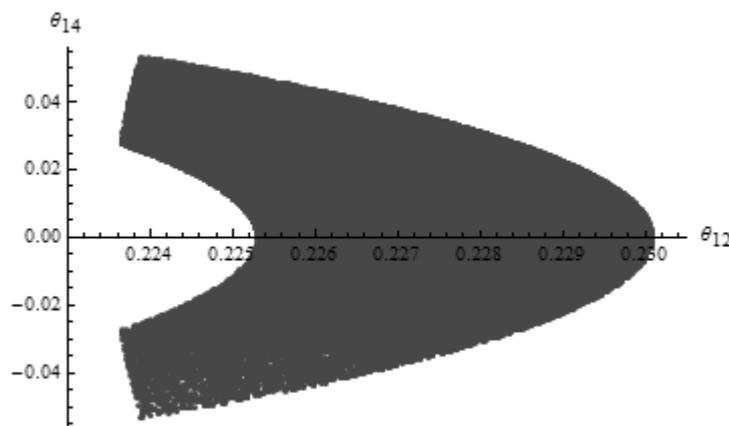


Abbildung 4: Theta12-Theta14-Schnitt

Abbildung 4 zeigt die erlaubten Parameterwerte für den Schnitt zwischen θ_{12} auf der x- und θ_{14} aus der y-Achse.

Die Symmetrie des Graphen bedeutet, dass die stärkste Einschränkung der Winkelwerte durch eine ebenfalls symmetrische Bedingung aus (3.2) kommen muss.

Die Form des Graphen bietet unter Umständen die Möglichkeit, eine einfache Korrelation zwischen θ_{12} und θ_{14} herzustellen, um so die Dimension des Parameterraums zu verringern. Ähnlich wie bei Abb.3 haben die Bedingungen große Gebiete ausgeschlossen.

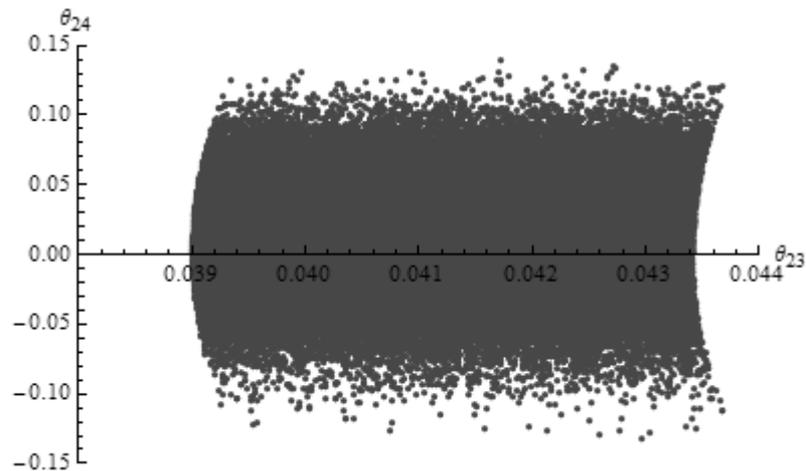


Abbildung 5: Theta23-Theta24-Schnitt

Abbildung 5 zeigt eine fast rechteckige Fläche, wobei sowohl θ_{23} als auch θ_{24} eingeschränkt wurden. Das Maximum für θ_{23} liegt unter 0.044, obwohl ein maximaler Wert von $\theta_{23,\max} = 0.046$ zugelassen ist. Die Dichte der erlaubten Parametersets ist in der Nähe der x-Achse größer als für große Werte für $|\theta_{24}|$.

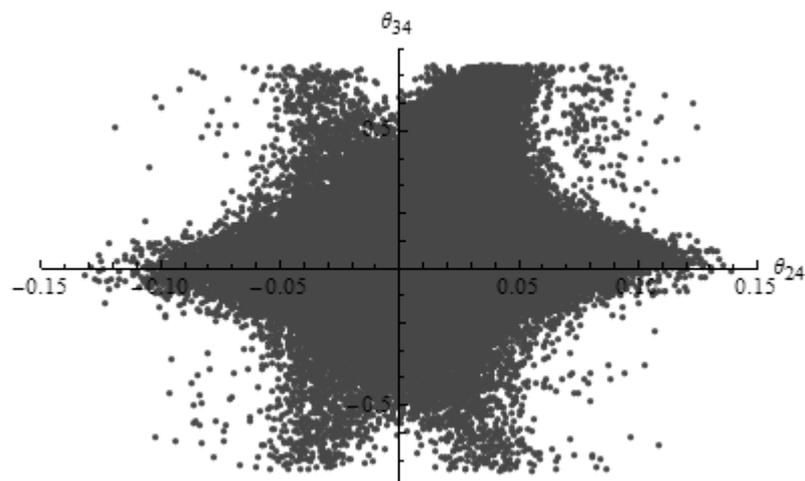


Abbildung 6: Theta24-Theta34-Schnitt

Abbildung 6 zeigt einen Schnitt, der zu beiden Achsen symmetrisch zu sein scheint.

Außerhalb des sternförmigen Gebietes mit einer hohen Dichte scheint es Gebiete zu geben, in denen erlaubte Parametersets liegen, bei denen die Konstellation der θ_{24} und θ_{34} für eine hohe Sensitivität der übrigen Parameter sorgt.

Es wurden keine Sets mit $|\theta_{14}| > 0.054$, $|\theta_{24}| > 0.144$ oder $|\theta_{34}| > 0.737$ gefunden, wie die Abb.3-6 zeigen. Dies bestätigt die entsprechende Aussage in [1].

4.2 Winkel-Phase-Schnitte

Die Abbildungen 7-9 zeigen Schnitte zwischen Winkeln (x-Achse) und Phasen (y-Achse). Hierbei stellen sich die Schnitte der neuen Winkel θ_{14} , θ_{24} und θ_{34} mit den Phasen als besonders sensitiv heraus. Alle dieser Schnitte sind symmetrisch zur y-Achse.

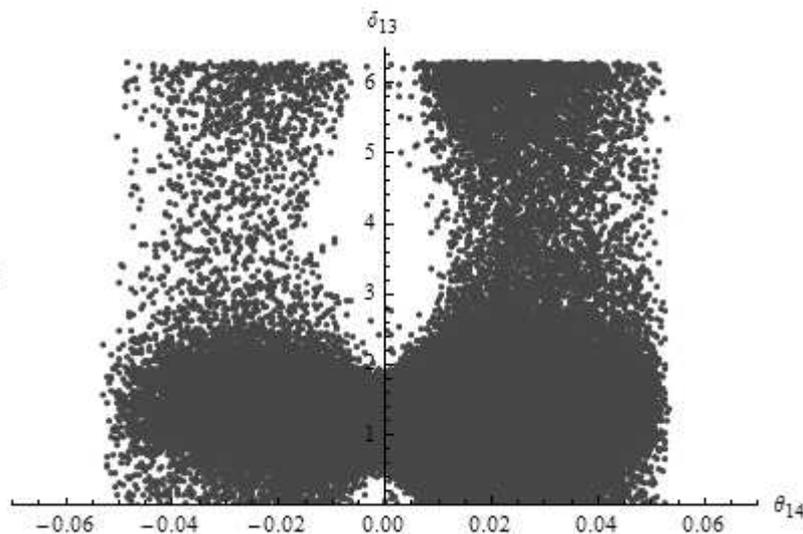


Abbildung 7: Theta14-Delta13-Schnitt

Abbildung 7 zeigt den Schnitt zwischen θ_{14} und der Phase δ_{13} . Die größte Dichte an Parametersets erhält man für $\delta_{13} < 2$. Für größere Werte von δ_{13} gibt es einen Bereich um die y-Achse, der eine geringe bis keine Dichte an erlaubten Wertepaaren aufzeigt. Bis auf diesen Bereich gibt es keine größeren Einschränkungen.

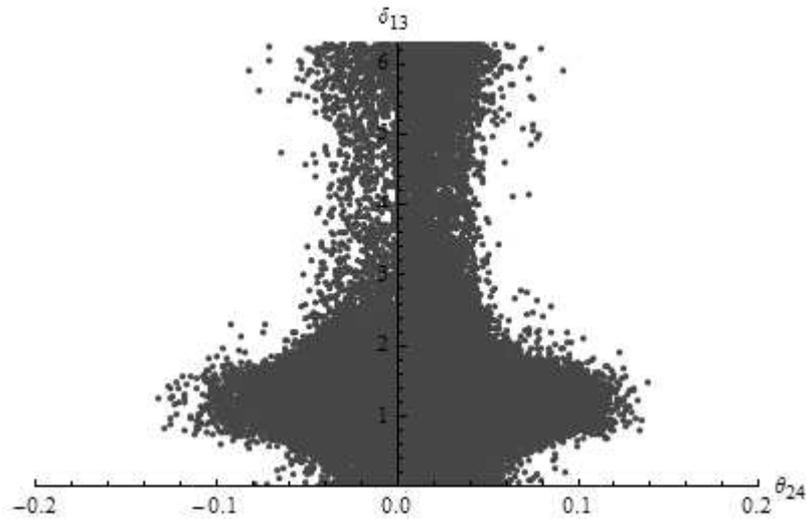


Abbildung 8: Theta24-Delta13-Schnitt

Dieser Schnitt zeigt eine relativ große Sensitivität dieser Parameter. Unter Einbeziehung des Ergebnisses aus (4.1), wonach $|\theta_{24}| < 0.144$, ergeben sich geschätzte 50% der maximal möglichen Parametersets, die hierdurch noch erlaubt sind.

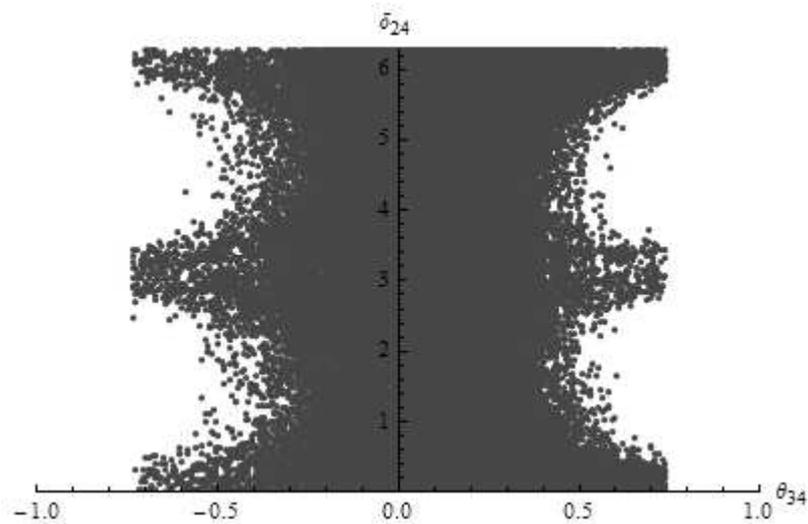


Abbildung 9: Theta34-Delta24-Schnitt

Die in dieser Abbildung aufgetragenen Parameter zeigen eine relativ geringe Sensitivität. Abgesehen von den insgesamt vier nicht erlaubten Gebieten für $\theta_{34} > 0.5$ gibt es keine weiteren Einschränkungen.

4.3 Phase-Phase-Schnitte

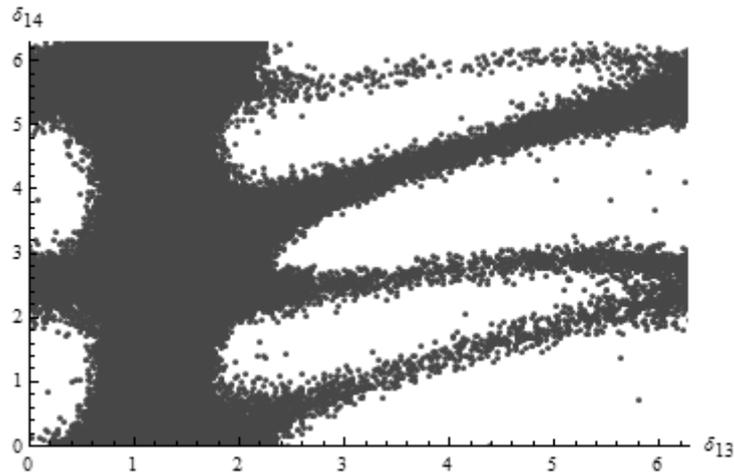


Abbildung 10: Delta13-Delta14-Schnitt

Die in Abbildung 10 gezeigte Struktur ist die komplexeste aller Schnitte. Dieser Schnitt zwischen der alten und einer neuen Phase ist der einzige, der über keine Symmetrie verfügt. Allerdings scheint sich das Muster π -periodisch in δ_{14} zu wiederholen.

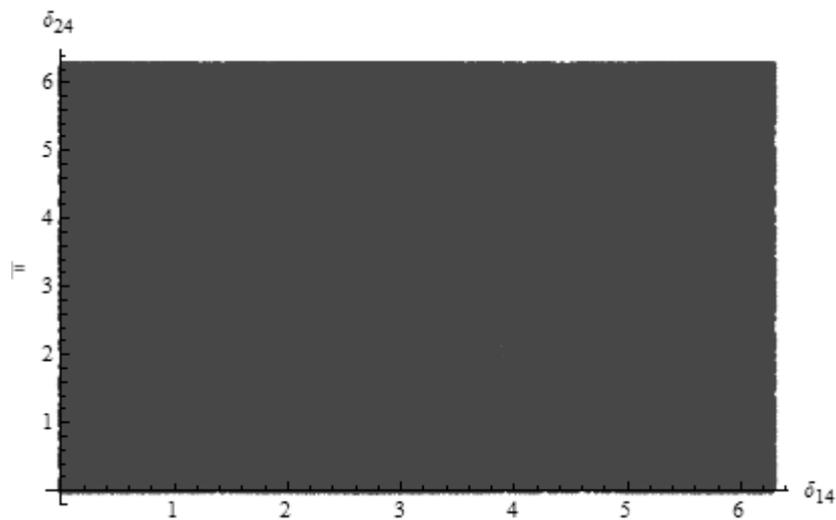


Abbildung 11: Delta14-Delta24-Schnitt

Abbildung 11 zeigt die Abhängigkeit zwischen δ_{14} auf der x-Achse und δ_{24} auf der y-Achse. Der Schnitt dieser Parameter zeigt eine Kombination, die wenig sensitiv ist. Alle Kombinationen sind ungefähr gleich häufig vertreten. Solche relativ homogenen Gebiete treten bei allen untersuchten Schnittklassen auf.

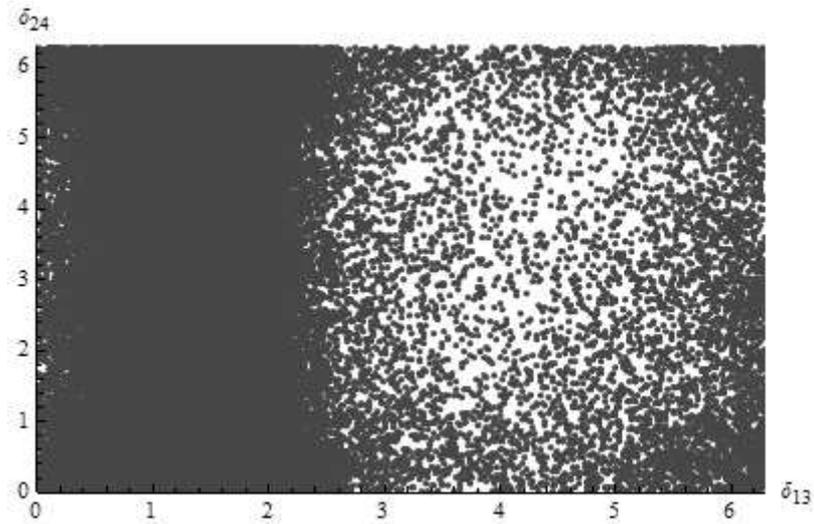


Abbildung 12: Delta13-Delta24-Schnitt

In Abbildung 12 erkennt man ein Gebiet, was vermuten lässt, dass ähnlich zu Abb.11 für alle Werte von δ_{13} und δ_{24} zulässige Parametersets existieren, diese aber nicht homogen verteilt sind. Die Dichte der erlaubten Parametersets ist für $\delta_{13} < 2.5$ deutlich größer, als für Werte, die darüber liegen. Für feste δ_{13} scheint die Dichte ungefähr konstant zu sein.

5. Zusammenfassung

Zusätzlich zu der schwachen Mischung mit einer vierten Generation, die im Rahmen der Messfehler der CKM3-Matrixelemente liegt, zeigt die durchgeführte Analyse, dass die Bedingungen zwar mitunter große Gebiete ausschließen, aber das Standardmodell dennoch sehr viel Platz für relativ starke Mischungen mit Quarks der vierten Generation lässt.

Dies ist kein Beweis für die Existenz einer vierten Generation, zeigt jedoch deutlich, dass sie zum gegenwärtigen Zeitpunkt nicht ausgeschlossen werden kann.

Der voraussichtlich im November 2009 in Betrieb gehende LHC (Large Hadron Collider) hat nach [4] gute Chancen eine vierte Generation zu entdecken, wenn sie existieren sollte, da die Massen der SM4-Quarks auf maximal 1TeV begrenzt seien. Diese Grenze wird beim LHC deutlich überschritten, da dieser für Kollisionsenergien von bis zu 14TeV ausgelegt ist[8].

Sollte eine vierte Generation nicht entdeckt werden, ist dies, unter der obigen Annahme von einer maximalen Masse von 1TeV, ein vollständiger Ausschluss von weiteren Generationen im Rahmen des Standardmodells.

6. Referenzen

- [1] M.Bobrowski, A.Lenz, J.Riedl und J.Rohrwild, arXiv:0902.4883 [hep-ph]
- [2] D.Griffiths, Einführung in die Elementarteilchenphysik, 1. Ausgabe (deutsch), Akademie Verlag
- [3] Particle Data Group, Particle Physics Booklet, July 2008
- [4] B.Holdom, W.S.Hou, T.Hurth, M.Mangano, S.Sultansoy und G.Ünel, [arXiv:0904.4698v1] [hep-ph]
- [5] H.Harari und M.Leurer, Phys.Lett.B 181, 123 (1986)
- [6] G.D.Kribs, T.Plehn, M.Spannowsky und T.M.P.Tait, Phys.Rev.D 76, 075016 (2007) [arXiv:0706.3718 [hep-ph]]
- [7] A.Lenz und U.Nierste, JHEP 0706 (2007) 072 [arXiv:hep-ph/0612167]
- [8] T.Inami und C.S.Lim, Prog.Theor.Phys. 65 (1981) 297 [Erratum-ibid. 65 (1981) 1772]
- [9] <http://www.cern.de>

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbst angefertigt und nur die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Kilian Leßmeier