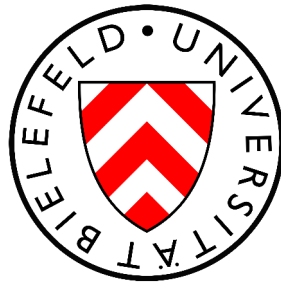


Aspekte der theoretischen Berechnung des anormalen magnetischen Moments von Leptonen

Bachelorarbeit

Zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science
der Fakultät für Physik
der Universität Bielefeld



vorgelegt von

Nils Groeger

Betreuer & erster Gutachter: Prof. Dr. York Schröder
zweiter Gutachter: Dr. Olaf Kaczmarek

Bielefeld, den 30.09.2010

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	4
2	Einführung in die Grundlagen	5
2.1	Das anomale magnetische Moment von Muonen	5
2.2	Die Quantenelektrodynamik und das anomale magnetische Moment . . .	5
2.2.1	Zur Quantenelektrodynamik	5
2.2.2	a_μ in der Quantenelektrodynamik	6
2.2.3	Bestimmung von a_μ aus der allgemeinen Vertexfunktion	8
2.2.4	Projektionsverfahren	9
3	Experimentelle Bestimmung von a_μ	11
4	Beiträge zum anomalen magnetischen Moment des Muons	13
4.1	QED	13
4.1.1	QED-Beitrag zu a_μ in erster Ordnung	13
4.1.2	QED-Beitrag zu a_μ in höheren Ordnungen	18
4.2	Hadronische Beiträge	18
4.2.1	Vakuum-Polarisation	18
4.2.2	Light-by-Light scattering	19
4.3	Elektroschwache Beiträge	20
5	Das Projektionsverfahren zur Bestimmung von a_μ	22
5.1	Die allgemeine Vertexfunktion	22
5.2	Betrachtung von $V^\mu(p)$	25
5.2.1	Summanden mit γ^5	25
5.2.2	Der Anteil $\gamma^\mu c_1$	26
5.3	Weiteres Vorgehen	28
6	Zusammenfassung	29

A	Appendix	30
A.1	Pauli und Dirac Matrizen	30
A.1.1	Pauli Matrizen	30
A.1.2	Dirac Matrizen	30
A.2	Feynman-Regeln der QED	31
A.3	Nützliche Zusammenhänge und Beziehungen	32
A.3.1	Die Feynman-Parametrisierung	32
A.3.2	Relationen für die Dirac Matrizen	32
B	Literaturverzeichnis	33
C	Erklärung	35

1 Motivation

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (SM) ist ein Modell zur Beschreibung aller Teilchen und der Wechselwirkungen zwischen ihnen. Es vereinigt die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung und erklärt diese durch den Austausch von Eichbosonen. Als einzige der vier bekannten Grundkräfte der Physik ist somit die Gravitation nicht mit einbezogen.

Effekte, die mit Hilfe des SM nicht beschrieben werden können, sind als Anzeichen für noch unbekanntes Physik betrachtbar und daher für viele Forscher von besonderem Interesse. Der Vergleich der experimentellen Werte aus der Bestimmung des anomalen magnetischen Moments der Muonen a_μ mit den theoretischen Erkenntnissen kann als Hochpräzisionstest des SM angesehen werden und stimmt nach heutigen Daten in einer Größenordnung von nahezu drei Standardabweichungen nicht mit den Voraussagen überein.

Es stellt sich also die Frage ob das SM bei dieser Genauigkeit tatsächlich nicht mehr gültig ist und der Hochpräzisionstest folglich Hinweise auf eine neue Physik liefert. Nachzuprüfen ist jedoch auch, ob die Differenz zwischen experimentellen Daten und theoretischer Vorhersage auf fehlerhaften Berechnungen oder ungenauen Daten beruhen kann.

In dieser Bachelorarbeit soll die theoretische Seite des Experimentes genauer betrachtet werden. Neben einer Einführung in die Thematik des anomalen magnetischen Momentes (Kapitel 2) und einem Kapitel über das Prinzip der experimentellen Bestimmung von a_μ (Kapitel 3) wurde eine Berechnung des Beitrags erster Ordnung der Quantenelektrodynamik durchgeführt (Kapitel 4). Eine intensive Auseinandersetzung mit dem Projektionsverfahren, einer Methode zur Bestimmung des Beitrags einer Wechselwirkung zu a_μ , ist in Kapitel 5 zu finden.

2 Einführung in die Grundlagen

2.1 Das anomale magnetische Moment von Muonen

Wird ein Teilchen im klassischen Sinne betrachtet, so erhält man sein magnetisches Dipol-Moment durch den Bahndrehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ seiner Bewegung:

$$\vec{\mu}_\tau = \frac{e}{2mc} \vec{L}. \quad (2.1)$$

Hier sind c die Lichtgeschwindigkeit, m die Masse und e die Ladung des Teilchens. In der quantenmechanischen Betrachtungsweise ist \vec{L} ein Operator (Drehimpulsoperator), dessen Eigenwerte in \hbar , dem planckschen Wirkungsquantum, quantisiert sind. Es gilt $\vec{L} = -i\hbar\vec{r} \times \vec{\nabla}$, wobei i die imaginäre Zahl mit $i^2 = -1$ und $\vec{\nabla}$ der Vektor der partiellen Ableitungen ist. Folglich gilt diese Quantisierung auch für das magnetische Moment.

Außerdem besitzen Teilchen in der Quantenmechanik einen Spin. Der Spinoperator ist gegeben durch $\vec{S} = \vec{\sigma}_i/2$, wobei σ_i die Pauli Matrizen sind (siehe Appendix A.1.1, S.30). Der Spin ist, ähnlich zum Drehimpuls, eine durch \hbar quantisierte Größe. Auch zu diesem kann ein zu (2.1) äquivalentes magnetisches Moment dargestellt werden mit

$$\vec{\mu}_\vec{S} = g \frac{e}{2mc} \vec{S}, \quad (2.2)$$

wobei g der gyromagnetische Faktor ist. Die Dirac-Gleichung liefert uns für Leptonen (also Teilchen mit Spin $\frac{1}{2}$) in der klassischen Betrachtungsweise den Wert $g = 2$. [1] Das anomale magnetische Moment von Muonen im Speziellen und Leptonen im Allgemeinen ist nun definiert als die Abweichung von diesem Wert:

$$a_l = \frac{g - 2}{2}. \quad (2.3)$$

2.2 Die Quantenelektrodynamik und das anomale magnetische Moment

2.2.1 Zur Quantenelektrodynamik

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist eine Quantenfeldtheorie und beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen durch den Austausch von Photonen. Als Grenzfall ist in der QED auch die klassische Elektrodynamik enthalten.

Entwickelt wurde sie in den 1940er Jahren von den drei Physikern Sin-Itiro Tomonaga, Julian Schwinger und Richard Feynman, die für ihre fundamentalen Arbeiten auf diesem Gebiet im Jahr 1965 gemeinsam den Nobelpreis für Physik erhielten. Die Lagrange-Dichte, welche die QED definiert, ist gegeben durch

$$\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\Psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\Psi - eJ_\mu A^\mu, \quad (2.4)$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ der Feldstärketensor ist. $\bar{\Psi}$ und Ψ sind Dirac-Spinoren, $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ ist der Potential-Vierervektor mit dem skalaren Potential ϕ und dem Vektorpotential \vec{A} . Durch $J_\mu = \bar{\Psi}\gamma_\mu\Psi$ wird der elektrische Strom beschrieben. Zudem sind die γ_μ mit $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ die Dirac Matrizen (siehe auch Appendix A.1.2, S.30).

2.2.2 a_μ in der Quantenelektrodynamik

Zur Bestimmung des anomalen magnetischen Momentes ist der Wechselwirkungsterm aus Gleichung (2.4) von Interesse:

$$\mathcal{L}_{int} = -eJ^\mu A_\mu. \quad (2.5)$$

Man betrachte nun den Streuprozess eines Muons mit einem Photon, wobei das Muon den Viererimpuls p vor, sowie p' nach dem Vorgang besitzt. Es gilt $p' = p + q$ mit q dem Viererimpuls des Photons. Die Streuamplitude ist nun laut [2] gegeben durch

$$\mathcal{M} = -ie \langle \mu_{p'} | J^\mu(0) | \mu_p \rangle A_\mu(q) \quad (2.6)$$

und mit der Vertexfunktion $\Gamma^\mu(p, q)$ kann das Matrixelement $\langle \mu_{p'} | J^\mu(0) | \mu_p \rangle$ mit den Dirac-Spinoren u_p und $\bar{u}_{p'}$ (siehe auch Appendix A.2, S.31) geschrieben werden als

$$\langle \mu_{p'} | J^\mu(0) | \mu_p \rangle = \bar{u}_{p'} \Gamma^\mu(p, q) u_p. \quad (2.7)$$

Vernachlässigt man zunächst die Strahlungskorrekturen, betrachtet also die erste Ordnung der Feynman-Diagramme, so liefern die Feynman-Regeln der QED $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ (siehe [4, Appendix D]).

Analysiert man Γ^μ genauer, wie dies in [3] getan wurde, so folgt auf Grund der Lorentz-Symmetrie als Ansatz beispielsweise

$$\Gamma^\mu = A\gamma^\mu + B(p^\mu + p'^\mu) + C(p^\mu - p'^\mu). \quad (2.8)$$

Die Koeffizienten A , B und C haben keinen offenen Lorentz-Index und sind abhängig von p^2 , p'^2 und q^2 , sowie von \not{p} und \not{p}' . Die Größen \not{p} und \not{p}' sind als $\not{p} = p_\mu \gamma^\mu$ und $\not{p}' = p'_\mu \gamma^\mu$ definiert. Unter Berücksichtigung der Dirac-Gleichung $(i\partial_\mu \gamma^\mu - m)\Psi = 0$ und der on-shell-Bedingung $p^2 = m^2$ folgt, dass A , B und C lediglich von der Muon-Masse m und dem Quadrat des Photon-Viererimpulses q^2 abhängen.

Durch Nutzung der Ward-Identität, die $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ liefert (siehe [3, Kapitel 5.5]), ergibt sich

$$q_\mu \Gamma^\mu = q_\mu A \gamma^\mu + q_\mu B (p^\mu + p'^\mu) + q_\mu C (p^\mu - p'^\mu) \stackrel{!}{=} 0. \quad (2.9)$$

Vergegenwärtigt man sich erneut die Struktur des Matrixelements (siehe (2.7)), so folgt $\bar{u}_{p'} q_\mu \gamma^\mu u_p = 0$. Zudem gilt auf Grund der on-shell-Bedingung $q_\mu (p^\mu + p'^\mu) = 0$. Da für den dritten Term $q_\mu (p^\mu - p'^\mu) \neq 0$ gilt, folgt aus der soeben eingeführten Ward-Identität $C = 0$.

Die Gordon-Identität liefert

$$\bar{u}_{p'} \gamma^\mu u_p = \bar{u}_{p'} \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u_p, \quad (2.10)$$

wobei hier $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$ eingeführt wurde. Die Identität lässt sich zeigen über

$$[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2\gamma^\mu \gamma^\nu - 2\eta^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

so dass

$$i\sigma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^\nu \gamma^\mu - \eta^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Es gilt nun

$$\bar{u}_{p'} i\sigma^{\mu\nu} (p'_\nu - p_\nu) u_p = \bar{u}_{p'} \left[\not{p}' \gamma^\mu - (p'^\mu + p^\mu) + \gamma^\mu \not{p} \right] u_p \quad (2.13)$$

und über die Dirac-Gleichungen $(\not{p} - m)u_p = 0$, sowie $\bar{u}_{p'}(\not{p}' - m) = 0$ folgt

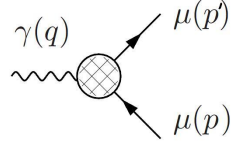
$$\bar{u}_{p'} i\sigma^{\mu\nu} (p'_\nu - p_\nu) u_p = \bar{u}_{p'} [2m\gamma^\mu - (p'^\mu - p^\mu)] u_p, \quad (2.14)$$

was durch Umstellen die Gordon-Identität liefert.

Die allgemeine Vertexfunktion kann nun folgendermaßen geschrieben werden:

$$\Gamma^\mu(p, p') = \gamma^\mu F_E(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_M(q^2). \quad (2.15)$$

Es gilt daher



$$= -ie \bar{u}_{p'} \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_M(q^2) \right] u_p, \quad (2.16)$$

mit dem Dirac-Formfaktor $F_E(q^2)$ und dem Pauli-Formfaktor $F_M(q^2)$.

2.2.3 Bestimmung von a_μ aus der allgemeinen Vertexfunktion

Zur Bestimmung des anomalen magnetischen Momentes wird der nichtrelativistische Limes der Streuamplitude (siehe Gleichung (2.7)) gebildet und mit der Born-Näherung verglichen.

Zur Bildung des Limes werden die Dirac-Spinoren in \mathcal{M}

$$u_p = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \mathcal{X} \\ \frac{\vec{p}\vec{\sigma}}{E+m} \mathcal{X} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

gesetzt, wobei \mathcal{X} ein Pauli-Spinor ist.

Hier gilt $E = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, wobei die Terme ab den Ordnungen p^2/m^2 und p'^2/m^2 vernachlässigt werden. Wie in [5, Kapitel 2.1] folgt

$$\lim_{|p| \ll m} \mathcal{M} = -2iem \mathcal{X}'^\dagger \left[F_E(0) \left(\varphi_q - \frac{\vec{A}_q(\vec{p}' + \vec{p})}{2m} \right) - i \frac{F_E(0) + F_M(0)}{2m} \vec{\sigma} [\vec{q} \times \vec{A}] \right] \mathcal{X}. \quad (2.18)$$

mit den Fourier-Komponenten des Viererpotentials φ_q und \vec{A}_q .

Wenn eine im Vergleich zum Streupotential große Energie des gestreuten Teilchens gegeben ist, kann die Bornsche Näherung verwendet werden. In dieser liefert die Streuamplitude

$$f = -\frac{m}{2\pi} \int d^3r \Psi^*(p') V \Psi(p), \quad (2.19)$$

die über

$$4\pi i f = \lim_{|\vec{p}| \ll m} \mathcal{M} \quad (2.20)$$

mit \mathcal{M} zusammenhängt.

Es ist $\Psi(p) = \mathcal{X} \exp(i\vec{p}\vec{r})$ die nichtrelativistische Wellenfunktion und \mathcal{X} der Pauli-Spinor. V steht für

$$V = -\frac{e}{2m}(\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p}) - \mu\vec{\sigma}\vec{B} + e\varphi, \quad (2.21)$$

sodass per Fourier-Transformation aus Gleichung (2.19) folgt:

$$f = -\frac{m}{2\pi} \mathcal{X}'^+ \left(\vec{A}_q (\vec{p}' + \vec{p}) + e\varphi_q - i\mu\vec{\sigma} [\vec{q} \times \vec{A}_q] \right) \mathcal{X}. \quad (2.22)$$

In diesem Ausdruck ist μ definiert als $\frac{|\vec{\mu}|}{2|\vec{S}|}$. Einsetzen von 2.22 und 2.18 in ihren Zusammenhang (siehe Glg. (2.20)) liefert nun

$$F_E(0) = 1, \quad \mu = \frac{e}{2m} (F_E(0) + F_M(0)). \quad (2.23)$$

Unter Berücksichtigung von (2.2) und (2.3) führt Gleichung (2.23) zu

$$g = 2(1 + F_M(0)) \quad \text{und daher gilt} \quad \frac{g-2}{2} = a_\mu = F_M(0). \quad (2.24)$$

Folglich trägt lediglich der Pauli-Formfaktor zum anomalen magnetischen Moment a_μ bei. Mit Blick auf (2.16) wird klar, dass alle zu γ^μ proportionalen Anteile von Γ^μ nicht zu a_μ beitragen und vernachlässigt werden können.

2.2.4 Projektionsverfahren

Um a_μ zu bestimmen wird nicht die vollständige Vertexfunktion Γ^μ benötigt, da über Projektionen die für die Berechnung interessanten Anteile herausgefiltert werden können. Hierzu kann die Vertexfunktion zunächst um $q = 0$ entwickelt werden, so dass

$$\Gamma^\mu(P, q) \simeq \Gamma^\mu(P, 0) + q_\nu \frac{\partial}{\partial q_\nu} \Gamma^\mu(P, q) \Big|_{q=0} \equiv V^\mu(p) + q_\nu T^{\nu\mu}(p). \quad (2.25)$$

Als Ergebnis der Projektion ergibt sich

$$a_\mu = \frac{1}{12m^2} \text{Tr}\{G_\mu V^\mu(p) + H_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(p)\} \Big|_{p^2=-m^2} \quad (2.26)$$

mit

$$G_\mu = m^2 \gamma_\mu + 3mp_\mu + 4\not{p}p_\mu, \quad (2.27)$$

$$H_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}i(-i\not{p} + m)(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)(-i\not{p} + m). \quad (2.28)$$

Besonders interessant ist diese Methode für die Berechnung höherer Ordnungen, da sich der Umgang mit den dort sehr häufig auftretenden Dirac-Matrizen durch die Spur sehr vereinfacht.

Eine genauere Betrachtung des Projektionsverfahrens lässt sich in Kapitel 5 (siehe S.22) finden.

3 Experimentelle Bestimmung von a_μ

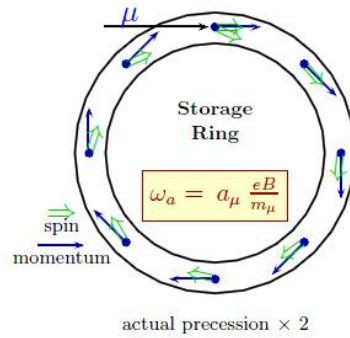


Abbildung 3.1: Präzession des Spins im Speicherring des g-2-Experimentes [1, Kap. 2.1]

Werden polarisierte Muonen in einem konstanten magnetischen Feld auf eine Kreisbahn gebracht, so ist das anomale magnetische Moment für die sogenannte Larmor-Präzession verantwortlich. Diese beschreibt eine Präzession des Muon-Spins und wird von der Kreisfrequenz $\vec{\omega}_a$ charakterisiert (siehe Abb. 3.1). Auf diesem Prinzip beruht das Brookhaven Muon g-2 Experiment (dargestellt in Abb. 3.2), welches die zur Zeit genauesten experimentellen Werte für a_μ liefert.

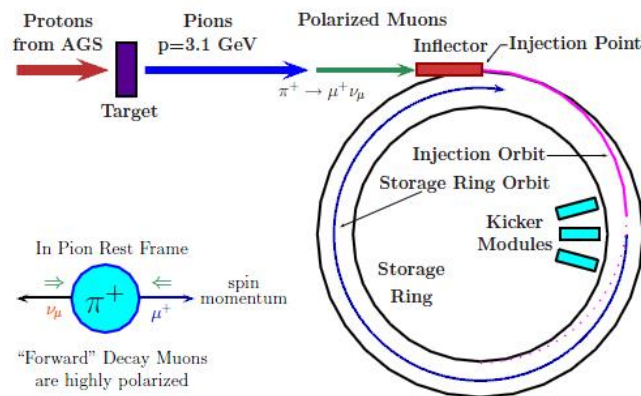


Abbildung 3.2: Versuchsschema des Brookhaven g-2-Experimentes [1, Kap. 2.1]

Protonen der Energie 24GeV aus dem AGS (Alternating Gradient Synchrotron) treffen auf ein Target. Dort werden Pionen produziert, die, bevor sie in den Speicherring eintreten, in Muonen zerfallen. Die longitudinal polarisierten Muonen werden mit Hilfe eines Magnetfeldes \vec{B} auf einer Kreisbahn gehalten und haben dabei die Kreisfrequenz $\omega_c = eB/(m\gamma)$ mit $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ und der Muon-Geschwindigkeit v . Die Spin-Achse des Muon ändert sich mit jeder Ringdurchquerung (siehe Abb. 3.1) mit der Kreisfrequenz ω_s . Es gilt

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c, \quad \text{wobei} \quad \omega_s = \frac{eB}{m\gamma} + a_\mu \frac{eB}{m} \quad \text{und somit} \quad \omega_a = a_\mu \frac{eB}{m}. \quad (3.1)$$

Wäre $g = 2$, so würde sich hier keine Dispersion des Muon-Spins zeigen. Die Werte für e und m wurden in anderen Experimenten bestimmt, sodass im Brookhaven Muon $g-2$ Experiment noch B und ω_a gemessen werden mussten.

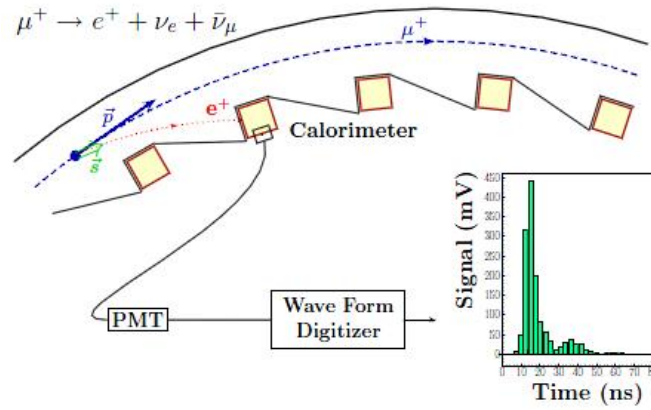


Abbildung 3.3: Der μ^+ -Zerfall und die Messung der emittierten Positronen [1, Kap. 2.1]

Die Muonen wurden annähernd auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Sie haben daher im äußeren Bezugssystem eine verlängerte Lebensdauer, weshalb sie den Ring häufig umrunden können bevor sie zerfallen. Dies geschieht mit $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ (analog für Versuche mit negativ geladenen Muonen), wobei das Positron sich nach dem Zerfall mit hoher Wahrscheinlichkeit in die Richtung des Muon-Spins bewegt und ist auf die Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung zurückzuführen.

Die Energien der emittierten Positronen werden von 24 Calorimetern gemessen (siehe Abb. 3.3) und geben somit Aufschluss über die Präzession des Muon-Spins und daher auch über a_μ .

Aktuell wird der experimentell ermittelte Wert [1, Kap. 2.1] für a_μ angegeben mit

$$a_\mu = 11659208.0(6.3) \times 10^{-10}. \quad (3.2)$$

4 Beiträge zum anomalen magnetischen Moment des Muons

Die theoretische Voraussage für a_μ setzt sich aus allen für die Vertexfunktion gültigen Feynman-Diagrammen zusammen (siehe Glg. (2.16)). Für eine Aufteilung dieser Diagramme bezüglich ihrer Wechselwirkungsarten ergeben sich die Klassen QED, hadronische Beiträge und elektroschwache Beiträge.

4.1 QED

Die QED-Feynman-Diagramme beinhalten Photonen und geladene Leptonen und können in Diagramme verschiedener Ordnungen, abhängig von der Anzahl ihrer Vertices, eingeteilt werden. Die jeweiligen Beiträge zu a_μ sind nun in einer Reihe um die Feinstrukturkonstante α entwickelbar, da die Vertices in den QED-Feynman-Regeln von e abhängen und da

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}. \quad (4.1)$$

4.1.1 QED-Beitrag zu a_μ in erster Ordnung

In erster Ordnung ergibt sich lediglich das in Abb. 4.1 dargestellte Diagramm, dessen Beitrag zu a_μ zuerst im Jahre 1948 von Schwinger bestimmt wurde. Er beträgt

$$a_\mu^{qed,1.} = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (4.2)$$

Um diesen Wert zu bestätigen wertet man Abb. 4.1 mit den Feynman-Regeln der QED aus (siehe Appendix A.2, S.31) und es folgt:

$$\mathcal{M} = \int \frac{dk^4}{(2\pi)^4} \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p-k)^2 + i\epsilon} \bar{u}(p')(ie\gamma^\nu) \frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\rho) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} (ie\gamma^\mu) u(p). \quad (4.3)$$

Damit die Pole im Nenner umgangen werden, können zunächst die Komponenten aller Vierervektoren mit dem Lorentz-Index 0 transformiert werden, so dass $p^0 \rightarrow ip^0$, $p'^0 \rightarrow ip'^0$, $k^0 \rightarrow ik^0$ und $k'^0 \rightarrow ik'^0$. Wird daraufhin die Feynman-Parametrisierung (siehe Appendix A.3.1, S.32) angewendet und der Nenner ausmultipliziert, so ergibt sich:

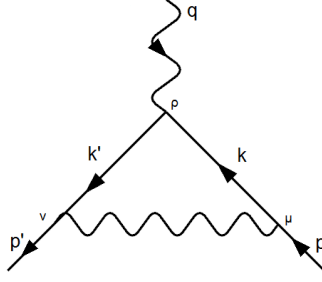


Abbildung 4.1: Der QED-Beitrag erster Ordnung zu a_μ als Feynman-Diagramm mit den Impulsen p , p' , k , k' und q . ρ , μ und ν geben den jeweiligen Lorentz-Index des Vertices an.

$$\mathcal{M} = -2ie^3 \int_k d^4k \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\eta_{\mu\nu} \bar{u}(p') \gamma^\nu (\not{k}' + m) \gamma^\rho (\not{k} + m) \gamma^\mu u(p)}{[k^2 + 2k(qx_2 - px_1) + m^2(x_2 + x_3) + p^2x_1 + q^2x_2]^3}. \quad (4.4)$$

Der Zähler von Gleichung (4.4) wird nun ausmultipliziert. Verwendet man Appendix A.3.2 (siehe S.32) und die Relation $\eta_{\mu\nu} \gamma_\mu = \gamma^\nu$, dann folgt:

$$\mathcal{M} = 4ie^3 \int_k d^4k \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\bar{u}(p') (k'_\alpha k_\beta \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(k^{\rho'} + k^\rho) + m^2 \gamma^\rho) u(p)}{[k^2 + 2k(qx_2 - px_1) + m^2(x_2 + x_3) + p^2x_1 + q^2x_2]^3}. \quad (4.5)$$

Damit der k -Term nicht mehr im Nenner steht, wird dieser mit $+(qx_2 - px_1)^2 - (qx_2 - px_1)^2$ erweitert, wobei $(qx_2 - px_1) \equiv l$, so dass

$$\begin{aligned} & [k^2 + 2k(qx_2 - px_1) + m^2(x_2 + x_3) + p^2x_1 + q^2x_2]^3 \\ & \rightarrow [(k+l)^2 + m^2(x_2 + x_3) + p^2x_1 + q^2x_2 - l^2]^3. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Substituiere nun in Gleichung (4.5) $k \rightarrow k - l$, dann liefert diese

$$\mathcal{M} = 4ie^3 \int_k d^4k \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\bar{u}(p') ((k_\alpha - l_\alpha + q_\alpha)(k_\beta - l_\beta) \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(2k^\rho - 2l^\rho + q^\rho)) u(p)}{[(k)^2 + m^2(x_2 + x_3) + p^2x_1 + q^2x_2 - l^2]^3}. \quad (4.7)$$

Ausmultiplizieren des Zählers zwischen den Dirac-Spinoren ergibt nun

$$(k_\alpha k_\beta - k_\alpha l_\beta - l_\alpha k_\beta + l_\alpha l_\beta + q_\alpha k_\beta - q_\alpha l_\beta) \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(2k^\rho - 2l^\rho + q^\rho) + m^2 \gamma^\rho. \quad (4.8)$$

Nun werden die einzelnen Summanden des Zählers betrachtet. Wie bereits in Kapitel 2.2.3 gezeigt, trägt der zu einer Dirac Matrix proportionale Term nicht zu a_μ bei. Der Term $m^2 \gamma^\rho$ kann also vernachlässigt werden.

Auch $k_\alpha k_\beta \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha$ muss nicht berücksichtigt werden, da ein Vertauschen der γ zu

$$k_\alpha k_\beta \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha = k_\alpha k_\beta (2\eta_{\rho\beta} \gamma^\alpha - \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\alpha) \quad (4.9)$$

führt. Der Summand $2\eta_{\rho\beta} \gamma^\alpha$ entfällt nun, da dort für gleiche Lorentz-Indizes eine Proportionalität zu γ entsteht. Der Term trägt also nicht bei. Für ungleiche Lorentz-Indizes ergibt die Komponente des metrischen Tensors Null, auch in diesem Fall trägt der Term folglich nicht bei.

Auch $-k_\alpha k_\beta \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\alpha$ wird nicht benötigt. Dies zeigt die folgende Relation, die gilt, wenn der Faktor $2\eta_{\alpha\beta}$ wegfällt, da er lediglich zu γ^ρ proportional ist:

$$\begin{aligned} \gamma^\alpha \gamma^\beta k_\beta k_\alpha &= -\gamma^\beta \gamma^\alpha k_\alpha k_\beta, \\ \not{k} \not{k} &= -\not{k} \not{k}, \\ 2\not{k} \not{k} &= 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Unter Berücksichtigung dieser Punkte hat der Zähler noch die Form

$$(-k_\alpha l_\beta - l_\alpha k_\beta + l_\alpha l_\beta + q_\alpha k_\beta - q_\alpha l_\beta) \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(2k^\rho - 2l^\rho + q^\rho). \quad (4.11)$$

Erinnert man sich nun an die Struktur des Nenners und daran, dass dieser in Abhängigkeit von k gerade ist, so können alle Summanden im Zähler, die lediglich von k abhängen, vernachlässigt werden. Es bleibt:

$$\mathcal{M} = 4ie^3 \int_k d^4 k \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\bar{u}(p') ((l_\alpha l_\beta - q_\alpha l_\beta) \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(q^\rho - 2a^\rho)) u(p)}{[k^2 + m^2(x_2 + x_3) + p^2 x_1 + q^2 x_2 - l^2]^3}. \quad (4.12)$$

Wird nun wiederum der Zähler betrachtet und setzt $l = qx_2 - px_1$ eingesetzt, außerdem $\gamma^\mu p_\mu = \not{p}$ sowie $q = p' - p$ benutzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} & \not{p} \gamma^\rho \not{p} ((x_1 + x_2)^2 - x_1 - x_2) + \not{p} \gamma^\rho \not{p}' (x_1 - x_1 x_2 + x_2 - x_2^2) \\ & + \not{p}' \gamma^\rho \not{p} (-x_1 x_2 + x_2 - x_2^2) + \not{p}' \gamma^\rho \not{p}' (x_2^2 - x_2) \\ & - 2m(p'^\rho - p^\rho) + 4m(p'^\rho x_2 - p^\rho x_2 - p^\rho x_1). \end{aligned} \quad (4.13)$$

An dieser Stelle wird (wie schon in Kapitel 2.2.2) die Dirac-Gleichung genutzt. Durch Nichtberücksichtigung der zu γ proportionalen Terme und Setzen von $(x_1+x_2)^2 - x_1 - x_2 \equiv a$, $x_2^2 - x_2 \equiv b$, $x_1 - x_1x_2 + x_2 - x_2^2 \equiv c$, $-1 + 2x_2 \equiv d$, sowie $-1 + 2x_1 + 2x_2 \equiv e$, bleibt im Zähler

$$\not{p}\gamma^\rho am + \gamma^\rho \not{p}'bm + 2(p'^\rho + p^\rho)cm + 2p'^\rho dm + 2p^\rho em \quad (4.14)$$

übrig.

Mit dem Dirac-Spinor rechts daneben gedacht gilt nun

$$\gamma^\rho \not{p} = m\gamma^\rho, \quad (4.15)$$

dieser Anteil trägt also nicht bei. Außerdem folgt mit der in Appendix A.3.2 (siehe S.32) gezeigten Relation $\gamma^\mu\gamma^\nu = \eta_{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$, dass

$$\gamma^\rho \not{p} = p^\rho - ip_\mu\sigma^{\rho\mu}. \quad (4.16)$$

Da der Anteil nicht beiträgt kann also in der Rechnung $p^\rho \rightarrow ip_\mu\sigma^{\rho\mu}$ vorgenommen werden. Wendet man die selbe Relation nun auf $\not{p}\gamma^\rho$ an, so erhält man $\not{p}\gamma^\rho = -2ip_\mu\sigma^{\rho\mu}$. In angepasster Form gilt dies ebenso für $\gamma^\rho \not{p}'$.

Werden a , b , c , d und e wieder eingesetzt nimmt der Zähler also die Form

$$2im\sigma^{\rho\mu} \left(p'_\mu (x_1 + 2x_2 - x_1x_2 - 1) - p_\mu (x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 1) \right) \quad (4.17)$$

an.

Eingesetzt in Gleichung (4.12) ergibt sich

$$\mathcal{M} = 4ie^3 \int_k d^4k \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\bar{u}(p') 2im\sigma^{\rho\mu} \left(p'_\mu (x_1 + 2x_2 - x_1x_2 - 1) - p_\mu (x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 1) \right) u(p)}{[k^2 + m^2(x_2 + x_3) + p^2x_1 + q^2x_2 - l^2]^3}. \quad (4.18)$$

Ein letzter Schritt vor der Auswertung des Integrals betrifft den Nenner. Via $q^2 = pq = 0$ und somit $p^2 = p'^2 = -m^2$ ergibt sich mit der Verschiebung $k \rightarrow km(1 - x_1)$:

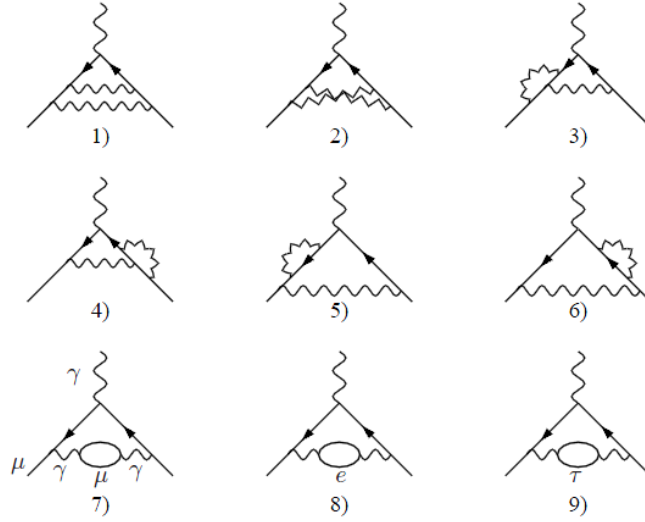


Abbildung 4.2: QED-Beiträge zweiter Ordnung zu a_μ

$$\mathcal{M} = 4ie^3 \int_k d^4k \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\frac{\bar{u}(p') 2im\sigma^{\rho\mu} \left(p'_\mu (x_1 + 2x_2 - x_1x_2 - 1) - p_\mu (x_1^2 + x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 1) \right) u(p)}{(k^2 + 1)^3 (m^2 (1 - x_1)^2)^3}.$$

(4.19)

Das Lösen eines Impulsintegrals der Form

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + 1)^n}$$

(4.20)

ergibt in Kugelkoordinaten:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \int_0^\infty \frac{dk k^{d-1}}{(k^2 + 1)^n} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \frac{\Gamma(n - d/2)}{2^d \pi^{d/2} \Gamma(n)}.$$

(4.21)

Nun ist das Integral berechenbar und nach Entwicklung um $d = 4 - 2\varepsilon$ erhält man

$$a_\mu^{qed,1.} = F_E(0) = \frac{\alpha}{2\pi},$$

(4.22)

was dem Beitrag erster Ordnung in der QED zu a_μ entspricht.

4.1.2 QED-Beitrag zu a_μ in höheren Ordnungen

Die Beiträge zweiter Ordnung in der QED werden aus neun Diagrammen (siehe Abb. 4.2) gebildet. In den ersten sechs dargestellten Fällen existiert ein zweites virtuelles Photon und die letzten drei haben eine Vakuum-Polarisation mit einem Photon.

In dritter Ordnung existieren 72 relevante Diagramme und in vierter Ordnung sind es bereits 891, deren analytische Bestimmung immer komplexer wird. Bekannt sind analytisch zur Zeit nur wenige Diagramme vierter Ordnung, die restlichen wurden numerisch berechnet. Die Beiträge der Ordnungen ergeben:

$$\begin{aligned}
a_\mu^{qed,1} &= 116140973.289 & (43) & \times 10^{-11}, \\
a_\mu^{qed,2} &= 413217.620 & (14) & \times 10^{-11}, \\
a_\mu^{qed,3} &= 30141.902 & (1) & \times 10^{-11}, \\
a_\mu^{qed,4} &= 380.807 & (25) & \times 10^{-11}, \\
a_\mu^{qed,5} &= 4.483 & (135)(31) & \times 10^{-11}.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Der gesamte Anteil der QED am anomalen magnetischen Moment der Muonen wird folglich mit

$$a_\mu = 116584718.104[.148] \times 10^{-11} \tag{4.24}$$

bezieht, wobei der Fehler größtenteils aus den geschätzten Beiträgen der Diagramme fünfter Ordnung besteht [1, Kapitel 4].

4.2 Hadronische Beiträge

Beiträge zu a_μ aus der Quantenchromodynamik (QCD) treten ab der zweiten Ordnung der Feynman-Diagramme auf. Im Gegensatz zur QED ist es bei Betrachtung der QCD-Beiträge nicht möglich, die Diagramme in einer Reihenentwicklung darzustellen, da die Kopplungskonstante der QCD für kleine Energien groß wird. Aus diesem Grund verursachen die hadronischen Beiträge die größte Ungenauigkeit in der theoretischen Bestimmung von a_μ . Von der Größenordnung her ist $a_\mu^{had} \approx 6 \times 10^{-5} a_\mu^{QED}$. Jedoch ist der Beitrag so groß, dass er nicht vernachlässigbar ist.

Es gibt zwei Arten von hadronischen Beiträgen, die Vakuum-Polarisation und das Light-by-Light scattering.

4.2.1 Vakuum-Polarisation

Benutzt man die Störungsrechnung, so ergibt sich der Beitrag der Vakuum-Polarisation durch Ersetzen der Lepton-Loops in den QED-Diagrammen (siehe Abb. 4.1) mit Quark-Loops und durch Anpassung von Ladung, Farb-Eigenschaften und Massen. Es muss jedoch beachtet werden, dass Quarks immer in gebundenen Zuständen auftreten und die

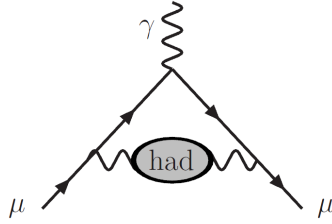


Abbildung 4.3: Beitrag der Vakuumpolarisation führender Ordnung [1, Kap. 4]

Massen somit nicht eindeutig angegeben werden können [3]. Diese Art der Bestimmung der a_μ -Beiträge ist jedoch nur für Energien über ca. 2GeV verlässlich, da bei geringeren Energien die Kopplungskonstante groß wird und a_μ damit nicht mehr als Reihe um α entwickelbar ist.

Betrachtet man in Abb. 4.3 lediglich den Loop, so kann dieser durch die Selbstenergiefunktion Π beschrieben werden und durch die Dispersionsrelation (siehe [1, Kap. 4]) in Beziehung mit dem Wirkungsquerschnitt gebracht werden. Da dieser durch Experimente bekannt ist, kann der Beitrag der Vakuumpolarisation abgeschätzt werden. Gegenwärtig beträgt der Wert

$$a_\mu^{hvp} = 6802.7(52.6) \times 10^{-11}. \quad (4.25)$$

4.2.2 Light-by-Light scattering

Ab der dritten Ordnung treten sogenannte Light-by-Light scattering Effekte auf. Die folgende Abbildung zeigt, gemeinsam mit den fünf möglichen Permutationen der q_i , die Diagramme, die in dieser Ordnung zu a_μ beitragen.

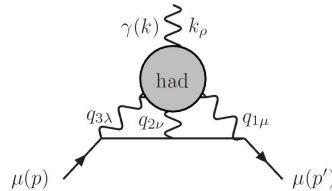


Abbildung 4.4: Der Light-by-Light scattering Beitrag führender Ordnung [1, Kap. 5]

Eine Auswertung von Abb. 4.4 bezüglich des Beitrages zu a_μ ist schwierig, da drei der vier Photonen virtuell sind - weshalb auch keine experimentellen Daten für den Loop vorliegen - und über den gesamten Vierer-Impulsraum integriert werden muss. Aus diesem Grund müssen Beschreibungen der QCD, wie die chirale Störungstheorie, benutzt werden. Für eine genauere Auseinandersetzung mit der Berechnung dieses Beitrages siehe [1, Kapitel 5].

An dieser Stelle findet sich als aktueller theoretischer Wert für den a_μ -Anteil des Hadronischen Light-by-Light scatterings:

$$a_\mu^{hbl} = 116.0(39.0) \times 10^{-11}. \quad (4.26)$$

4.3 Elektroschwache Beiträge

Die schwache Wechselwirkung liefert einen Beitrag von etwa drei Standardabweichungen. Würde ihr Anteil vernachlässigt, so betrüge der Unterschied zwischen Theorie und Experiment 6σ .

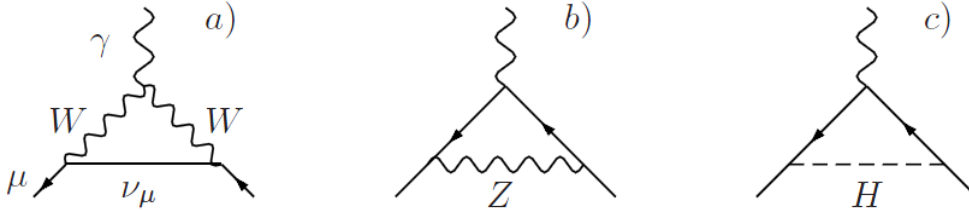


Abbildung 4.5: Feynman-Diagramme der führenden Beiträge der schwachen Wechselwirkung [1, Kap. 6]

In erster Ordnung existieren die in Abb. 4.5 dargestellten Feynman-Diagramme. Für den Fall eines vernachlässigbaren Verhältnisses $\mathcal{O}(m^2/m_{W,Z}^2)$ können die Beiträge der drei Diagramme zu a_μ mit

$$a_\mu^{ew,1.,a}(W) = \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{16\pi^2} \frac{10}{3} \simeq 388.70(0) \times 10^{-11}, \quad (4.27)$$

$$a_\mu^{ew,1.,b}(Z) = \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{16\pi^2} \frac{(-1 + 4s_W^2)^2 - 5}{3} \simeq -193.89(2) \times 10^{-11}, \quad (4.28)$$

$$a_\mu^{ew,1.,c}(H) = \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{4\pi^2} \begin{cases} \frac{m^2}{m_H^2} \ln\left(\frac{m_H^2}{m^2}\right) & \text{für } m_H \gg m \\ \frac{3}{2} & \text{für } m \gg m_H \end{cases} \quad (4.29)$$

angegeben werden [1, Kapitel 6]. Hier wurden die Fermi-Konstante $G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} GeV$ und der Parameter $s_W^2 = \sin^2(\Theta_W) = 1 - (m_W^2/m_Z^2) = 0.22276(56)$, sowie die Massen des W- und des Z-Bosons $m_W = 80.398 \pm 0.025 GeV$ und $m_Z = 91.1876 \pm 0.0021 GeV$ benutzt.

Für Diagramm c) gibt es eine Unterscheidung für verschiedene m_H , da der Wert für das Higgs-Boson noch nicht bekannt ist. Für die zur Zeit vermutete Größe

$$114\text{GeV} < m_H < 144\text{GeV} \quad [1, \text{Appendix A}] \quad (4.30)$$

erhält man einen vernachlässigbaren Beitrag

$$a_\mu^{ew,1,c)}(H) \leq 5 \times 10^{-14}. \quad (4.31)$$

Unter zusätzlicher Berücksichtigung der Diagramme ab dem 2-Loop-Level ist der aktuellste Wert des elektroschwachen Beitrags [1, Kap. 6]

$$a_\mu^{ew} = 153.2(2.5) \times 10^{-14}. \quad (4.32)$$

5 Das Projektionsverfahren zur Bestimmung von a_μ

Bereits in Kapitel 2.2.4 wurde ein kurzer Überblick darüber geliefert, dass man mit dem Projektionsverfahren den Beitrag der von einem Feynman-Diagramm gezeigten Wechselwirkung zum anomalen magnetischen Moment bestimmen kann. In diesem Abschnitt der Arbeit soll dieses Verfahren genauer betrachtet werden. Dafür wird zunächst die Struktur der allgemeinen Vertexfunktion erklärt und entwickelt (Kapitel 5.1). Danach die Projektion für einige Anteile der Vertexfunktion überprüft (Kapitel 5.2) und schließlich noch eine Zusammenfassung des Verfahrens gegeben (Kapitel 6).

Wie in Abbildung 5.1 erkannt werden kann, wird der Impuls des einlaufenden Muons in diesem Kapitel mit $p - \frac{1}{2}q$ bezeichnet, der des Photons mit q und der Impuls des auslaufenden Muons kann folglich durch $p + \frac{1}{2}q$ beschrieben werden.

Für dieses Kapitel 5 sei zu beachten, dass, sollte in einer Spur keine Matrix stehen, die Einheitsmatrix im Kopf ergänzt werden soll.

5.1 Die allgemeine Vertexfunktion

Wie schon in Kapitel 2.2.4 (siehe S.9) beschrieben, wird nun die vollständige Vertexfunktion $\Gamma^\mu(p, q)$ benötigt. Aus dieser wird mit Hilfe der Projektionsformel der zu a_μ beitragende Anteil herausprojiziert.

$\Gamma^\mu(p, q)$ hat die Form

$$\Gamma^\mu(p, q) = \sum_{n=1}^{12} A_i^\mu c_i(p, q), \quad (5.1)$$

wobei die $c_i(p, q)$ nur von den Beträgen von p und q abhängen und somit auch keine Dirac Matrizen enthalten. Die A_i^μ sind (4×4) -Matrizen mit offenem Lorentz-Index μ . Sie können aus p^μ , q^μ und Dirac Matrizen bestehen, dürfen aber nicht durch Zusammensetzungen anderer A_i^μ darstellbar sein. Die allgemeine Vertexfunktion ist also eine Aufspaltung in voneinander unabhängige Komponenten. Im Detail folgt für die Lorentz-Zerlegung:

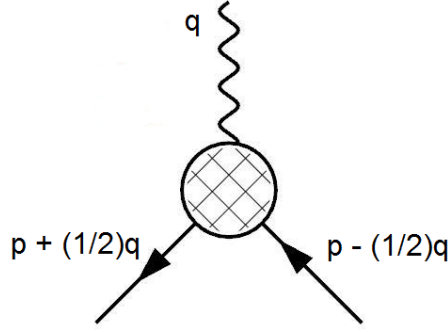


Abbildung 5.1: In diesem Kapitel verwendete Impulse

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu(p, q) = & \gamma^\mu c_1(p, q) & + p^\mu c_2(p, q) & + q^\mu c_3(p, q) \\
 & + \gamma^\mu \not{p} c_4(p, q) & + \gamma^\mu \not{q} c_5(p, q) & + p^\mu \not{q} c_6(p, q) \\
 & + p^\mu \not{p} c_7(p, q) & + q^\mu \not{q} c_8(p, q) & + q^\mu \not{p} c_9(p, q) \\
 & + \gamma^5 \gamma^\mu c_{10}(p, q) & + \gamma^5 p^\mu c_{11}(p, q) & + \gamma^5 q^\mu c_{12}(p, q).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Eine Entwicklung von Γ^μ um $q = 0$ liefert

$$\Gamma^\mu(p, q) \simeq \Gamma^\mu(p, 0) + q_\nu \left. \frac{\partial}{\partial q_\nu} \Gamma^\mu(p, q) \right|_{q=0} \equiv V^\mu(p) + q_\nu T^{\nu\mu}(p). \tag{5.3}$$

Durch Einsetzen der Vertexfunktion (5.2) in die Entwicklung (5.3) erhält man

$$\begin{aligned}
 V^\mu(p) = & \gamma^\mu c_1(p, 0) & + p^\mu c_2(p, 0) & + q^\mu c_3(p, 0) \Big|_{q=0} \\
 & + \gamma^\mu \not{p} c_4(p, 0) & + \gamma^\mu \not{q} c_5(p, 0) \Big|_{q=0} & + p^\mu \not{q} c_6(p, 0) \Big|_{q=0} \\
 & + p^\mu \not{p} c_7(p, 0) & + q^\mu \not{q} c_8(p, 0) \Big|_{q=0} & + q^\mu \not{p} c_9(p, 0) \Big|_{q=0} \\
 & + \gamma^5 \gamma^\mu c_{10}(p, 0) & + \gamma^5 p^\mu c_{11}(p, 0) & + \gamma^5 q^\mu c_{12}(p, 0) \Big|_{q=0},
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei durch die Entwicklung alle Terme in V_μ , die q^μ oder \not{q} beinhalten, vernachlässigt werden können. Es wird dabei angenommen, dass die $c_i(p, q)$ nicht die Form $c_i(p, q) = \frac{1}{q^r} f(p)$ mit $r \in \mathbb{R}$ haben. $f(p)$ beschreibt eine von p abhängige Funktion. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
 V^\mu(p) = & \gamma^\mu c_1(p, 0) & + p^\mu c_2(p, 0) & + \gamma^\mu \not{p} c_4(p, 0) \\
 & + p^\mu \not{p} c_7(p, 0) & + \gamma^5 \gamma^\mu c_{10}(p, 0) & + \gamma^5 p^\mu c_{11}(p, 0).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Für $T^{\nu\mu}(p)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
T^{\nu\mu}(p) = & \gamma^\mu \partial_{q_\nu} c_1(p, q) \Big|_{q=0} & + p^\mu \partial_{q_\nu} c_2(p, q) \Big|_{q=0} \\
& + (\delta^{\mu\nu} + q^\mu \partial_{q_\nu}) c_3(p, q) \Big|_{q=0} & + \gamma^\mu \not{p} \partial_{q_\nu} c_4(p, q) \Big|_{q=0} \\
& + (\gamma^\mu \gamma_\lambda \delta^{\nu\lambda} + \gamma^\mu \not{q} \partial_{q_\nu}) c_5(p, q) \Big|_{q=0} & + p^\mu (\gamma_\lambda \delta^{\lambda\nu} + \not{q} \partial_{q_\nu}) c_6(p, q) \Big|_{q=0} \\
& + p^\mu \not{p} \partial_{q_\nu} c_7(p, q) \Big|_{q=0} & + (\delta^{\mu\nu} \not{q} + q^\mu (\gamma_\lambda \delta^{\lambda\nu} + \not{q} \partial_{q_\nu})) c_8(p, q) \Big|_{q=0} \\
& + (\delta^{\mu\nu} \not{p} + q^\mu \not{p} \partial_{q_\nu}) c_9(p, q) \Big|_{q=0} & + \gamma^5 \gamma^\mu \partial_{q_\nu} c_{10}(p, q) \Big|_{q=0} \\
& + \gamma^5 p^\mu \partial_{q_\nu} c_{11}(p, q) \Big|_{q=0} & + \gamma^5 (\delta^{\mu\nu} + q^\mu \partial_{q_\nu}) c_{12}(p, q) \Big|_{q=0}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Hier ist $\delta^{\mu\nu}$ das Kronecker-Delta mit $\delta^{\mu\nu} = 1$ für $\mu = \nu$ und $\delta^{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$.

Ein Rückblick auf die Kapitel 2.2.2 und 2.2.3, insbesondere die Formeln (2.16) und (2.24), zeigt, dass der Pauli-Formfaktor $F_M(q^2)$ im statischen Limes $F_M(0) = a_\mu$. Der Ausdruck (2.16) sei hier erneut wiedergegeben:

$$-ie\bar{u}_{p'} \left[\gamma^\mu F_E(q^2) + i \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_M(q^2) \right] u_p. \tag{5.7}$$

Interessant ist nun der Vorfaktor des Pauli-Formfaktors. Wie schon in Kapitel 2.2.2 ist $\sigma^{\mu\nu}$ definiert mit $\sigma^{\mu\nu} = (i/2)(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu)$. Diese Form liefert einen deutlichen Hinweis auf den Anteil in Γ^μ , der für a_μ verantwortlich ist. Dazu siehe Kapitel 5.3.

Zur Projektion von a_μ aus $\Gamma^\mu(p, q)$ wird die folgende Formel verwendet ([5]):

$$\begin{aligned}
a_\mu & \equiv \lim_{t \rightarrow 0} F_M(t) \\
& = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} \left[\left(-\gamma_\mu + 2i \frac{t+2m^2}{t-4m^2} \frac{p_\mu}{m} \right) \left(-i\not{p} - \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) \Gamma^\mu(p, q) \left(-i\not{p} + \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$F_M(t)$ ist hier der aus Kapitel 2.2.2 bekannte Pauli-Formfaktor und es gilt $t = -q^2$. Außerdem sind die Relationen $pq = 0$ und $p^2 = \frac{1}{4}t - m^2$ nutzbar, die durch Umformen aus der on-shell-Bedingung folgen:

$$\begin{aligned}
\left(p + \frac{1}{2}q \right)^2 & = -m^2 = \left(p - \frac{1}{2}q \right)^2 \\
p^2 - pq + \frac{1}{4}q^2 & = -m^2 = p^2 + pq + \frac{1}{4}q^2
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Somit zeigt sich, dass $pq = 0$ und man erhält $p^2 = \frac{1}{4}t - m^2$.

Durch die Projektion sollen nun alle Summanden der allgemeinen Vertexfunktion gefiltert werden, die nicht zu a_μ beitragen, so dass letztlich als Formel zur Berechnung von a_μ

$$a_\mu = \frac{1}{12m^2} \text{Tr}\{G_\mu V^\mu(p) + H_{\mu\nu} T^{\mu\nu}(p)\} \Big|_{p^2=-m^2} \quad (5.10)$$

übrig bleibt [5]. G_μ und $H_{\mu\nu}$ sind wie folgt definiert:

$$G_\mu = m^2 \gamma_\mu + 3mp_\mu + 4\not{p}p_\mu, \quad (5.11)$$

$$H_{\mu\nu} = -\frac{1}{4}i(-i\not{p} + m)(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)(-i\not{p} + m). \quad (5.12)$$

5.2 Betrachtung von $V^\mu(p)$

In diesem Abschnitt wird nun für einige Summanden von $V^\mu(p)$ (5.5) gezeigt, dass diese durch die Projektionsformel (5.8) verschwinden und somit nicht zu a_μ beitragen.

Damit dies der Fall ist muss mit Gleichung (2.26) gelten:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t - 4m^2)} \text{Tr} \left[\left(-\gamma_\mu + 2i \frac{t + 2m^2}{t - 4m^2} \frac{p_\mu}{m} \right) \left(-i\not{p} - \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) A_i^\mu(p) c_i(p, 0) \left(-i\not{p} + \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) \right] = 0. \quad (5.13)$$

5.2.1 Summanden mit γ^5

Der letzte Summand in V^μ , nämlich $\gamma^5 q^\mu|_{q=0}$, ist bereits weggefallen, da $V^\mu = \Gamma(p, 0)$ der erste Term in der um $q = 0$ entwickelten allgemeinen Vertexfunktion ist (siehe Kapitel 5).

Um zu finden, dass die Projektionsformel (siehe Formel (5.8)), angewendet auf die Terme $\gamma^5 \gamma^\mu c_{10}(p, 0)$ und $\gamma^5 p^\mu c_{11}(p, 0)$, keinen Beitrag liefert, werden diese in die Projektion eingesetzt. In diesem Fall reicht es bereits die Spuren zu betrachten:

$$\begin{aligned} & \text{Tr} \left[\left(-\gamma_\mu + 2i \frac{t + 2m^2}{t - 4m^2} \frac{p_\mu}{m} \right) \left(-i\not{p} - \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) (\gamma^5 \gamma^\mu c_{10}(p, 0)) \left(-i\not{p} + \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) \right] \\ &= \text{Tr} \left[\left(-\gamma_\mu + 2i \frac{t + 2m^2}{t - 4m^2} \frac{p_\mu}{m} \right) \left(-i\not{p} - \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) (\gamma^5 p^\mu c_{11}(p, 0)) \left(-i\not{p} + \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die Spuren geben keinen Beitrag, da nach Ausmultiplizierung und Kontraktion von $\gamma_\mu\gamma^\mu$ (siehe Appendix A.3.2) maximal die Struktur $\text{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho)$, also γ^5 mit drei Dirac Matrizen, auftritt. Wie im Appendix angegeben, ergibt diese Struktur, wie auch alle Spuren über γ^5 mit weniger Dirac Matrizen, null.

5.2.2 Der Anteil $\gamma^\mu c_1$

Betrachtet wird nun, eingesetzt in die Spurformel (5.8), der Summand $\gamma^\mu c_1(p, 0)$ von $V^\mu(p)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} \left[\left(-\gamma_\mu + 2i \frac{t+2m^2}{t-4m^2} \frac{p_\mu}{m} \right) \left(-i\not{p} - \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) \gamma^\mu c_1(p, 0) \left(-i\not{p} + \frac{1}{2}i\not{q} + m \right) \right]. \quad (5.15)$$

Ausmultiplizieren liefert nun

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} & \left[\left(\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu \not{p} - \frac{1}{2} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu \not{q} + i \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu m + \frac{1}{2} \gamma_\mu \not{q} \gamma^\mu \not{p} - \frac{1}{4} \gamma_\mu \not{q} \gamma^\mu \not{q} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} i \gamma_\mu \not{q} \gamma^\mu m + i \gamma_\mu \gamma^\mu \not{p} m - \frac{1}{2} i \gamma_\mu \gamma^\mu \not{q} m - \gamma_\mu \gamma^\mu m^2 \right) c_1(p, 0) \right. \\ & \left. + 2i \frac{t+2m^2}{t-4m^2} \frac{p_\mu}{m} \left(-\not{p} \gamma^\mu \not{p} + \frac{1}{2} \not{p} \gamma^\mu \not{q} - i \not{p} \gamma^\mu m - \frac{1}{2} \not{q} \gamma^\mu \not{p} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4} \not{q} \gamma^\mu \not{q} - \frac{1}{2} i \not{q} \gamma^\mu m - i \gamma^\mu \not{p} m + \frac{1}{2} i \gamma^\mu \not{q} m + \gamma^\mu m^2 \right) c_1(p, 0) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Bequem erkennt man nun mit Appendix A.3.2, dass Spuren über ungerade Anzahlen von Dirac Matrizen keinen Beitrag liefern. Also vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} & \left[\left(\gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu \not{p} - \frac{1}{2} \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu \not{q} + \frac{1}{2} \gamma_\mu \not{q} \gamma^\mu \not{p} - \frac{1}{4} \gamma_\mu \not{q} \gamma^\mu \not{q} - \gamma_\mu \gamma^\mu m^2 \right) c_1(p, 0) \right. \\ & \left. + 2i \frac{t+2m^2}{t-4m^2} \frac{p_\mu}{m} \left(-i \not{p} \gamma^\mu m - \frac{1}{2} i \not{q} \gamma^\mu m - i \gamma^\mu \not{p} m + \frac{1}{2} i \gamma^\mu \not{q} m \right) c_1(p, 0) \right]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Nun folgt eine weitere Vereinfachung mit der Relation $\gamma^\mu\gamma^\nu = 2\eta_{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu$, so dass bei Betrachtung des ersten Summanden in der Spur

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} & \left[\left(-\gamma_\mu m^2 - \gamma_\mu \not{p} \not{p} + \gamma_\mu \not{p} \not{q} + \frac{1}{4} \gamma_\mu \not{q} \not{q} \right) \gamma^\mu c_1(p, 0) \right. \\ & \left. \left(2\gamma_\mu \not{p} \not{p}^\mu - \gamma_\mu \not{p} \not{q}^\mu + \gamma_\mu \not{q} \not{p}^\mu - \frac{1}{2} \gamma_\mu \not{q} \not{q}^\mu \right) c_1(p, 0) \right] \end{aligned} \quad (5.18)$$

übrig bleibt.

Untersucht wird nun in der Spur von Gleichung (5.18) der Summand $\gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu c_1(p, 0)$. Es gilt (siehe Appendix A.3.2):

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu c_1(p, 0) &= \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\mu p_\nu q_\rho c_1(p, 0) \\
&= 4\eta_{\nu\rho} p_\nu q_\rho c_1(p, 0) = 4p_\nu q^\nu c_1(p, 0) = 4pq c_1(p, 0) = 0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Spurt man über $\gamma_\mu \not{p} q^\mu$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\text{Tr} \left[\gamma_\mu \not{p} q^\mu c_1(p, 0) \right] &= \text{Tr} \left[\gamma_\mu \gamma_\nu p^\nu q^\mu c_1(p, 0) \right] \\
&= 4\eta_{\mu\nu} p^\nu q^\mu \text{Tr} [c_1(p, 0)] = 4pq \text{Tr} [c_1(p, 0)] = 0.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Analog gilt dies für $\gamma_\mu \not{q} p^\mu$.
Zudem wird die Relation

$$\not{p} \not{p} = \gamma_\mu \gamma_\nu p^\mu p^\nu = (2\eta_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) p^\mu p^\nu = 2p^2 - \not{p} \not{p} \tag{5.21}$$

genutzt. Einfaches Umstellen liefert dann $\not{p} \not{p} = p^2$ und ebenso kann gezeigt werden, dass $\not{q} \not{q} = q^2$.

Unter Berücksichtigung all dieser Eigenschaften und mit $q^2 = -t$ und $p^2 = \frac{1}{4}t - m^2$ (aus der on-shell-Bedingung und (5.9)) folgt aus dem Ausdruck (5.18):

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} \left[\left(-\frac{1}{2} \gamma_\mu t \right) \gamma^\mu c_1(p, 0) + \left(2\gamma_\mu \not{p} p^\mu + \frac{1}{2} t \right) c_1(p, 0) \right] \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr} [(\gamma_\mu) \gamma^\mu c_1(p, 0)] + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} \left[\left(4 \left(\frac{1}{4} t - m^2 \right) - 2\not{p} p_\mu \gamma^\mu + \frac{1}{2} t \right) c_1(p, 0) \right] \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr} [(\gamma_\mu) \gamma^\mu c_1(p, 0)] \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)^2} \text{Tr} \left[\left(-2t\not{p} p_\mu \gamma^\mu + 8m^2 \not{p} p_\mu \gamma^\mu + (t-4m^2)^2 + \frac{1}{2} t (t-4m^2) \right) c_1(p, 0) \right] \\
&= \frac{1}{8} \text{Tr} [(\gamma_\mu) \gamma^\mu c_1(p, 0)] + \frac{1}{8m^2} \text{Tr} [m^2 c_1(p, 0)] \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)^2} \text{Tr} \left[\left((t-4m^2) \left((t-4m^2) + \frac{1}{2} t \right) + 2tm^2 - 8m^4 \right) c_1(p, 0) \right] \\
&= 2c_1(p, 0) + \frac{1}{2} c_1(p, 0) \\
&\quad + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)^2} \text{Tr} \left[\left((t-4m^2) \left((t-4m^2) + \frac{1}{2} t \right) + 2tm^2 - 8m^4 \right) c_1(p, 0) \right].
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Wird nun der zweite Summand in Gleichung (5.17) betrachtet, so folgt mit den bereits bekannten Relationen:

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} \left[2i \frac{t+2m^2}{t-4m^2} \frac{p_\mu}{m} \left(-i \not{p} \gamma^\mu m - \frac{1}{2} i \not{q} \gamma^\mu m - i \gamma^\mu \not{p} m + \frac{1}{2} i \gamma^\mu \not{q} m \right) c_1(p, 0) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)^2} \text{Tr} \left[(2t + 4m^2) p_\mu \left(\not{p} \gamma^\mu + \gamma^\mu \not{p} \right) c_1(p, 0) \right] \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)^2} \text{Tr} \left[((t - 4m^2)(t + 4m^2) - 2tm^2 + 8m^4) c_1(p, 0) \right].
\end{aligned} \tag{5.23}$$

Für die komplette Gleichung (5.17) erhält man also:

$$\begin{aligned}
& 2c_1(p, 0) + \frac{1}{2}c_1(p, 0) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{m^2}{t(t-4m^2)} \text{Tr} \left[\left(\frac{5}{2}t \right) c_1(p, 0) \right] \\
&= 2c_1(p, 0) + \frac{1}{2}c_1(p, 0) - \frac{5}{2}c_1(p, 0) = 0.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Auch die Projektion von $\gamma^\mu c_1(p, 0)$ verschwindet und trägt folglich nicht zu a_μ bei.

5.3 Weiteres Vorgehen

Nachdem gezeigt wurde, dass aus $V^\mu(p)$ (siehe 5.5) die Summanden $\gamma^\mu c_1(p, 0)$, $\gamma^5 \gamma^\mu c_1(p, 0)$ und $\gamma^5 p^\mu c_1(p, 0)$ keinen Beitrag liefern, kann V_μ auf die Form

$$V^\mu(p) = p^\mu c_2(p, 0) + \gamma^\mu \not{p} c_4(p, 0) + p^\mu \not{p} c_7(p, 0). \tag{5.25}$$

reduziert werden.

In Kapitel 5.1 wurde bereits darauf verwiesen, dass ein Vergleich zwischen der allgemeinen Vertexfunktion und der Vertexfunktion aus Ausdruck (2.16) die Information liefert, dass lediglich der Anteil von $V^\mu(p)$ mit der Struktur $\sigma^{\mu\nu} q_\nu c_i(p, 0)$ zu a_μ beiträgt. Da in $V^\mu(p)$ (5.25) keine solche Struktur vorhanden ist, ist davon auszugehen, dass hier kein Beitrag zu a_μ zu finden ist.

Wird Γ^μ auf diese Struktur hin untersucht, so bleibt der Term $\gamma^\mu \not{q} c_5(p, q)$ übrig. Da er in V^μ bereits verschwunden ist (Kapitel 5.1) kann davon ausgegangen werden, dass der entsprechende Summand in $T^{\nu\mu}$ das anomale magnetische Moment liefert. Es ist der Term

$$(\gamma^\mu \gamma_\lambda \delta^{\nu\lambda} + \gamma^\mu \not{q} \partial_{q_\nu}) c_5(p, q) \Big|_{q=0}. \tag{5.26}$$

6 Zusammenfassung

Die Einarbeitung in die aktuelle Forschung des anomalen magnetischen Moments des Muons und das Verständnis der Grundlagen dieses Phänomens ist die Basis für den ersten, wichtigen Abschnitt dieser Arbeit, die Einführung in das Thema. Wichtig ist vor allem, festzuhalten, dass eine bisher unerklärliche Differenz zwischen den theoretischen Vorhersagen und den experimentellen Ergebnissen zum Wert von a_μ besteht. Ob diese auf Fehler in einem der beiden Bereiche oder auf noch unentdeckte Physik zurückzuführen ist, ist nicht geklärt.

Eine kurze Beschreibung des Aufbaus der Experimente bildet den folgenden Teil und hilft, durch die experimentelle Betrachtung einen besseren und größeren Überblick über das Thema zu bekommen.

Durch die Bestimmung des QED-Beitrags erster Ordnung zu a_μ wird ein guter Einblick über die Komplexität der Berechnung von Feynman-Integralen gewährt. Sie kann eine Vorstellung liefern, wie komplex die Berechnung der Beiträge in höheren Ordnungen wird.

Schließlich werden in dieser Arbeit eine Idee und einige Ansätze geliefert, die die Herleitung der Projektionsformel zum Ziel haben. Diese ist besonders zur Berechnung hoher Ordnungen geeignet und damit auch gerade für zukünftige Arbeiten in diesem Forschungsgebiet wichtig.

Sicherlich wird es in den kommenden Jahren spannend sein, diesen Bereich der Physik weiterhin zu verfolgen und gegebenenfalls den Vorstoß in neue physikalische Welten zu begleiten.

A Appendix

A.1 Pauli und Dirac Matrizen

A.1.1 Pauli Matrizen

Die Pauli Matrizen sind drei hermitesche, unitäre und spurlose (2×2) -Matrizen:

$$\sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Für weitere Eigenschaften der Pauli Matrizen siehe [4, Appendix C.1].

A.1.2 Dirac Matrizen

Die Dirac Matrizen sind vier unitäre und spurlose (4×4) -Matrizen und gegeben durch:

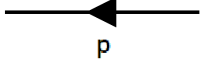
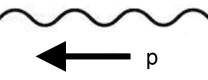
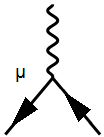
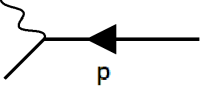
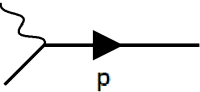
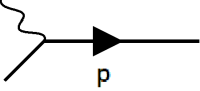
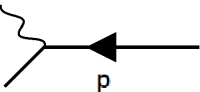

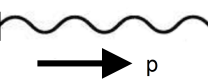
$$\gamma_0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}.$$

Die 1 ist hier als die (2×2) -Einheitsmatrix definiert und die σ^i sind die Pauli Matrizen (siehe Appendix A.1.1). Bei Auftreten der Matrix γ_5 , betrachte die Definition:

$$\gamma_5 \equiv i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

Für weitere Eigenschaften der Dirac Matrizen siehe [4., Appendix C.2], sowie Appendix A.3.2 (siehe S.32) in dieser Arbeit.

A.2 Feynman-Regeln der QED

Dirac-Propagator:		$= \frac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$
Photon-Propagator:		$= \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2+i\epsilon}$ in der Feynman-Eichung
Vertex:		$= iQe\gamma^\mu$ mit $Q = -1$ für ein Elektron
äußere Fermionen:		$= u^s(p)$ einlaufend
		$= \bar{u}^s(p)$ auslaufend
äußere Antifermionen:		$= \bar{v}^s(p)$ einlaufend
		$= v^s(p)$ auslaufend
äußere Photonen:		$= \epsilon_\mu(p)$ einlaufend
		$= \epsilon_\mu^*(p)$ auslaufend

Das $s \in 1, 2$ beschreibt hier die zwei möglichen Spin-Zustände.

A.3 Nützliche Zusammenhänge und Beziehungen

A.3.1 Die Feynman-Parametrisierung

Zur Berechnung von Feynman-Diagrammen mit mehreren auftretenden Propagatoren hilft die Feynman-Parametrisierung bei der Vereinfachung des Integrals. Sie liefert die Identität

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i - 1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)}.$$

Γ steht in dieser Gleichung für die Gammafunktion.

A.3.2 Relationen für die Dirac Matrizen

Die Auswertung der Spuren verschiedener Kompositionen von Dirac Matrizen ergibt:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\text{ungerade } \gamma\text{-Anzahl}) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= 4\eta_{\mu\nu} \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \\ \text{Tr}(\gamma^5) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5) &= 0 \\ \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^5) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned}$$

Für die Definition von γ^5 siehe Appendix A.1.2 auf Seite 30. Zudem wurde die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ eingeführt, die definiert ist als

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

wobei $+, -, -, -$ eine Konvention ist und auch $-, +, +, +$ verwendet wird.

Außerdem ist es erlaubt die Reihenfolge der Dirac Matrizen innerhalb einer Spur umzukehren, das heißt es gilt

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \dots) = \text{Tr}(\dots \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu).$$

Zudem erfüllen die Dirac Matrizen die Antikommutationsrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}.$$

Kontrahiert man zwei γ , so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= 4, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= -2\gamma^\nu, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu &= 4\eta^{\nu\rho}, \\ \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= -2\gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu. \end{aligned}$$

Eine weitere interessante Beziehung zwischen zwei Dirac Matrizen ist die folgende:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu &= \frac{1}{2} (\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + [\gamma^\mu, \gamma^\nu]), \\ &= \frac{1}{2} (2\eta_{\mu\nu} - 2i\sigma^{\mu\nu}), \\ &= \eta_{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}. \end{aligned}$$

B Literaturverzeichnis

- [1] F. Jegerlehner, A. Nyffeler: Phys. Rept. 477 (2009)
[ar- Xiv:0902.3360 [hep-ph]]
- [2] D. Bödeker: Skript zur Vorlesung 'Teilchenphysik';
Universität Bielefeld; WS 09/10
- [3] M. Peskin, D. Schröder: 'An Introduction to Quantum Field Theory'
Westview Press; 1995
- [4] D. Griffiths: 'Introduction to Elementary Particles';
WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA;
Second, Revised Edition; Portland, OR, USA; 2009
- [5] R. Barbieri, E. Remiddi: Nucl. Phys. B 90 (1975) 233

Danksagung

Besonders bedanken möchte ich mich zunächst bei dem Betreuer meiner Arbeit, Prof. Dr. York Schröder, der mich den ganzen Weg interessiert und mit Geduld begleitet hat, immer eine offene Tür und ein offenes Ohr hatte.

Außerdem möchte ich mich sehr bei allen Menschen bedanken, die mich in der letzten Phase der Arbeit besonders unterstützt haben, vor allem bei meiner Familie, Anne und meinen ehemaligen Mitbewohnern.

Ein großer Dank für die schöne Zeit in dem Büro und auf der Etage geht zudem an Dirk, Michael, Benedict, Benny, Thomas, Jannis und Jan.

C Erklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt, alle benutzten Quellen und Hilfsmittel angeben, sowie wörtliche und sinngemäße Zitate gekennzeichnet habe.

Bielefeld, den