

Anomales magnetisches Moment des Myons:
Klassifizierung der Diagramme in der QED

Bachelorarbeit

zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science

der Fakultät Physik

der Universität Bielefeld

vorgelegt von

Ayse Eren

16.September.2013



Betreuer und 1.Gutachter: Prof. Dr. York Schröder
2.Gutachter: Thomas Luthe

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	2
2	Grundlagen	3
2.1	Magnetisches Moment	3
2.2	Quantenelektrodynamik	3
2.3	Eichinvarianz	4
2.3.1	Ward-Identität	4
2.4	Anomales Magnetisches Moment in der QED	8
2.5	Vertexfunktion	9
2.6	Eichinvarianz der Vakuumpolarisation	11
2.7	Brookhaven Myon g-2 Experiment	14
3	Beiträge der QED	16
3.1	Schwinger-Korrektur	16
3.1.1	Mathematische Grundlagen	16
3.1.2	Rechnung	18
3.2	Gruppeneinteilung und Beiträge	21
3.2.1	2 Loop	21
3.2.2	3 Loop	23
3.2.3	4 Loop	25
3.2.4	5 Loop	28
3.3	Methoden der Klassifizierung	32
3.3.1	Qgraf	32
3.3.2	Vereinfachung und grafische Darstellung	33
3.3.3	Einteilung in Gruppen	34
4	Weitere Beiträge	36
4.1	Hadronische Beiträge	36
4.1.1	Vakuum Polarization	36
4.1.2	Light by Light Scattering	36
4.2	Elektroschwache Beiträge	36
5	Ausblick	38
5.1	Generelle Beiträge über dem SM hinaus	38
6	Fazit	40
A	Feynman-Regeln der QED	41
B	Programm zur Klassifizierung der Diagramme	42
C	3 Loop Gruppeneinteilung	44

1 Einführung

Mit dem Standardmodell (SM) der Teilchenphysik lassen sich die bekannten Elementarteilchen und die Wechselwirkung zwischen ihnen beschreiben. Die Elementarteilchen lassen sich in Leptonen, Quarks und Eichbosonen, den Austauscheteilchen, unterteilen. Eines der Teilchen, die zur Familie der Leptonen gehört, ist das Myon. Das anomale magnetische Moment des Myons ist einer der präzisesten Messwerte in der Physik. Wissenschaftler versuchen einen sehr genauen Wert zu erzielen, da man mit diesem Wert das Standardmodell der Elementarteilchenphysik überprüfen kann, in dem man den theoretischen Wert, der nach den Regeln des Standardmodells ermittelt worden ist, mit dem experimentellen Wert vergleicht. Der experimentelle Wert wurde mit dem Brookhaven Myon $g-2$ Experiment bestimmt. Das anomale magnetische Moment ist sowohl theoretisch, als auch experimentell, sehr genau ermittelt worden und man hat zwischen dem theoretischen und experimentellen Wert momentan eine Varianz von drei Standardabweichungen. Obwohl dies ein gutes Ergebnis ist, ist es aktuell ein Thema die Varianz zu verkleinern, denn diese Abweichung könnte ein Hinweis auf neue Theorien der Physik sein.

Die Quantenelektrodynamik (QED) ist eine Theorie, in der die Wechselwirkung zwischen Photonen und elektrisch geladenen Teilchen beschrieben wird. In dieser Arbeit werden die Beiträge der QED genauer untersucht, da diese den numerisch größten Beitrag zum anomalen magnetischen Moment liefern. Mit Hilfe einer graphischen Darstellung, den Feynman-Diagrammen, kann man die Amplitude eines quantenfeldtheoretischen Prozesses bestimmen. Der Betragsquadrat einer Amplitude gibt an, wie wahrscheinlich es ist, dass ein Prozess stattfindet. Eine Amplitude lässt sich als Summe von Teilamplituden darstellen. Jeder dieser Teilamplituden wird ein Feynman-Diagramm zugeordnet. Diese Diagramme können geschlossene Fermion-Schleifen beinhalten. Bei n Schleifen gehört das Diagramm zur n -ten Ordnung bei. Bei höheren Ordnungen tragen mehrere hunderte Diagramme zur Amplitude bei (z.B. 891 Diagramme in der 8. Ordnung). Diese Diagramme werden in Gruppen eingeteilt. In dieser Arbeit soll untersucht werden, wie die Einteilung aussieht und welche Kriterien zu diesen Einteilungen führen.

Am Anfang dieser Arbeit werden die Grundlagen erklärt. Im mittleren Teil der Arbeit wird die Schwinger-Korrektur, der Beitrag der QED in 1. Ordnung, berechnet. Danach werden die Klassifikationen der Diagramme und ihre Beiträge im 3. Kapitel dargestellt. Wonach die hadronischen und elektroschwachen Beiträge zusammenfassend dargestellt werden. Am Ende der Arbeit folgt ein Einblick in die neuen Theorien der Physik, mit denen die Varianz zwischen Theorie und Experiment eventuell aufgeklärt werden könnte.

2 Grundlagen

2.1 Magnetisches Moment

Das magnetische Moment eines elektrisch geladenen Teilchens mit einem Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, ist wie folgt definiert [1, Kap. 1.1]

$$\vec{\mu} = \frac{e}{2mc} \vec{L}, \quad (1)$$

wobei e die Elementarladung, m die Teilchenmasse und c die Lichtgeschwindigkeit ist. Das magnetische Moment ist proportional zum Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, wobei \vec{r} der Ortsvektor und \vec{p} der Impuls ist.

Betrachtet man das magnetische Moment in der Quantenmechanik, so erhält man

$$\vec{\mu} = g \frac{e\hbar}{2mc} \vec{s}, \quad (2)$$

mit dem gyromagnetischen Faktor g . Der Spin $\vec{S} = \hbar \vec{s}$ ist der Eigendrehimpuls eines Teilchens mit $\vec{s} = \vec{\sigma} s$, wobei $\vec{\sigma}$ die Pauli-Matrizen darstellt [2, Kap. A.2]:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Die Spinquantenzahl s wird entweder halbzahlig (Fermionen) oder ganzzahlig (Bosonen) in Einheiten der Planckschen Konstante \hbar angegeben.

Mit der Dirac-Gleichung (s. Kapitel 2.2) lassen sich Teilchen mit $s = \frac{1}{2}$, also Fermionen, beschreiben. Nach dieser Gleichung beträgt der gyromagnetische Faktor für Fermionen $g = 2$. Dieser gyromagnetische Faktor weicht jedoch von diesem Wert ab, wenn man die sogenannten Strahlungskorrekturen (s. Kap 2.5) berücksichtigt [3, Kap. 1.3]

$$g_l = 2(1 + a_l) \quad l \in \{\tau, \mu, e\} \quad (4)$$

wobei a_l die Abweichung von dem Wert 2 ist. Die Abweichung a_l wird als anomales magnetisches Moment der Leptonen bezeichnet. Zu den Leptonen gehört das Tau τ , das Myon μ und das Elektron e . Den größten Beitrag zum anomalen magnetischen Moment trägt die Quantenelektrodynamik bei, dieser wird in Kapitel 2.4 genauer diskutiert. Des Weiteren tragen noch hadronische und elektroschwache Beiträge zum Wert des anomalen magnetischen Moment bei.

2.2 Quantenelektrodynamik

Für die Bestimmung des theoretischen Wertes des anomale magnetische Moment, benötigt man die Quantenelektrodynamik (QED). Die QED beschreibt die Wechselwirkung zwischen Photonen und Fermionen. Diese Fermionen werden durch Dirac-Spinoren $\psi(x)$ dargestellt und ihr Verhalten wird mit der Dirac-Gleichung beschrieben [2, Kap. 3.2]

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0, \quad (5)$$

wobei $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ und γ^μ eine Gamma-Matrix ist. Die Gamma-Matrizen sehen wie folgt aus [4, Kap. IV.1]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Die Dirac-Gleichung lässt sich mit folgendem Ansatz lösen [2, Kap. 3.3]:

$$\psi(x) = u(p) e^{-ipx}, \quad (7)$$

wobei $p^2 = m^2$ und $u(p)$ ein Dirac-Spinor ist. Die QED lässt sich mit folgender Lagrange-Dichte beschreiben [2, Kap. 4.1]

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}_{\text{Dirac}} + \mathcal{L}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{L}_{\text{int}} \quad (8)$$

$$= \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (9)$$

Der erste Term $\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m) \psi$ stellt die Lagrange-Dichte eines freien Fermions dar, wobei $\bar{\psi}$ der Dirac-adjungierte Spinor ist [4, Kap. IV.2.3]

$$\bar{\psi} = \gamma^0 \psi^\dagger$$

mit ψ^\dagger dem hermitesch-konjugiertem Spinor. Der mittlere Term $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = \frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2$ ist die Lagrange-Dichte eines freien elektromagnetischen Feldes. Der Feldstärketensor lautet $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ mit $A_\mu = (\phi, \vec{A})$ dem Viererpotential. Mit dem letzten Term $\mathcal{L}_{\text{Maxwell}} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ wird die Wechselwirkung zwischen einem Fermion und dem elektromagnetischen Feld beschrieben.

2.3 Eichinvarianz

Eine Theorie wird als eichinvariant bezeichnet, wenn sie unter bestimmten lokalen Transformationen, der Dirac- und elektromagnetischen Felder, invariant ist [4, Kap. XII.1.2]. Die Lagrange-Dichte der QED ist unter folgender lokaler Phasen-Transformation invariant [5, Kap. 6.1]

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x) \quad (10)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-ie\alpha(x)}\bar{\psi}(x) \quad (11)$$

und

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\alpha(x), \quad (12)$$

wobei $\alpha(x)$ reell für alle x ist und e die Ladung des Teilchens ist. Also gilt:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}} = \mathcal{L}'_{\text{QED}}$$

2.3.1 Ward-Identität

Um die Amplitude eines QED Prozesses zu erhalten, benutzt man die Feynman-Regeln (s. Anhang A). Der Betragsquadrat der Amplitude eines Prozesses sagt aus, wie Wahrscheinlich es ist, dass dieser Prozess stattfindet. Eine Amplitude ist die Summe aus mehreren Teilamplituden und es entsteht bei einem Prozess, der in einer hohen Ordnung (n Ordnung= n Schleifen), eine hohe Anzahl von Teilamplituden und damit auch Diagrammen, die später in Gruppen eingeteilt werden. Diese Gruppen sind eichinvariant. Um die Eichinvarianz dieser Gruppen zu verstehen, wird in diesem Kapitel die Ward-Identität bewiesen. Dieser Beweis ist aus [2, Kap. 7.4].

Die Ward-Identität sagt folgendes aus:

$$k_\mu M^\mu(k) = 0, \quad (13)$$

wobei $M(k) = \epsilon_\mu(k)M^\mu(k)$ die Amplitude eines QED Prozesses mit einem externen Photon, mit Impuls k , ist. Wird ϵ_μ nun durch k_μ ersetzt, so verschwindet die Amplitude. Doch zunächst betrachtet man die Ward-Takahashi Identität:

$$k_\mu M^\mu(k; p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_n) = e \sum_i [M_0(p_1 \dots p_n; q_1 \dots (q_i - k) \dots) - M_0(p_1 \dots (p_i + k) \dots; q_1 \dots q_n)]. \quad (14)$$

Die Ward-Takahashi Identität ist die allgemeine Form der Ward-Identität. Daher wird im folgenden die Ward-Takahasi Identität bewiesen, um später von der Ward-Takahashi Identität auf die Ward-Identität zu schließen.

Dabei wird erst ein vorgegebenes Diagramm betrachtet, in dem hinterher ein zusätzliches externes Photon eingefügt wird. Das externe Photon kann an mehreren Stellen des Diagramms eingefügt werden, daher summiert man über alle Möglichkeiten.

Man betrachtet das Diagramm zunächst ohne das externe Photon mit dem Impuls k (s. Abb. 1)

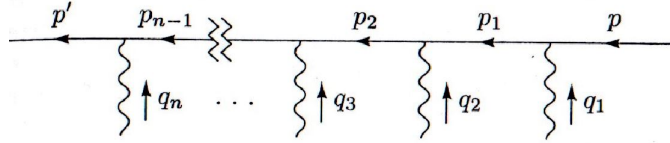


Abbildung 1: Propagator ohne Photon [2, Kap. 7.4]

mit Impuls p , $p_1 = p + q_1$, $p_2 = p_1 + q_2, \dots, p' = p_{n-1} + q_n$.

Nun wird die zusätzliche externe Photonlinie mit dem Impuls k eingefügt (s. Abb. 1). Wenn der Propagator n Vertizes hat, so kann das Photon an $n + 1$ Stellen eingefügt werden.

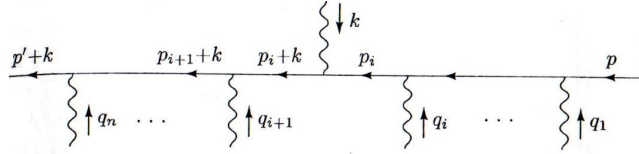


Abbildung 2: Diagramm mit Photon [5, Kap. 7.4]

k_μ lässt sich nun wie folgt umschreiben:

$$-iek_\mu = -ie[(\not{p}_i + \not{k} - m) - (\not{p}_i - m)], \quad (15)$$

wobei m die Masse ist. Multipliziert man diesen mit den Propagatoren, so erhält man:

$$\frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} (-iek_\mu) \frac{i}{\not{p}_i - m} = e \left(\frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \quad (16)$$

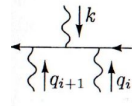


Abbildung 3: Diagramm mit dem Photon an der Stelle i [2, Kap. 7.4]

Das Diagramm in Abb. 4 liefert den Beitrag:

$$= \dots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{i}{\not{p}_i - m} - \frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} \right) \dots, \quad (17)$$

wobei hier das Photon an der i -ten Stelle eingefügt wurde.

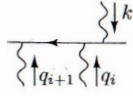


Abbildung 4: Diagramm mit dem Photon an der Stelle $i-1$ [2, Kap. 7.4]

Fügt man das Photon an der Stelle $i - 1$ hinzu (s. Abb. 4), so haben wir den Beitrag

$$= \dots \left(\frac{i}{\not{p}_{i+1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i+1}} \left(\frac{i}{\not{p}_i + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_i} \left(\frac{i}{\not{p}_{i-1} - m} - \frac{i}{\not{p}_{i-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{i-1}} \dots, \quad (18)$$

Nun werden die verschiedenen Möglichkeiten das Photon einzufügen, aufsummiert. Man erkennt, dass wenn man die oben genannten Beiträge aufsummiert, dass der zweite Term des ersten Diagramms den ersten Term des zweiten Diagramms kürzt. Summiert man nun alle Möglichkeiten auf, so kürzen sich viele Terme paarweise weg und es bleiben die Terme am Rand übrig. Man erhält die Gleichung:

$$\sum_{\text{insertion points}} k_\mu \cdot \left(\mu \text{---} \xrightarrow{k} \begin{array}{c} q \\ \vdots \\ p \end{array} \right) = e \left(\begin{array}{c} q-k \\ \vdots \\ p \end{array} - \begin{array}{c} q \\ \vdots \\ p+k \end{array} \right)$$

Abbildung 5: Ward-Identität in Diagramm-Form [2, Kap.7.4]

Die Matrixelemente der Streu-Matrix, auch S-Matrix genannt, sind wie folgt definiert [4, Kap. VI.2.1]:

$$S_{fi} = \langle f | U(+\infty, -\infty) | i \rangle, \quad (19)$$

Dabei ist i der Anfangszustand und f der Endzustand eines Prozesses, bei dem ein Teilchen zerfällt. $U(+\infty, -\infty)$ stellt den Zeitentwicklungsoperator dar. Die Matrix-Elemente stellen die Wahrscheinlichkeitsamplitude für den Zerfall dar. Die RHS der Gleichung in Abbildung 4 trägt nicht zur S-Matrix bei und verschwindet daher.

Bis jetzt wurde das externe Photon nur an Diagramme gekoppelt, die keine Lepton-Schleife haben. Lepton-Schleifen sind Elemente der Feynman-Diagramme und werden auch als Vakuum-polarisation bezeichnet. Dabei entsteht aus einem Photon ein virtuelles Elektron-Positron Paar. Dieses Elektron-Positron Paar wird vernichtet und es entsteht ein Photon (s. Abb. 9).

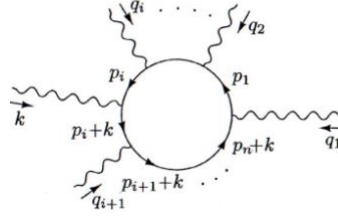


Abbildung 6: Schleifen Diagramm mit einem Photon mit dem Impuls p_1 , $p_n = p_{n-1} + q_n$ [2, Kap. 7.4]

Für den kompletten Beweis müssen nun die Lepton-Schleifen betrachtet werden. In Abb. 6 ist eine typisches Schleifen Diagramm zu erkennen. Nun betrachtet man wieder die Propagatoren mit einem Photon, dass an der Stelle zwischen i und $i + 1$ eingefügt wird. Wie oben summiert man über alle möglichen Diagramme. Dabei fallen wieder Terme raus und man erhält insgesamt :

$$\begin{aligned}
& -e \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \text{tr} \left(\left(\frac{i}{\not{p}_n - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left(\frac{i}{\not{p}_{n-1} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_1 - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right. \\
& \left. - \left(\frac{i}{\not{p}_n + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_n} \left(\frac{i}{\not{p}_{n-1} + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_{n-1}} \dots \left(\frac{i}{\not{p}_1 + \not{k} - m} \right) \gamma^{\lambda_1} \right) \quad (20)
\end{aligned}$$

Führt man nun die Substitution $p_1 \rightarrow p_1 + k$ im zweiten Term durch, so fallen die übrig bleibenden Terme auch weg und man hätte somit auch die Ward-Identität für Schleifen-Diagramme gezeigt. Zusammenfassend kann man die Ward-Identität bildlich wie in Abb. 7 dargestellt.

$$\sum_{\text{insertion points}} k_\mu \cdot \left(\text{Diagramm} \right) = e \sum_i \left(\text{Diagramm}_1 - \text{Diagramm}_2 \right)$$

Abbildung 7: Ward-Identität [2, Kap.7.4]

Hier ist der grau unterlegte Kreis stellvertretend für alle möglichen Diagramme die zu M_0 beitragen, wobei M_0 das Diagramm ohne Photon darstellt. Summiert man nun über all diese Diagramme, so erhält man folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}
& k_\mu M^\mu(k; p_1 \dots p_n; q_1 \dots q_n) \\
& = e \sum_i [M_0(p_1 \dots p_n; q_1 \dots (q_i - k) \dots) - M_0(p_1 \dots (p_i + k) \dots; q_1 \dots q_n)]
\end{aligned}$$

Dies ist die sogenannte Ward-Takahashi Identität. In dem speziellen Fall wo M ein S-Matrix Element ist, handelt es sich um die Ward-Identität und die RHS trägt nicht zur S-Matrix bei und man erhält:

$$k_\mu M^\mu(k) = 0.$$

2.4 Anomales Magnetisches Moment in der QED

Das anomale magnetische Moment des Myons lautet (s. Kap. 2.1)[3, Kap.1]

$$a_\mu = \frac{g_\mu - 2}{2}. \quad (21)$$

In der QED kann man das anomale magnetische Moment in einzelne Beiträge unterteilen, da hier nur die Wechselwirkung zwischen Leptonen und Photonen betrachtet wird. Daher gilt [3, Kap.3]

$$a_\mu = A_1 + A_2 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right) + A_3 \left(\frac{m_\mu}{m_e}, \frac{m_\mu}{m_\tau} \right), \quad (22)$$

wobei A_1 der sogenannte universelle Beitrag ist. Dieser Beitrag ist unabhängig von den Massen und umfasst alle Leptonen. Der zweite Beitrag $A_2 \left(\frac{m_\mu}{m_\tau} \right)$ repräsentiert die geschlossenen Fermion-Schleifen, was bedeutet, dass Diagramme mit mindestens zwei Schleifen zum Wert beitragen und der dritte Beitrag $A_3 \left(\frac{m_\mu}{m_e}, \frac{m_\mu}{m_\tau} \right)$ trägt ab Diagrammen mit drei Schleifen bei.

Diese einzelnen Beiträge kann man mit Hilfe einer Taylorentwicklung ermitteln, indem man die Beiträge nach $\frac{\alpha}{\pi}$ entwickelt [3, Kap. 3]

$$A_1 = A_1^{(2)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + A_1^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_1^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_1^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_1^{(10)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots, \quad (23)$$

$$A_2 = A_2^{(4)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + A_2^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_2^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_2^{(10)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots, \quad (24)$$

$$A_3 = A_3^{(6)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + A_3^{(8)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + A_3^{(10)} \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots, \quad (25)$$

wobei $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ die sogenannte Feinstrukturkonstante ist. Der gesamten Beitrag für die n-te Ordnung lautet:

$$C_n = \sum_{i=1}^3 A_i^{(2n)}. \quad (26)$$

Somit kann man a_μ mit der Taylorentwicklung nach $\frac{\alpha}{\pi}$ bestimmen :

$$a_\mu = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^n. \quad (27)$$

In 1.Ordnung (= 1 Schleife) erhält man für das anomale magnetische Moment folgendes:

$$a_\mu^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

In Kapitel 3.1 wird dieser Beitrag nochmal beispielhaft nachgerechnet.

Der experimentelle Wert für die Feinstrukturkonstante konnte mit Hilfe des anomalen magnetischen Moment des Elektrons präzise bestimmt werden und lautet [3, Kap. 3]:

$$\alpha = \frac{1}{137,035999084(51)}.$$

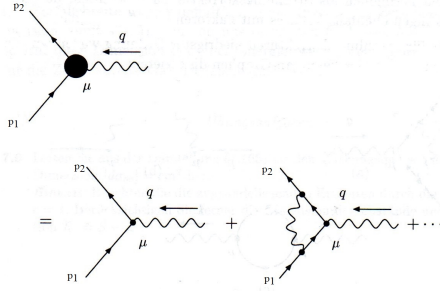


Abbildung 8: Summation aller Strahlungskorrekturen in der Vertexfunktion, vgl.[5, Kap. 8.1]

2.5 Vertexfunktion

Bei einem Wechselwirkungsprozess zwischen einem Photon und einem Myon in der niedrigsten Ordnung erhält man mit Hilfe der Feynman-Regeln (s. Anhang A) folgende Amplitude [1, Kap. 2]:

$$M = -ie \langle \mu_{p_2} | J^\mu(0) | \mu_{p_1} \rangle A_\mu(q) = -ie \bar{u}_{p_2} \gamma^\mu u_{p_1} A_\mu(q). \quad (28)$$

Der Vertexfaktor der 1.Ordnung ist somit $-ie\gamma^\mu$. Bei höheren Ordnungen wird dieser Vertexfaktor allerdings durch eine Vertexfunktion $\Gamma^\mu(p_2, p_1)$ ersetzt, da bei höheren Ordnungen weitere Wechselwirkungsprozesse berücksichtigt werden müssen. Diese weiteren Wechselwirkungsprozesse werden als Strahlungskorrekturen bezeichnet. In Abb.8 ist die Summe aller Strahlungskorrekturen in dem schwarzen Punkt abgebildet. Im Allgemeinen kann man die Vertexfunktion als Linearkombination von Vektoren aufschreiben, da sie sich wie ein Vektor transformiert [2, Kap 6.2]:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \gamma^\mu A + (p_2^\mu + p_1^\mu) B + (p_2^\mu - p_1^\mu) C, \quad (29)$$

wobei aus den Beziehungen $\not{p}_1 u(p_1) = m u(p_1)$ und $\bar{u}(p_2) \not{p}_2 = \bar{u}(p_2) m$ folgt, dass die Koeffizienten A, B und C nur Konstanten wie m und $q^2 = -2p_1 p_2 + 2m^2$ beinhalten. Mit der Ward-Identität $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ folgt, dass C Null ist [2, Kap. 6.2]. Mit Hilfe der Gordon-Identität

$$\bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) = \bar{u}(p_2) \left[\frac{p_2^\mu + p_1^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p_1), \quad (30)$$

lässt sich Gleichung (29) umschreiben und man erhält die Vertexfunktion

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (31)$$

hierbei sind F_1 und F_2 Funktionen von q^2 und werden als Formfaktoren bezeichnet.

Im nächsten Schritt wird der Zusammenhang zwischen dem anomalen magnetischen Moment und den Formfaktoren untersucht. Dazu wird die Streuamplitude in der Born-Näherung mit dem Limes der nichtrelativistischen Streuamplitude verglichen.

Zunächst die Born-Näherung:

Hierfür benötigt man den Hamiltonian, der das Verhalten eines Myons in einem elektromagnetischen Feld in der nichtrelativistischen Quantenmechanik ,beschreibt:

$$H = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{2m} - \vec{\mu} \vec{B} + e\varphi, \quad (32)$$

wobei $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ ist.

Mit dem Hamiltonian erhält man nun die nichtrelativistische Amplitude für die Streuung eines

Myons an einem externen Vektorpotential A_μ in der Born-Näherung [1, Kap.2]:

$$f = -\frac{m}{2\pi}\chi_2^+ \left(-\frac{e}{2m}A_q(p_2 + p_1) + e\varphi_q - i\varphi\sigma[q \times A_q] \right) \chi_1. \quad (33)$$

wobei χ_1 und χ_2^+ Dirac-Spinoren sind. Nun betrachtet man die Streuamplitude im nichtrelativistischen Limes. Dazu benötigt man die Dirac-Spinoren:

$$u_p = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{p\sigma}{E+m}\chi \end{pmatrix}, \quad (34)$$

hier ist $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Durch einsetzen in die Streuamplitude erster Ordnung (Formel (28)) erhält man die nichtrelativistische Streuamplitude

$$M = -2iem\chi_2^+ \left[F_1(0) \left(\varphi_q - \frac{A_q(p_2 + p_1)}{2m} \right) - i \frac{F_1(0) + F_2(0)}{2m} [q \times A_q] \right] \chi_1. \quad (35)$$

Durch Vergleichen der beiden Gleichungen (33) und (35) erhält man für die Formfaktoren folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} F_1(0) &= 1 \\ \mu &= \frac{e}{2m} (F_1(0) + F_2(0)) \end{aligned}$$

mit (2) und (4) folgt schließlich :

$$F_2(0) = a_\mu = \frac{g-2}{2}.$$

Die obige Diskussion stammt aus [5, 2, 1].

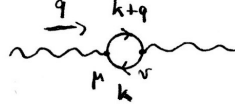


Abbildung 9: Vakuumpolarisation

2.6 Eichinvarianz der Vakuumpolarisation

In Kapitel 3 werden die Diagramme in Gruppen und Untergruppen klassifiziert werden. Diese Gruppen sind eichinvariant, da sie aus eichinvarianten Untergruppen zusammengesetzt sind. Dabei handelt es sich um die Schwinger-Korrektur, die 1 Loop Lepton Selbstenergie und die Vakuumpolarisation. In diesem Kapitel wird die Eichinvarianz der Vakuumpolarisation gezeigt. Für die Vakuumpolarisation gilt folgende Beziehung [5, Kap.8]:

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} Sp [\gamma^\mu S_F(k) \gamma^\nu S_F(k+q)].$$

Mit $S_F(k) = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}$ erhält man

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{Sp [\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + m)]}{(k^2 - m^2)(k+q)^2 - m^2}.$$

Zunächst wird die Spur betrachtet. Dazu benötigt man die Gamma-Relationen, die in Kapitel 3.1.1 unter Punkt 2 zu finden sind.

$$\begin{aligned} Sp [\gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma^\nu (\not{k} + \not{q} + m)] &= Sp [\gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{k} + \gamma^\mu \not{k} \gamma^\nu \not{q} + \gamma^\mu m \gamma^\nu m] \\ &= 4 [2k^\mu k^\nu + k^\mu q^\nu + q^\mu k^\nu + \eta^{\mu\nu} (-k^2 - k_\alpha q^\alpha + m^2)] \\ &= N^{\mu\nu} \end{aligned}$$

Im nächsten Schritt wird die Feynman-Parametrisierung durchgeführt (s.Kap 3.1.1):

$$\begin{aligned} \Pi_2^{\mu\nu}(q) &= ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \int \frac{N^{\mu\nu}}{[(1-x)(k^2 - m^2) + x((k+q)^2 - m^2)]^2} \\ &= ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{N^{\mu\nu}}{[(k-xq)^2 + x(1-x)q^2 - m^2]^2} \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf wird der Integrationsimpuls verschoben $k = k - xq$ und man definiert $-\Delta = x(1-x)q^2 - m^2$:

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = i4e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2k^\mu k^\nu + q^\mu q^\nu (2x^2 - 2x) + \eta^{\mu\nu} (-k^2 - x^2 q^2 + xq^2 + m^2)}{[k^2 - \Delta]^2}$$

Es gilt $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{k^2}{4} \eta^{\mu\nu}$, da

$$\int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - \Delta]^2} = \eta_{\mu\nu} I$$

$$\int d^4k \frac{k^2}{[k^2 - \Delta]^2} = 4I$$

$$\int d^4k \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 - \Delta]^2} = \int d^4k \frac{\frac{k^2}{4} \eta^{\mu\nu}}{[k^2 - \Delta]^2}$$

Nun wird die Ersetzung $k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{k^2}{4} \eta^{\mu\nu}$ durchgeführt:

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4q^\mu q^\nu (2x^2 - 2x) + 4\eta^{\mu\nu} (k^2 - x^2 q^2 + xq^2 + m^2)}{[k^2 - \Delta]^2}.$$

Mit der Wick-Rotation (Kap. 3.1.1) erhält man

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4q^\mu q^\nu (2x^2 - 2x) + 4\eta^{\mu\nu} (k_E^2 - x^2 q^2 + xq^2 + m^2)}{[k_E^2 + \Delta]^2}.$$

und mit der Substitution $k_E \rightarrow \sqrt{\Delta} k_E$ folgt

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -e^2 \int_0^1 dx \int \frac{\Delta d^4k}{(2\pi)^4} \frac{4q^\mu q^\nu (2x^2 - 2x) + 4\eta^{\mu\nu} (\Delta k_E^2 - x^2 q^2 + xq^2 + m^2)}{\Delta [k_E^2 + 1]^2}.$$

Mit dem Tadpole-Integral aus Kapitel 3.1.1 erhält man:

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -\frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [q^\mu q^\nu (2x^2 - 2x) I_2 + \Delta \eta^{\mu\nu} I_1 + \eta^{\mu\nu} (x^2 q^2 + xq^2 + m^2) I_2].$$

Für $d=4$ gilt die Relation $I_1 = -I_2$:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Gamma(2)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1 - \frac{d}{2})} = 1 - \frac{d}{2}$$

$$I_1 = -I_2.$$

Diese Relation wird eingesetzt und durch weiteres zusammenfassen, erhält man:

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -\frac{4e^2}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx [q^\mu q^\nu (2x^2 - 2x) I_2 + \eta^{\mu\nu} (-\Delta - x^2 q^2 + xq^2 + m^2) I_2].$$

Somit hat die Gleichung die Form

$$\Pi_2^{\mu\nu}(q) = -\frac{4e^2}{(2\pi)^4} (q^\mu q^\nu - q^2 \eta^{\mu\nu}) \int_0^1 dx [(2x^2 - 2x) I_2].$$

Daher gilt

$$q_\mu \Pi_2^{\mu\nu}(q) = -\frac{4e^2}{(2\pi)^4} q_\mu (q^\mu q^\nu - q^2 \eta^{\mu\nu}) \int_0^1 [dx (2x^2 - 2x) I_2]$$

$$= -\frac{4e^2}{(2\pi)^4} (q^2 q^\nu - q^2 q^\nu) \int_0^1 [dx (2x^2 - 2x) I_2]$$

$$= 0$$

Somit wäre explizit gezeigt, dass die Vakuumpolarisation in 2.Ordnung eichinvariant ist.

Dies ist sogar allgemeingültig, und wird durch die Ward-Identität aus Kapitel 2.3.1

$$q_\mu \Pi_n^{\mu\nu} = 0$$

garantiert.

Die Eichinvarianz der Schwinger-Korrektur und der 1 Loop Lepton Selbstenergie kann man mit Hilfe des Photon-Operators zeigen. Bei der Selbstenergie kann es sein, dass ein einziges Diagramm allein nicht eichinvariant ist, sondern erst durch Addition über alle möglichen Diagramme die in der Ordnung beitragen. Diese Rechnungen werden in dieser Arbeit nicht durchgeführt.

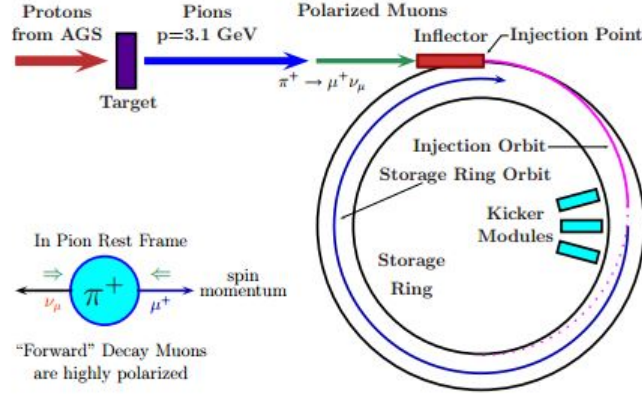


Abbildung 10: Aufbau des Brookhaven Myon g-2 Experimentes [3, S.12]

2.7 Brookhaven Myon g-2 Experiment

Im weiteren Verlauf wird die Bestimmung des anomalen magnetischen Moments im Brookhaven Myon g-2 Experiment erklärt, vgl. [1, 3]. In Abbildung 10 ist der Aufbau des Experimentes zu sehen. Um Myonen zu erhalten, produziert man zunächst mit Hilfe von Protonen Pionen. Protonen werden mit einer Energie von 24 GeV auf ein Target beschleunigt [3, Kap.2.1], wodurch Pionen entstehen. Diese Pionen zerfallen zu Myonen mit Neutrino Teilchen: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$. Die Myonen werden unter dem Einfluss eines Magnetfeldes B auf eine Kreisbahn (Zyklotron) gebracht, in der sie eine Kreisfrequenz von

$$\omega_c = \frac{eB}{m_\mu \gamma} \quad (36)$$

haben, wobei $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ der Lorentzfaktor mit v der Geschwindigkeit ist. Der Spin der Myon Teilchen im Zyklotron präzidiert zusätzlich unter dem Einfluss des Magnetfeldes. Die Spin-Präzessionsfrequenz beträgt

$$\omega_s = \frac{eB}{m_\mu \gamma} + a_\mu \frac{eB}{m_\mu} \quad (37)$$

und ist um

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_c = \omega_a = a_\mu + \frac{eB}{m_\mu} \quad (38)$$

größer als ω_c . Um a_μ zu bestimmen, benötigt man nur noch die Frequenz ω_a , da die Werte B und m_μ aus weiteren Messungen bekannt sind. Die Frequenz ω_a erhält man, in dem man den Zerfall der Myonen betrachtet. Da die Myonen relativistisch sind, erhöht sich ihre Lebensdauer von ungefähr $2\mu s$ auf $64\mu s$ [3, Kap. 2.1], wodurch die Myonen mehrere Spin-Präzessionen durchführen können, bevor sie zerfallen:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu. \quad (39)$$

Wie in Abbildung 11 zu erkennen ist, wird die Energie der emittierten Positronen mit Hilfe von Kalorimetern gemessen. Die Richtung dieser Positronen ist mit großer Wahrscheinlichkeit die gleiche, wie die Spinrichtung der Myonen. Daher lässt sich mit Hilfe der Anzahl der detektierten Positronen ω_a bestimmen

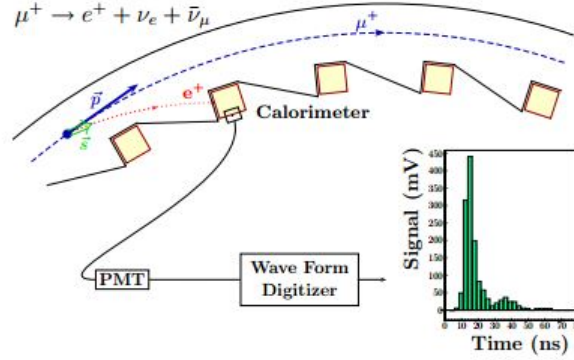


Abbildung 11: Kalorimeter im Versuchsaufbau [3, S.13]

$$N(t) = N_0(E)e^{\frac{-t}{\tau_\mu}} [1 + A(E)\sin(\omega_a t + \phi(E))], \quad (40)$$

wobei $N_0(E)$ ein Normierungsfaktor, τ_μ die Lebensdauer der Myonen und $A(E)$ ein Asymmetriefaktor [3, Kap. 2.1] ist. Nun kann man mit Formel (38) a_μ bestimmen, indem man sie umformt und die Werte ω_a , B und m_μ einsetzt.

Der aktuelle gemessene Wert ist $a_\mu^{exp} = 116592008.0(5.4)(3.3)[6.3] \times 10^{-10}$ [3, Kap. 2.2].

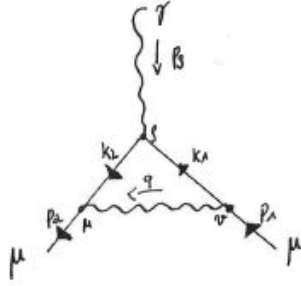


Abbildung 12: Schwinger-Korrektur

3 Beiträge der QED

3.1 Schwinger-Korrektur

In diesem Abschnitt wird der erste universelle Beitrag $A_1^{(2)}$ berechnet, um die genaue Vorgehensweise zu veranschaulichen. Der erste Beitrag ist der maßgebende Wert und wird auch als Schwinger Korrektur bezeichnet, da er 1948 von Schwinger berechnet wurde [3, Kap. 3.1]. Bevor die eigentliche Rechnung durchgeführt wird, werden im nächsten Unterkapitel die benötigten mathematischen Grundlagen erklärt.

3.1.1 Mathematische Grundlagen

1. Wick-Rotation:

Mit Hilfe der Wick-Rotation kann man ein Integral vom Minkowski-Raum der Dimension D in einen euklidischen Raum der gleichen Dimension D transformieren [5, Kap. B.3]. Aus der Ersetzung

$$k_0 \rightarrow ik_E^0 \quad (41)$$

folgt

$$k \rightarrow ik_E \quad (42)$$

und

$$d^D k \rightarrow id^D k_E, \quad (43)$$

sowie

$$k^2 = k_0^2 - \vec{k}^2 = -k_E^2 \quad (44)$$

2. Gamma Relationen:

Für die Gamma-Matrizen gelten folgende Relationen [2, Kap. A.3]:

$$\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda = -2\gamma^\alpha \quad (45)$$

$$\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda = 4\eta^{\alpha\beta} \quad (46)$$

$$\gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\lambda = -2\gamma^\gamma \gamma^\beta \gamma^\alpha \quad (47)$$

3. Feynman-Parametrisierung:

Mit der Feynman-Parametrisierung kann man den Nenner eines Produktes der folgenden Form so umschreiben, dass die weitere Rechnung vereinfacht wird [5, Kap. B.3]:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^n a_i^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)}{\prod_{i=1}^n \Gamma(\alpha_i)} \times \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \delta\left(1 - \sum_{i=1}^n x_i\right) \frac{\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i-1}}{\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i}}, \quad (48)$$

wobei a_i die Nenner, α_i die Potenzen der Nenner und x_i die Feynman-Parameter sind.

4. Diracologie:

Wenn rechts ein Spinor steht folgt aus der Dirac-Gleichung:

$$\begin{aligned} \gamma^\rho m &= \gamma^\rho \not{p}_1 = \gamma^\rho p_{1i} \gamma^i = \frac{1}{2} p_{1i} (\{\gamma^\rho, \gamma^i\} + [\gamma^\rho, \gamma^i]) \\ &= \frac{1}{2} p_{1i} \left(2\eta_{\rho i} + \frac{2}{i} \sigma^{\rho i}\right) = p_{1i} (\eta_{\rho i} - i\sigma^{\rho i}) \\ \Leftrightarrow p_1^\rho &= \gamma^\rho m + i\sigma^{\rho i} p_{1i}, \end{aligned}$$

da die Terme proportional zu γ^ρ nicht zu a_μ beitragen folgt:

$$p_1^\rho \Rightarrow i\sigma^{\rho i} p_{1i}. \quad (49)$$

Aus

$$\not{p}_1 = p_{1i} \gamma^i \gamma^\rho = p_{1i} (2\eta_{i\rho} - \gamma^\rho \gamma^i)$$

folgt die Ersetzung

$$\not{p}_1 \gamma^\rho \Rightarrow 2i\sigma^{\rho i} p_{1i}. \quad (50)$$

Analog erhält man die Beziehungen:

$$p_2^\rho \Rightarrow -i\sigma^{\rho i} p_{2i}. \quad (51)$$

$$\gamma^\rho \not{p}_2 \Rightarrow -2i\sigma^{\rho i} p_{2i}. \quad (52)$$

5. Ein-Schleifen Tadpole-Integral:

Nach der Wick-Rotation erhält man das folgende Integral, deren Lösung wie folgt lautet [2]:

$$I_A = \int \frac{d^D l}{(l^2 + a^2)^A} = \pi^{\frac{D}{2}} \frac{\Gamma\left(A - \frac{D}{2}\right)}{\Gamma(A)} \frac{1}{(a^2)^{A - \frac{D}{2}}}. \quad (53)$$

Hierbei ist D die Dimension und Γ ist die Gamma-Funktion für die $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ gilt.

3.1.2 Rechnung

Mit Hilfe der Feynman-Regeln (s. Anhang A) erhält man die folgende Amplitude zum Diagramm in Abb. 12:

$$M = \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \bar{u}_2(p_2) (ie\gamma^\mu) \frac{i(\not{k}_2 + m_\mu)}{(k_2^2 - m_\mu^2)} (ie\gamma^\rho) \epsilon^\lambda(p_3) \frac{i(\not{k}_1 + m_\mu)}{(k_1^2 - m_\mu^2)} (ie\gamma^\nu) u_1(p_1) \frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2 - m^2}. \quad (54)$$

Im weiteren Verlauf betrachtet man nur die Vertexfunktion. Zuerst wird der Zähler ausgeklammert und die Slashnotation aufgelöst:

$$\Gamma = -ie^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{k_{2\alpha} k_{1\beta} \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma_\mu + mk_{2\alpha} \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma_\mu + mk \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma_\mu + m^2 \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu}{(k_2^2 - m_\mu^2) (k_1^2 - m_\mu^2) q^2}. \quad (55)$$

Im nächsten Schritt werden die Gamma-Relationen (Glg. (45) - Glg. (47)) angewendet:

$$\Gamma = -ie^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{-2k_{2\alpha} k_{1\beta} \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha + 4mk_{2\alpha} \eta^{\alpha\rho} + 4mk_{1\beta} \eta^{\rho\beta} - 2m^2 \gamma^\rho}{(k_2^2 - m_\mu^2) (k_1^2 - m_\mu^2) q^2}.$$

Durch die Anwendung von Glg. (48) vereinfacht sich das Integral zu

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4ie^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\quad \times \frac{-k_{2\alpha} k_{1\beta} \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha + 2mk_{2\alpha} \eta^{\alpha\rho} + 2mk_{1\beta} \eta^{\rho\beta} - m^2 \gamma^\rho}{[x(k_2^2 - m_\mu^2) + y(k_1^2 - m_\mu^2) + zq^2]^3}. \end{aligned}$$

Nun wird die Ersetzung $k_2 = p_3 + k_1$ und $q = p_1 - k_1$ durchgeführt:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4ie^2 \epsilon \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\quad \times \frac{(p_3 + k_1)_\alpha k_{1\beta} \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(p_3 + 2k_1)^\rho + m^2 \gamma^\rho}{\left[x \left((p_3 + k_1)^2 - m_\mu^2 \right) + y \left(k_1^2 - m_\mu^2 \right) + z \left(p_1 - k_1 \right)^2 \right]^3} \end{aligned}$$

Jetzt wird der Nenner weiter umgeformt und k_1 wird verschoben: $k_1 \rightarrow k_1 - a$ mit $a = xp_3 - zp_1$:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4ie^2 \epsilon \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\quad \times \frac{(p_3 + k_1 - a)_\alpha (k_1 - a)_\beta \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(p_3 + 2k_1 - 2a)^\rho + m^2 \gamma^\rho}{\left[2(k_1 - a)a - (x + y)m^2 + (k_1 - a)^2 + xp_3^2 + zp_1^2 \right]^3}. \end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf wird nur der Zähler Z betrachtet.

Zunächst wird die Klammer aufgelöst und der letzte Term, der proportional zu γ^ρ ist, wird vernachlässigt, da er nicht zu a_μ beiträgt:

$$Z = \underbrace{(p_3 + k_1 - a)_\alpha (k_1 - a)_\beta \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha}_{(a)} - \underbrace{2m(p_3 + 2k_1 - 2a)^\rho}_{(b)}$$

Nun betrachten wir beide Terme separat. In (a) fallen folgende Terme weg, da man durch einfaches Umformen erkennt, dass sie ebenfalls proportional zu γ^ρ sind:

$$(a) : (p_{3\alpha}k_{1\beta} + k_{1\beta}k_{1\alpha} - a_\alpha k_{1\beta} - a_\beta p_{3\alpha} - a_\beta k_{1\alpha} + a_\beta a_\alpha) \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha = (-a_\beta p_{3\alpha} + a_\beta a_\alpha) \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha$$

Betrachtet man (b) so erkennt man, dass der in k_1 lineare Term aus Symmetriegründen verschwindet und man erhält schließlich für den Zähler:

$$Z = (-a_\beta p_{3\alpha} + a_\beta a_\alpha) \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha - 2m(p_3 - 2a)^\rho$$

Jetzt wird $a = xp_3 - zp_1$ eingesetzt und man erhält mit einigen Umformungen für den $\gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha$ -Term im Zähler folgenden Ausdruck:

$$D\dot{p}_2\gamma^\rho\dot{p}_2 + C\dot{p}_2\gamma^\rho\dot{p}_1 + B\dot{p}_1\gamma^\rho\dot{p}_2 + A\dot{p}_1\gamma^\rho\dot{p}_1$$

mit

$$\begin{aligned} A &= -x - z + 2xz + x^2 + z^2 \\ B &= x + z - xz - x^2 \\ C &= x - xz - x^2 \\ D &= -x + x^2 \end{aligned}$$

Nun ersetzt man im hinteren Term des Zähler a und $p_3 = p_2 - p_1$:

$$\begin{aligned} -2m(p_3 - 2a)^\rho &= -2(Vp_1 + Wp_2)^\rho \\ V &= -1 + 2x + 2z \\ W &= 1 - 2x \end{aligned}$$

Da rechts und links vom Zähler in der Amplitude die Dirac-Spinoren $u_1(p_1)$ und $\bar{u}_2(p_2)$ stehen, können wir die Dirac-Gleichung $(\not{p} - m)u = 0$ und $\bar{u}(\not{p} - m) = 0$ anwenden. Jedoch muss der $\gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha$ -Term vorher umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} &D\dot{p}_2\gamma^\rho\dot{p}_2 + m\gamma^\rho\dot{p}_2D - m\gamma^\rho\dot{p}_2D + C\dot{p}_2\gamma^\rho\dot{p}_1 + m\gamma^\rho\dot{p}_1C - m\gamma^\rho\dot{p}_1C \\ &+ B\dot{p}_1\gamma^\rho\dot{p}_2 + A\dot{p}_1\gamma^\rho\dot{p}_1 + m\dot{p}_1\gamma^\rho A - m\dot{p}_1\gamma^\rho A \\ &= (\dot{p}_2 - m)\gamma^\rho\dot{p}_2D + m\gamma^\rho\dot{p}_2D + (\dot{p}_2 - m)\gamma^\rho\dot{p}_1C + m\gamma^\rho\dot{p}_1C + B\dot{p}_1\gamma^\rho\dot{p}_2 + A\dot{p}_1\gamma^\rho(\dot{p}_1 - m) + m\dot{p}_1\gamma^\rho A \\ &= m(\dot{p}_1\gamma^\rho A + \gamma^\rho\dot{p}_2D) + B\dot{p}_1\gamma^\rho\dot{p}_2 \end{aligned}$$

Die Terme, die nicht zu a_μ beitragen, werden wieder direkt vernachlässigt. Nun muss noch der B -Term umgeformt werden. Dazu werden die Gamma-Matrizen vertauscht und man erhält:

$$B\dot{p}_1\gamma^\rho\dot{p}_2 = Bp_{1\beta}p_{2\alpha}\gamma^\beta\gamma^\rho\gamma^\alpha = 2mB(p_2^\rho + p_1^\rho) - mB(\not{p}_1 - m)$$

Damit sieht der Zähler wie folgt aus:

$$Z = m(\dot{p}_1\gamma^\rho A + \gamma^\rho\dot{p}_2D) + 2mB(p_2^\rho + p_1^\rho) - 2(Vp_1 + Wp_2)^\rho$$

Nun wenden wir (4) an und erhalten:

$$\begin{aligned} Z &= 2mi\sigma^{\rho i}p_{1i}(A + B - V) + 2mi\sigma^{\rho i}p_{2i}(-D - B + W) \\ &= 2mi\sigma^{\rho i}p_{1i}(1 - 2x + xz - 2z + z^2) + 2mi\sigma^{\rho i}p_{2i}(1 - 2x + xz - z) \end{aligned}$$

Im folgenden wird der Nenner N betrachtet. Aus der Kinematik folgen die Relationen:

$$\begin{aligned} q^2 &= 0 \\ pq &= 0 \\ p_1p_2 &= -m^2 \\ p_1^2 = p_2^2 &= -m^2 \end{aligned}$$

Mit diesen Relationen erhält man

$$N = [k_1^2 - (x + y - z + z^2) m^2]^3 = \left[k_1^2 - \underbrace{(1-z)^2 m^2}_{\Delta} \right]^3 = [k_1^2 - \Delta]^3$$

Transformiert man nun $k_1 \rightarrow \sqrt{\Delta}k$ so erhält man insgesamt:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4ie^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\quad \times \frac{2mi\sigma^{\rho i} p_{1i} (1 - 2x + xz - 2z + z^2) + 2mi\sigma^{\rho i} p_{2i} (1 - 2x + xz - z)}{\Delta [k^2 - 1]^3}. \end{aligned}$$

Mit der Wick-Rotation (s. Glg. (41)- (44)) erhält man:

$$\begin{aligned} \Gamma &= -4i^2 e^2 \int \frac{d^4 k_1}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + 1)^3} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \\ &\quad \times \frac{2mi\sigma^{\rho i} p_{1i} (1 - 2x + xz - 2z + z^2) + 2mi\sigma^{\rho i} p_{2i} (1 - 2x + xz - z)}{m^2(z - 1)^2} \end{aligned}$$

und (5) angewendet:

$$\begin{aligned} \Gamma &= 4e^2 \frac{1}{2(4\pi)^4} 2mi\sigma^{\rho i} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \\ &\quad \times \frac{p_{1i} (1 - 2x + xz - 2z + z^2) + p_{2i} (1 - 2x + xz - z)}{m^2(z - 1)^2} \\ &= 4e^2 \frac{1}{2(4\pi)^4} 2mi\sigma^{\rho i} \frac{1}{4m} (p_{2i} - p_{1i}) \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{i\sigma^{\rho i} p_{3i}}{2m}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mit Glg. (31), dass $F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2)$ und somit:

$$a_\mu^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi}.$$

Im Folgenden werden die QED-Korrekturen höherer Ordnungen betrachtet. Die Berechnung dieser Korrekturen würden über diese Arbeit hinausgehen, daher wird die Klassifizierung dieser Diagramme untersucht. Diese Klassifizierung wird in den Arbeiten der Kinoshita-Gruppe verwendet [8, 9, 10].

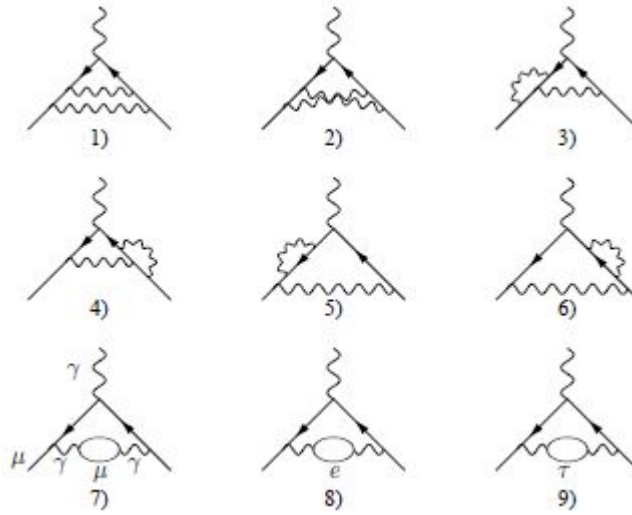


Abbildung 13: Diagramme der 4. Ordnung, 1)-7) sind universelle Beiträge [3, Kap.3]

3.2 Gruppeneinteilung und Beiträge

Bevor die Diagramme klassifiziert werden, wird die Notation erklärt:

- M_2, \dots, M_{10} : Diese Gruppe besteht aus reinen Vertexdiagrammen, die nur Selbstenergie-Korrekturen der Ordnung 2 bis 10 aufweisen.
- M_{6LL}, M_{8LL} : Vertex Diagramm 6./8. Ordnung mit einem externen light-by-light loop.
- $\Lambda_2, \dots, \Lambda_6$: Geschlossene Lepton-Loops 2./4./6. Ordnung
- Π_n : Diese Gruppe beinhaltet interne Vakuumpolarisation n-ter Ordnung.
- $\Pi_{n(m)}$: In dieser Gruppe befinden sich interne Vakuumpolarisationen n-ter Ordnung, die zusätzlich interne Vakuumpolarisationen m-ter Ordnung haben.

3.2.1 2 Loop

Es gibt insgesamt 9 Diagramme in der vierten Ordnung, wobei 7 Diagramme universelle Beiträge liefern. Die in Abb. 13 dargestellten Diagramme 8) und 9) hängen von der Masse der Leptonen ab. Im weiteren Verlauf werden nur die universellen Beiträge betrachtet. Die Diagramme werden in zwei eichinvariante Gruppen eingeteilt [3, Kap. 3].

Gruppe 1:

In dieser Gruppe befinden sich 6 Diagramme (s. Abb. 13, Diagramme 1-6). Wie man erkennen kann, bestehen diese aus reinen Vertexdiagrammen mit Selbstenergie Korrekturen der 4. Ordnung. Somit lässt sich die Gruppe auch mit M_4 bezeichnen.

Gruppe 2:

Die Gruppe 2 besteht aus einem Diagramm, und zwar aus dem Diagramm 7) in Abb. 13. Das Diagramm besteht aus M_2 mit der Vakuumpolarisation Π_2 .

Universeller Beitrag zum anomalen magnetischen Moment:

Der Beitrag der Gruppe 1 betragt [3, Kap.3]:

$$A_{(1)[1-6]}^4 = -\frac{279}{144} + \frac{5\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3)$$

und der Beitrag der Gruppe 2 betragt:

$$A_{1vap}^{(4)} \left(\frac{m_\mu}{m_l} = 1 \right) = \frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3}.$$

Der gesamte universelle Beitrag der Diagramme mit 2 Loops betragt:

$$A_{1uni}^4 = \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4}\zeta(3) = -0.32847896557919378....$$

und wurde das erste Mal 1957 von Sommerfield und Petermann berechnet [3]. $\zeta(n)$ ist die Riemann-Funktion mit dem Argument n .

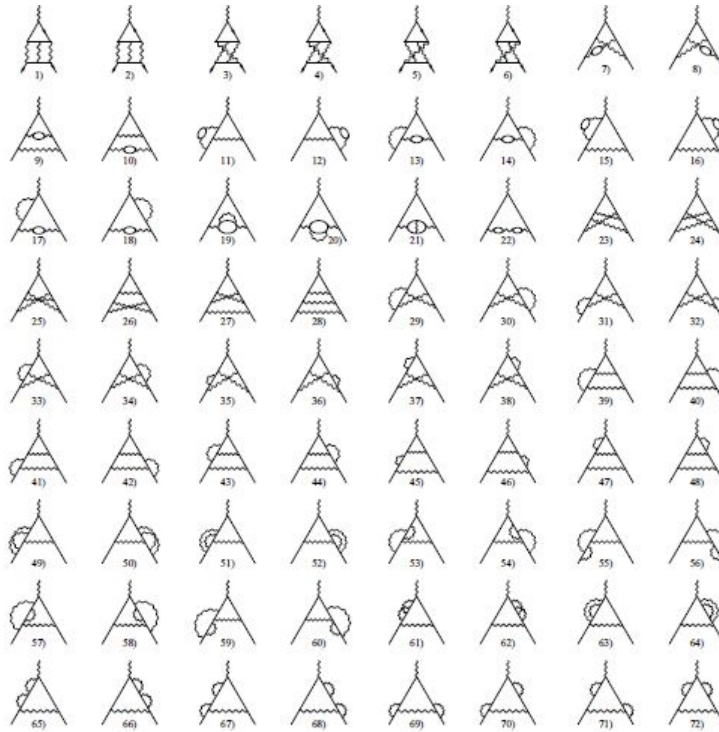


Abbildung 14: Diagramme 6.Ordnung[3, Kap.3]

3.2.2 3 Loop

In der 6. Ordnung tragen 72 Diagramme zum anomalen magnetischen Moment bei. Diese lassen sich in vier eichinvariante Gruppen einteilen. [3, Kap.3]

Gruppe 1:

In Gruppe 1 gibt es 50 Diagramme. Diese Gruppe besteht aus den Diagrammen, die keine geschlossenen Lepton-Schleifen beinhalten, also den M_6 Vertex Diagrammen. (s. Abb. 14, Diagramme 23-72).

Gruppe 2:

Diese Gruppe beinhaltet die Diagramme 19-22 in Abb. 14. Diese Gruppe kann man in zwei Untergruppen einteilen. Die Diagramme 19-21 bilden eine Untergruppe. Die Π_4 -Diagramme werden in M_2 -Diagramme eingesetzt. Diagramm 22 bildet die zweite Untergruppe. Hierbei werden zwei Π_2 -Diagramme in M_2 eingesetzt.

Gruppe 3:

Gruppe 3 hat 12 Diagramme (s. Abb. 14, Diagramme 7-18). Diese setzen sich zusammen aus M_4 -Diagrammen mit Π_2 -Diagrammen.

Gruppe 4:

In der letzten Gruppe befinden sich die Light-by-Light Scattering (LbL) Diagramme. Diese sind die ersten sechs Diagramme in Abb. 14.

Universeller Beitrag zum anomalen magnetischen Moment:

Der universelle Beitrag in der 6. Ordnung beträgt [3, Kap.3]:

$$\begin{aligned} A_{1uni}^6 &= \frac{28259}{5184} + \frac{17101}{810}\pi^2 - \frac{298}{9}\pi^2 \ln 2 + \frac{139}{18}\zeta(3) \\ &+ \frac{100}{3} \left(Li_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{24} \ln^4 2 - \frac{1}{24} \pi^2 \ln^2 2 \right) - \frac{239}{2160}\pi^4 + \frac{83}{72}\pi^2 \zeta(3) - \frac{215}{24}\zeta(5) \\ &= 1.181241456587\dots \end{aligned}$$

Dieser Beitrag wurde hauptsächlich von Remiddi und seinen Mitarbeitern berechnet [3]. Allerdings wurde das finale Ergebnis erst 1996 von Laporta und Remiddi berechnet [3], da man zunächst Probleme bei der Berechnung des Diagramms 25 in Abb. 14 hatte. Dieses analytische Ergebnis stimmt mit dem numerischen Ergebnis überein, das von Kinoshita berechnet wurde [3, Kap.3].

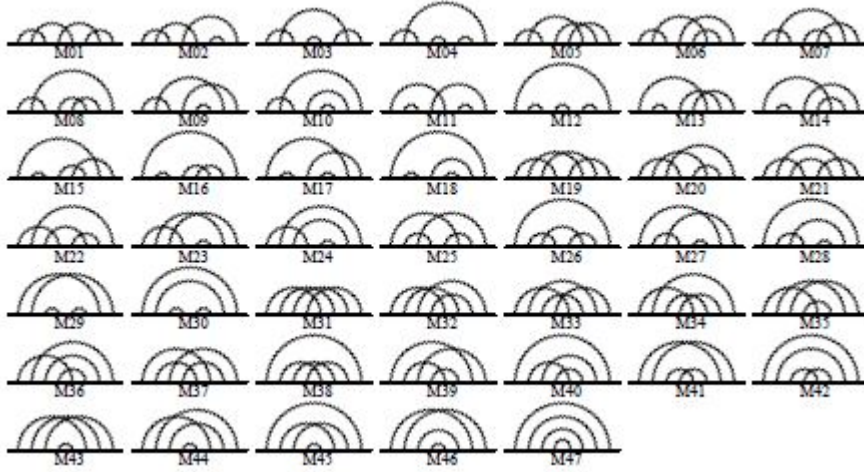


Abbildung 15: Gruppe 1 der 4 Loop Diagramme[2, Kap.3]

3.2.3 4 Loop

Die 4 und 5 Loop Diagramme werden im folgenden genauer betrachtet.

Es tragen insgesamt 891 Feynman Diagramme zum universellen Beitrag der 8. Ordnung bei. Diese werden in 5 eichinvariante Gruppen eingeteilt [6]. Ab Abb. 15 werden die äußeren Photonlinien weggelassen. Die Photonlinie wird überall dort an die Myon-Linie angebracht, wo es erlaubt ist. In den LbL-Gruppen befinden sich die äußeren Photonlinien auch an den Vakuumpolarisations-Diagrammen.

Gruppe 1:

In Gruppe 1 tragen 518 Diagramme bei. Diese Gruppe besteht, wie bei 3 Loop, aus den Diagrammen, die keine geschlossenen Lepton-Schleifen beinhalten. Diese Gruppe beinhaltet also die M_8 -Diagramme. (s. Abb. 15).

Gruppe 2:

Diese Gruppe beinhaltet 25 Diagramme. Die Π_2, Π_4 und $\Pi_{4(2)}$ und/oder Π_6 -Diagramme werden in M_2 -Diagramme eingesetzt. Diese Gruppe lässt sich in vier eichinvariante Untergruppen einteilen:

- Gruppe 2(a): Diese Untergruppe beinhaltet ein Feynman Diagramm, dass ein M_2 -Vertexdiagramm mit drei Π_2 -Vakuumpolarisations-Diagrammen ist. Dieses Diagramm ist in Abb.15 zu erkennen.
- Gruppe 2(b): Diese Diagramme beinhalten ein Π_2 - und ein Π_4 -Diagramm im M_2 -Vertexdiagramm. Es gibt 6 Diagramme.
- Gruppe 2(c): In dieser Untergruppe gibt es drei Diagramme, die $\Pi_{4(2)}$ -Diagramme im M_2 -Vertexdiagramm haben.
- Gruppe 2(d): 15 Diagramme gehören zu dieser Untergruppe und haben M_2 -Vertexdiagramme mit jeweils einem Π_6 -Diagramm.

Gruppe 3:

Gruppe 3 hat 54 Diagramme. Diese setzen sich zusammen aus M_4 -Diagrammen mit Π_2 und/oder Π_4 -Diagrammen. (s. Abb. 16)

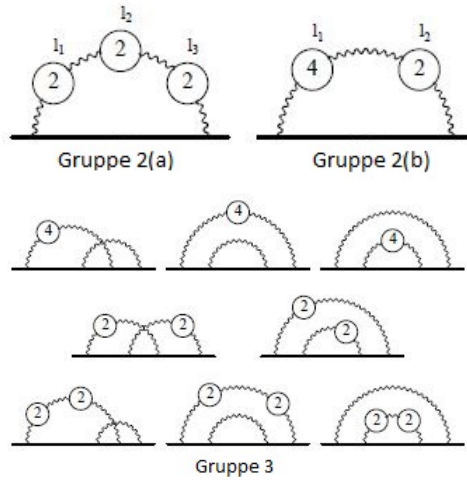


Abbildung 16: 4 Loop: oben: Gruppe 2(a) und 2(b), unten: Gruppe 3 vgl.[6]

Gruppe 4:

Hierbei handelt es sich um 150 Diagramme, die aus M_6 -Diagrammen und Vakuumpolarisation 2. Ordnung bestehen.

Gruppe 5:

In der letzten Gruppe befinden sich wieder die Light-by-Light Scattering Diagramme. Es gibt 144 LbL-Diagramme in der 8. Ordnung. Diese werden in vier Untergruppen eingeteilt:

- Gruppe 5(a): In dieser Untergruppe befinden sich 18 Diagramme. Betrachtet man die Diagramme, erkennt man, dass in die 3 Loop Diagramme der Gruppe 4 (s. Kap. 3.2.2) Π_2 -Diagrammen eingesetzt wurden. In der Gruppe befinden sich sechs Diagramme und die Π_2 -Diagramme können jeweils an drei Orten plaziert werden ($6 \cdot 3 = 18$). Drei dieser Diagramme sind als Beispiel in Abbildung 16 zu sehen.
- Gruppe 5(b): Hierbei handelt es sich um LbL Diagramme, die ein Π_6 -Diagramm beinhalten. Es sind insgesamt 60 Diagramme dieser Art (s. Abb. 16 Diagramme LLA,LLB,LLC,LLD)
- Gruppe 5(c): 49 LbL Diagramme haben beinhalten ein Π_4 -Diagramm und eine zusätzliche Lepton Selbst-Energie Korrektur, wie in Abb. 16 LLE, LLF, LLG, LLH und LLI zu sehen ist.
- Gruppe 5(d): Die restlichen Diagramme sind mit Π_4 -Diagrammen. Der Unterschied zur Gruppe 5(c) ist, dass das auslaufende Photon nicht an der Vakuumpolarisation verknüpft ist, sondern mit dem Vertexdiagramm (s. Abb. 16 Diagramme LLJ, LLK, LLL).

Universeller Beitrag zum anomalen magnetischen Moment:

Die universellen Beiträge der einzelnen Gruppen in der 8. Ordnung sind in der folgenden Tabelle abzulesen [8].

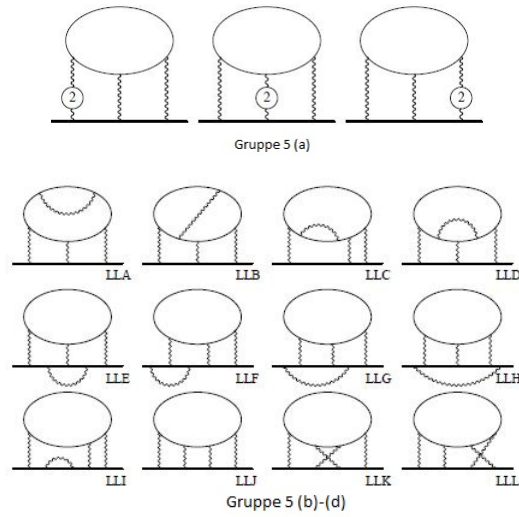


Abbildung 17: 4 Loop: Oben: Gruppe 5(a), Unten: Gruppe 5(b)-(d), vgl. [6]

Gruppe	Beitrag
1	-2.1755(20)
2(a)	0.000876865...
2(b)	0.01532520(37)
2(c)	0.0111308(9)
2(d)	0.0495148(38)
3(a)	-0.420476(11)
3(b)	-0.02767489(74)
3(c)	-0.0734458(54)
4	1.417637(67)
5(a)	0.598838(19)
5(b)	0.82236(13)
5(c)	-1.13852(20)
5(d)	-0.99072(10)
Gesamt	-1.9144(35)

Tabelle 1: Universelle Beiträge der 8.Ordnung [8]

Da die Diagramme an Komplexität zunehmen, wird es schwieriger die Beiträge analytisch zu berechnen. Daher sind die Beiträge numerisch berechnet worden, wodurch die Ungenauigkeit der Beiträge steigt und somit Unsicherheiten auftreten. Die numerisch berechneten Beiträge wurden mit der Monte Carlo Integration berechnet und die Unsicherheiten stammen auch davon.

3.2.4 5 Loop

Es tragen insgesamt 12672 Feynman-Diagramme zum universellen Beitrag der 8. Ordnung bei. Diese werden in 6 eichinvariante Gruppen eingeteilt, die man in 32 eichinvariante Untergruppen einteilen kann [7].

Gruppe 1:

In Gruppe 1 tragen 6354 Diagramme bei. Wieder besteht diese Gruppe, aus den Diagrammen, die keine geschlossenen Lepton Schleifen beinhalten. Diese Gruppe beinhaltet die M_{10} Diagramme.

Gruppe 2:

Diese Gruppe beinhaltet 208 Diagramme. Es werden wieder Vakuumpolarisations-Diagramme verschiedener Ordnungen in M_2 -Diagramme eingesetzt. In Abb. 18 sind einige Beispiele graphisch dargestellt. Diese Gruppe lässt sich in 10 eichinvariante Untergruppen einteilen:

- Gruppe 2(a): Diese Untergruppe beinhaltet ein Feynman-Diagramm, dass ein M_2 -Vertexdiagramm mit vier Π_2 -Vakuumpolarisations Diagrammen ist.
- Gruppe 2(b): Diese Diagramme beinhalten zwei Π_2 - und ein Π_4 -Diagramm im M_2 -Vertexdiagramm. Es gibt 6 Diagramme.
- Gruppe 2(c): In dieser Untergruppe gibt neun Diagramme, die zwei Π_4 -Diagramme im M_2 -Vertexdiagramm haben.
- Gruppe 2(d): 6 Diagramme gehören zu dieser Untergruppe und haben M_2 -Vertexdiagramme mit jeweils einem Π_2 -Diagramm und einem $\Pi_{4(2)}$ -Diagramm.
- Gruppe 2(e): Die Diagramme in dieser Untergruppe beinhalten M_2 -Vertexdiagramme mit einem Π_2 -Diagramm und einem Π_6 -Diagramm. Es befinden sich 30 Feynman-Diagramme in dieser Gruppe.
- Gruppe 2(f): Drei Diagramme haben M_2 -Vertexdiagramme mit einem $\Pi_{4(2,2)}$ -Diagramm.
- Gruppe 2(g): Diese Diagramme beinhalten ein $\Pi_{4(4)}$ -Diagramm im M_2 -Vertexdiagramm. Es gibt 9 Diagramme.
- Gruppe 2(h): 30 Diagramme beinhalten ein $\Pi_{6(2)}$ -Diagramm im M_2 -Vertexdiagramm.
- Gruppe 2(i): Diese Diagramme beinhalten ein Π_8 -Diagramm im M_2 -Vertexdiagramm. Es gibt 105 Diagramme.
- Gruppe 2(j): 6 Diagramme sind in der letzten Gruppe. Diese Feynman-Diagramme haben zwei LbL-Diagramme 4. Ordnung im M_2 -Vertexdiagramm .

Gruppe 3:

Gruppe 3 hat 600 Diagramme. Diese setzen sich aus M_4 -Diagrammen und verschiedene Diagrammen zusammen (s. Abb.18).

- Gruppe 3(a): Diese Untergruppe beinhaltet 24 Feynman-Diagramme, die ein M_4 -Vertexdiagramm mit drei Π_2 -Vakuumpolarisations Diagrammen sind.
- Gruppe 3(b): Diese Diagramme beinhalten ein Π_2 - und ein Π_4 -Diagramm im M_4 -Vertexdiagramm. Es gibt 108 Diagramme.
- Gruppe 3(c): In dieser Untergruppe gibt es 36 Diagramme, die zwei $\Pi_{4(2)}$ -Diagramme im M_4 -Vertexdiagramm haben.

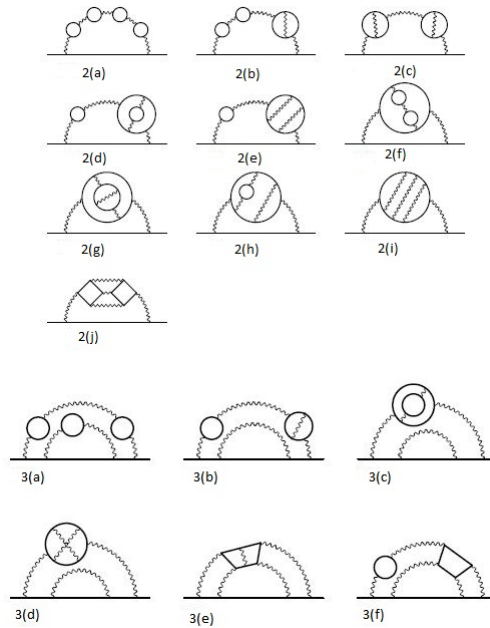


Abbildung 18: 10. Ordnung; oben: Gruppe 2, unten: Gruppe 3, vgl. [7]

- Gruppe 3(d): 180 Diagramme gehören zu dieser Untergruppe und haben M_4 -Vertexdiagramme mit jeweils einem Π_6 -Diagramm.
- Gruppe 3(e): Die Diagramme in dieser Untergruppe beinhalten M_4 -Vertexdiagramme mit einem LbL-Diagramm der 4. Ordnung mit zwei internen Vertices. Es befinden sich 180 Feynman-Diagramme in dieser Gruppe.
- Gruppe 3(f): 72 Diagramme haben M_4 -Vertexdiagramme mit einem Π_2 -Diagramm und einem LbL-Diagramm der 4. Ordnung.

Gruppe 4:

Gruppe 4 hat 1140 Diagramme. Diese Feynman-Diagramme bestehen aus M_6 -Diagrammen mit eingebauten VP-Diagrammen oder LbL-Diagrammen.

- Gruppe 4(a): Diese Diagramme beinhalten zwei Π_2 im M_6 -Vertexdiagramm. Es gibt 300 Diagramme.
- Gruppe 4(b): In dieser Untergruppe gibt 450 Diagramme, die ein Π_4 -Diagramm im M_6 -Vertexdiagramm haben.
- Gruppe 4(c): 390 Diagramme gehören zu dieser Untergruppe und haben M_6 -Vertexdiagramme mit einem LbL-Diagramm der 4. Ordnung.

Gruppe 5:

Gruppe 5 hat 2072 Diagramme. Diese Feynman-Diagramme bestehen aus M_8 -Diagrammen mit eingebauten Π_2 -Diagramm.

Gruppe 6:

In der letzten Gruppe befinden sich wieder die Light-by-Light Scattering Diagramme. Es gibt

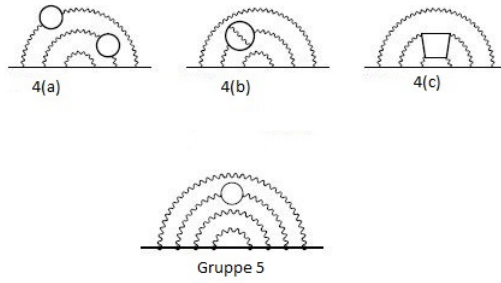


Abbildung 19: 5 Loop, oben: Gruppe 4, unten: Gruppe 5, vgl.[7]

2298 LbL-Diagramme in der 8. Ordnung. Diese werden in 11 Untergruppen eingeteilt. In Abbildung 20 ist pro Untergruppe ein Beispiel abgebildet.

- Gruppe 6(a): In dieser Untergruppe befinden sich 36 Diagramme. Dies sind M_{6LL} -Diagramme mit zwei Π_2 -Diagrammen. Einige dieser Diagramme sind als Beispiel in Abbildung 20 zu sehen.
- Gruppe 6(b): In dieser Gruppe wird ein Π_4 -Diagramm in die M_{6LL} -Diagramme eingesetzt.
- Gruppe 6(c): 144 Feynman-Diagramme sind in diese Gruppe und es wurden in M_{8LL} -Diagramme ein Π_2 -Diagramm und eine Strahlungskorrektur 2. Ordnung eingebaut.
- Gruppe 6(d): M_{6LL} -Diagramme mit Strahlungs-Korrekturen 4. Ordnung. In dieser Untergruppe befinden sich 492 Diagramme.
- Gruppe 6(e): M_{6LL} -Diagramme mit einer Strahlungskorrektur 2. Ordnung, die ein Π_2 -Diagramm beinhaltet. Hier tragen 48 Diagramme bei.
- Gruppe 6(f): 180 Diagramme setzen sich aus M_{8LL} -Diagrammen, die ein Λ_4 -Diagramm mit Strahlungskorrekturen 2. Ordnung beinhalten, zusammen. Eine der Photonlinien die sich mit dem Λ_6 -Diagramm verbindet, beinhaltet ein Π_2 -Diagramm.
- Gruppe 6(g): M_{8LL} -Diagramme, die ein Λ_6 -Diagramm und Strahlungskorrekturen 2. Ordnung beinhalten. Es gibt 480 Diagramme in dieser Untergruppe.
- Gruppe 6(h): In dieser Gruppe sind 630 M_{6LL} -Diagramme, die ein Λ_4 -Diagramm mit Strahlungskorrekturen 4. Ordnung beinhalten.
- Gruppe 6(i): M_{6LL} -Diagramme, die ein Λ_4 -Diagramm beinhalten. Im Λ_4 -Diagramm befinden sich Strahlungskorrekturen 2. Ordnung mit einem Π_2 -Diagramm (60 Diagramme).
- Gruppe 6(j): 54 M_{6LL} -Diagramme haben ein zweites Λ_4 -Diagramm zwischen zwei Photonen eingebaut.
- Gruppe 6(k): 120 M_{8LL} -Diagramme befinden sich in der letzten Untergruppe.

Universeller Beitrag zum anomalen magnetischen Moment:

Die universellen Beiträge der einzelnen Gruppen in der 10. Ordnung sind in der folgenden Tabelle abzulesen [8].

Gruppe	Beitrag
1	10.09(57)
2(a)	0.00047094(6)
2(b)	0.0070108(7)
2(c)	0.023468(2)
2(d)	0.0038017(5)
2(e)	0.010296(4)
2(f)	0.0075684(20)
2(g)	0.028569(6)
2(h)	0.001696(13)
2(i)	0.01747(11)
2(j)	0.003975(18)
3(a)	-0.109495(15)
3(b)	-0.473559(84)
3(c)	-0.116489(32)
3(d)	-0.24300(29)
3(e)	-1.3449(10)
3(f)	-2.4336(15)
4(a)	2.12733(17)
4(b)	3.32712(45)
4(c)	4.921(11)
5	-7.7296(48)
6(a)	1.04132(19)
6(b)	1.34699(28)
6(c)	-2.5289(28)
6(d)	1.8467(70)
6(e)	-0.4312(7)
6(f)	0.7703(22)
6(g)	-1.5904(63)
6(h)	0.1792(39)
6(i)	-0.0438(12)
6(j)	-0.2288(18)
6(k)	0.6802(38)
Gesamt	9.16(589)

Tabelle 2: Universelle Beiträge der 8.Ordnung [8]

Diese Werte wurden genauso wie die Werte der 8. Ordnung numerisch mit der Monte Carlo Integration berechnet. Daher sind die Wert ungenau und man erhält durch die Monte Carlo Integration eine Unsicherheit.

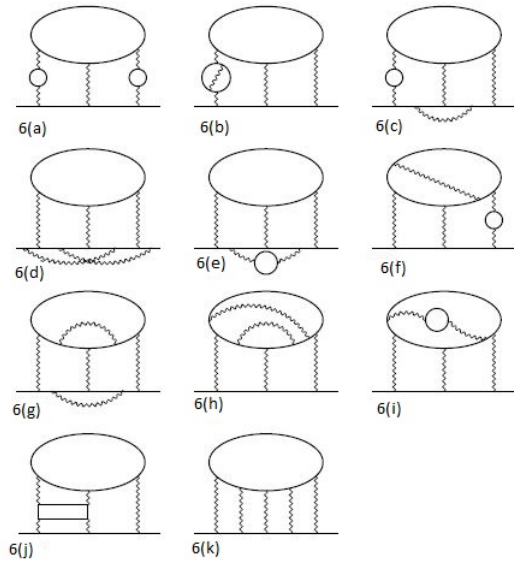


Abbildung 20: 5 Loop: Gruppe 6, vgl.[7]

3.3 Methoden der Klassifizierung

In diesem Abschnitt wird erklärt, wie man mit Hilfe eines Computerprogrammes die Diagramme in Gruppen einteilen kann. Dazu betrachtet man erst die Erzeugung der Diagramme mit dem Programm “Qgraf”. Diese Graphen werden dann mit einem weiteren Programm vereinfacht und klassifiziert. Die Umsetzung wird im weiteren Verlauf dargestellt.

3.3.1 Qgraf

Das Programm Qgraf [9] erzeugt Feynman-Diagramme. Hierfür benötigt Qgraf die Information über die ein- und auslaufenden Teilchen, den Impuls und die Anzahl der Loops. In diesem Fall werden folgende Informationen dem Programm vorgegeben, wobei die Anzahl der Loops variiert wird.

```
output = 'data/diags.3pt.a3.A' ;
style = 'qgraf.qed.sty' ;
model = 'qgraf.qed.mod' ;
in = el[p1] ;
out = el[p2], ph[p3] ;
loops = 3 ;
loop_momentum = k ;
options = onepi ;
```

Die Diagramme, die vom Programm erzeugt werden, haben folgende Struktur:
Ein Beispiel ist das 94. Diagramm der 3 Loop Diagramme.

```
*--#[ diag94 :
*
+ tag(94)*(-1)*
prop(po(1,k1),el(2,-k1))*
prop(po(3,k1+p3),el(4,-k1-p3))*
prop(ph(5,-k1-p1),ph(6,k1+p1))*
```

```

prop (ph (7, k1+p1), ph (8, -k1-p1)) *
prop (po (9, -k1+k2-p1), el (10, k1-k2+p1)) *
prop (po (11, k2), el (12, -k2)) *
prop (po (13, k1+k3+p1), el (14, -k1-k3-p1)) *
prop (po (15, k3), el (16, -k3)) *
prop (ph (17, -k1-p1), ph (18, k1+p1)) *
vrtx (el (2, -k1), ph (-4, -p3), po (3, k1+p3)) *
vrtx (el (-1, p1), ph (5, -k1-p1), po (1, k1)) *
vrtx (el (4, -k1-p3), ph (7, k1+p1), po (-2, -p2)) *
vrtx (el (12, -k2), ph (6, k1+p1), po (9, -k1+k2-p1)) *
vrtx (el (16, -k3), ph (8, -k1-p1), po (13, k1+k3+p1)) *
vrtx (el (10, k1-k2+p1), ph (17, -k1-p1), po (11, k2)) *
vrtx (el (14, -k1-k3-p1), ph (18, k1+p1), po (15, k3))
*
*--#] diag94 :

```

Dabei haben die Begriffe folgende Bedeutung:

1. "prop": Propagator
2. "vrtx": Vertex
3. "el": Elektron (Da hier die Masse keine Rolle spielt, kann man das Elektron durch jedes Lepton ersetzen)
4. "po": Positron
5. "ph": Photon

Da dieser Output unübersichtlich und kompliziert ist, vereinfacht man diesen Output mit einem weiteren Programm, das im folgenden Unterkapitel besprochen wird.

3.3.2 Vereinfachung und grafische Darstellung

Damit die Diagramme einfacher klassifiziert und graphisch dargestellt werden können, vereinfacht man mit einem weiteren Programm, das von Prof. Dr. York Schröder bereitgestellt wurde, den Output des Programmes Qgraf. Das Komplette Programm ist in Form [10] umgesetzt und befindet sich im Anhang B. Mit dem folgenden Abschnitt des Programms wird der Ausdruck des Diagramms vereinfacht.

```

id prop (po?(s1?), el?(s2?))=el (s1, s2);
al vrtx (el (s1?), ph (s2?), po (s3?))=el (s1, s2, s3);
repeat id el (s1?, s2?, s3?)*el (s4?, s5?, s6?)*ph (s2?, s5?)=
el (s1, s2, s3)*el (s4, s2, s6);
repeat id el (?a, s1?)*el (s1?, s2?)*el (s2?, ?b)=el (?a, ?b);
id el (s1?, ?a, s2?)*el (s2?, s1?)=po (?a);

```

Somit erhält man für das Beispiel in Kapitel 3.3.1 folgenden Ausdruck:

```
el (-1, 5, -4, 7, -2)*po (17, 5)*po (17, 7)
```

Das el steht für das Vertexdiagramm mit -1 und -2 den externen Leptonen. Das externe Photon wird mit -4 bezeichnet und die restlichen Zahlen sind Vertices. Gleiche Zahlen werden miteinander verbunden. Der Ausdruck po steht für die internen Lepton Schleifen. Nun hat man für die Feynman-Diagramme eine klare Struktur und kann die Diagramme graphisch darstellen (s. Abb. 21).

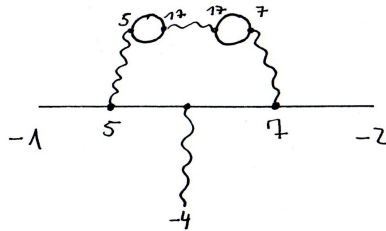


Abbildung 21: 3 Loop, 94.Diagramm

Im nächsten Schritt werden die Diagramme, die nicht beitragen, gleich Null gesetzt. Furry's Theorem [11] sagt aus, dass bei einer ungeraden Anzahl an Photonen an einer geschlossenen Fermion-Schleifen, das Diagramm in der QED nicht beiträgt. Dies kann man mit folgendem Befehl ausdrücken:

```
id po(?a)=po(?a, nargs_(?a));
id po(?a, s1?odd_)=0;
id po(?a, s1?even_)=po(?a);
```

3.3.3 Einteilung in Gruppen

Die in 3.2.2 vereinfachte Darstellung der Diagramme wird in diesem Abschnitt in Gruppen eingeteilt und somit wird die Klassifizierung in Kapitel 3.2 reproduziert. Hierfür muss die Klassifizierung verallgemeinert werden und eine allgemeine Regelung aufgestellt werden. Wenn man die Klassifizierung genau betrachtet, so erkennt man folgende Struktur:

- G= Gesamtanzahl der Gruppen
- Gruppe 1: Alle Diagramme ohne Vakuumpolarisation
- Gruppe 2/3/4/5/G-1: Diagramme mit $M_2/M_4/M_8/M_{10}$ -Vertexdiagramm
- Gruppe G: Light-by-Light Diagramme

Das Beispieldiagramm

```
el(-1,5,-4,7,-2)*po(17,5)*po(17,7)
```

gehört nach dieser Regelung in die Gruppe 2.

Nun muss diese Regelung in das Programm eingebunden werden.

In Gruppe 1 haben die Diagramme keine Vakuumpolarisation. In der Programmiersprache bedeutet dies, dass die Diagramme nicht den Zusatz "po" beinhalten dürfen:

```
if(count(po,1)=0) multiply Gruppe1;
```

Gruppe G besteht aus Light-by-Light Scattering Diagrammen. Das bedeutet, dass im "po" eine -4 ist, die für den externen Photon-Propagator steht.

```
id po(?a,-4,?b)=po(?a,-4,?b)*GruppeG;
```

Bei den restlichen Gruppen kommt es auf die Anzahl der Einträge im "el"-Teil an:

```

id el (? a)=el (? a, nargs_ (? a));
id el (? a,5)=el (? a)*Gruppe2;
id el (? a,7)=el (? a)*Gruppe3;
id el (? a,9)=el (? a)*Gruppe4;
id el (? a,11)=el (? a)*Gruppe5;

```

Zum Schluss müssen noch einige Korrekturen durchgeführt werden.

```

id Gruppe2*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe3*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe4*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe5*Gruppe1=Gruppe1;
id GruppeG*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe2*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe3*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe4*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe5*GruppeG=GruppeG;
id GruppeG*GruppeG=GruppeG;

```

Ohne diese Korrektur würde man für das folgende Beispieldiagramm die Klassifizierung

```

el (-1,5,-4,7,-2)*Gruppe1*Gruppe2

```

erhalten, da das Diagramm keine Vakuumpolarisation hat (Gruppe 1) und ein M_2 -Diagramm beinhaltet.

4 Loop muss separat betrachtet werden, da hierbei alle weiteren LbL Diagramme auch in der Gruppe G enthalten sind:

```

#if ('loop'=4);
if (count (po,1)=0) multiply Gruppe1;
id el (? a)=el (? a, nargs_ (? a));
id el (? a,5)=el (? a)*Gruppe2;
id el (? a,7)=el (? a)*Gruppe3;
id el (? a,9)=el (? a)*Gruppe4;
id el (? a,11)=el (? a)*Gruppe5;
id po (? a,-4,?b)=po (? a,-4,?b)*GruppeG;
if (count (po,1)=1);
id Gruppe3*el (? a,s1?,?b,s1?,?c)=Gruppe3*el (? a,s1,?b,s1,?c);
al Gruppe3*el (? a)=el (? a)*GruppeG;
endif;
id Gruppe2*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe3*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe4*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe5*Gruppe1=Gruppe1;
id GruppeG*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe2*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe3*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe4*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe5*GruppeG=GruppeG;
id GruppeG*GruppeG=GruppeG;
#endif;

```

In Anhang C ist die Gruppeneinteilung der Diagramme mit 3-Loop zu sehen. Das Beispieldiagramm befindet sich, wie oben vermutet, in Gruppe 2. Nun kann man die Anzahl der Diagramme pro Gruppe, die das Programm angibt, mit der Gruppeneinteilung in Kapitel 3.2 vergleichen. Die Klassifizierung stimmt überein und wurden somit mit diesem Programm reproduziert.

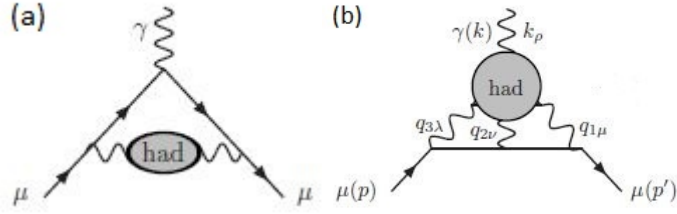


Abbildung 22: (a): Vakuum Polarisation; (b): Light by Light Scattering, vgl.[3, Kap. 3]

4 Weitere Beiträge

Im weiteren Verlauf folgen die hadronischen und elektroschwachen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment des Myons. Dieses Kapitel wird jedoch kurz und oberflächlich gehalten, da der Fokus dieser Arbeit in der Quantenelektrodynamik liegen soll.

4.1 Hadronische Beiträge

Hadronen sind Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen. Diese Wechselwirkung lässt sich mit Hilfe der Quantenchromodynamik (QCD) beschreiben. Dabei unterscheidet man zwei Arten von Wechselwirkung mit Hadronen: Vakuum Polarization (VP) und Light by Light Scattering (LbL). Im folgenden werden die Beiträge beider Arten separat dargestellt.

4.1.1 Vakuum Polarization

In Abb. 22 (a) ist der führende hadronische Beitrag zum anomalen magnetischen Moment des Myons zu sehen. Wie man erkennen kann, werden die internen Lepton-Schleifen durch interne Quark-Schleifen ersetzt. Die hadronischen Beiträge haben größere Ungenauigkeiten als die QED-Beiträge. Dies liegt daran, dass man diese Beiträge nicht einfach mit der Störungstheorie erfassen kann. Das Problem dabei ist, dass die Kopplungskonstante $\alpha(s)$ bei niedrigen Energien groß wird mit $E = \sqrt{s}$ [3, Kap. 4]. Man betrachtet daher die verschiedenen Energiebereiche und summiert diese hinterher auf. Im Bereich der niedrigen Energien wird der Wert mit Hilfe der Dispersionsrelation und von experimentellen Daten bestimmt. Bei höheren Energien kann man den Wert, aufgrund der asymptotischen Freiheit, mit Hilfe der Störungstheorie bestimmen.

4.1.2 Light by Light Scattering

Bei Light by Light Scattering (LbL) handelt es sich um die Art Diagramme, die man in Abb.22 (b) erkennen kann. Die Ungenauigkeit des hadronischen Beitrags zum anomalen magnetischen Moment des Myons stammt überwiegend von der Ungenauigkeit des LbL Wertes. Das Problem hierbei ist, dass man im Vergleich zur Vakuum Polarization nicht auf experimentelle Daten zurückgreifen kann, da drei von vier Photonen virtueller Art sind (s. Abb 22 (b)). Daher muss dieser Beitrag mit Hilfe der chiralen Störungstheorie bestimmt werden. Eine präzisere Erklärung findet man in [3, Kap. 5].

Der aktuelle Beitrag ist $a_{\mu}^{LbL;had} = (116 \pm 39) \times 10^{-11}$ [3, Kap.5.2].

4.2 Elektroschwache Beiträge

Mit dem elektroschwachen Beitrag ist der Wert für das anomale magnetische Moment um drei Standardabweichungen genauer geworden, daher ist es wichtig diesen Beitrag nicht zu vernachlässigen. Wie man in Abb. 23 erkennen kann wechselwirkt das Photon in den führenden Ord-

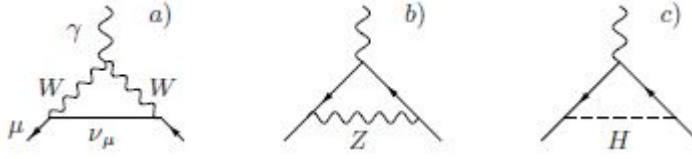


Abbildung 23: Diagramme zum elektroschwachen Beitrag [3, Kap. 6]

nungen mit dem Higgs-Teilchen, dem W- und dem Z-Boson. Dabei liefern diese Diagramme folgende Wert [3, Kap. 6.1]:

$$(a) a_{\mu}^{(2)EW}(W) = \frac{\sqrt{2}G_{\mu}m_{\mu}^2}{16\pi^2} \frac{10}{3} \simeq +388.70(0) \times 10^{-11}, \quad (56)$$

$$(b) a_{\mu}^{(2)EW}(Z) = \frac{\sqrt{2}G_{\mu}m_{\mu}^2}{16\pi^2} \frac{(-1 + 4s_w^2)^2 - 5}{3} \simeq -193.89(2) \times 10^{-11}, \quad (57)$$

$$(c) a_{\mu}^{(2)EW}(H) = \frac{\sqrt{2}G_{\mu}m_{\mu}^2}{4\pi^2} \int_0^1 dy \frac{(2-y)y^2}{y^2 + (1-y)(m_H/m_{\mu})^2} \quad (58)$$

$$= \frac{\sqrt{2}G_{\mu}m_{\mu}^2}{4\pi^2} \frac{m_{\mu}^2}{m_H^2} \ln \frac{m_H^2}{m_{\mu}^2} \simeq 4.69 \times 10^{-14}, \quad (59)$$

wobei $G_F = 1.16637 \times 10^{-5} GeV^{-2}$ die Fermi-Konstante, $m_{\mu} = 0.10568 GeV$ die Masse des Myon Teilchens [3], $m_H = 125.6 GeV$ die Masse des Higgs Teilchens [12] und $s_w = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}$ (M_W/M_Z : Masse W- und Z Boson). Da die Masse des Higgs-Teilchen mittlerweile bekannt ist, erhält man nun ein genaueres Ergebnis.

Bei diesen Berechnungen wurden die Terme der Ordnung $O(m_{\mu}^2/M_{W,Z}^2)$ vernachlässigt. Der aktuelle gesamte elektroschwache Beitrag beträgt $a_{\mu}^{EW} = (153,6 \pm 1,0) \times 10^{-11}$ [12].

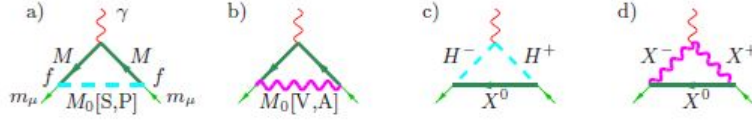


Abbildung 24: Mögliche neue Beiträge zu a_μ : Neutraler Bosonen-Austausch: a) Skalar/Pseudoskalar b) Vektor/Axialvektor, Neue geladene Bosonen: c) Skalar/Pseudoskalar d) Vektor/Axialvektor [3, Kap. 7.2]

5 Ausblick

Das anomale magnetische Moment des Myons ermöglicht den Wissenschaftlern über neue Theorien zu diskutieren. Es werden neue Theorien entwickelt die zum anomalen magnetischen Moment beitragen könnten und damit die Abweichung erklären würden. Eine dieser neuen Theorien wird in diesem Kapitel kurz dargestellt und diskutiert. [3, Kap. 7.2].

5.1 Generelle Beiträge über dem SM hinaus

Eine neue Theorie ist, dass geladene oder neutrale Skalare S, Pseudoskalare P, Vektoren V und Axialvektoren A beim Wechselwirken in one-loop Diagrammen beitragen (s. Abb. 24).

Die in Abb. 24 a) und b) zu sehenden Diagramme haben neutrale Bosonen als Austauschteilchen und würden wie folgt beitragen:

$$\Delta a_\mu^{NP} = \frac{f^2}{4\pi^2} \frac{m_\mu^2}{M_0^2} L$$

mit

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{Q(x)}{(1-x)(1-\lambda^2 x) + (\epsilon\lambda)^2 x},$$

wobei M_0 die Masse der neutralen Bosonen und f die Kopplungskraft. $Q(x)$ ist vom Austauschteilchen abhängig:

$$\begin{aligned} Q_S &= x^2(1 + \epsilon - x) \\ Q_P &= x^2(1 - \epsilon - x) \\ Q_V &= 2x(1-x)(x - 2(1-\epsilon)) + \lambda^2(1-\epsilon)^2 Q_S \\ Q_A &= 2x(1-x)(x - 2(1+\epsilon)) + \lambda^2(1+\epsilon)^2 Q_P \end{aligned}$$

mit $\epsilon = M/m_\mu$ und $\lambda = m_\mu/M_0$. Jedoch haben das Pseudoskalar und der Axialvektor falsche Vorzeichen. Der Vektor liefert einen zu kleinen Beitrag, daher würde nur der Axialvektor bei einer Masse zwischen 480 GeV und 690 GeV einen entscheidenden Beitrag leisten [3, Kap. 7.2.1]. In Abb. 24 c) und d) ist die zweite Möglichkeit abgebildet. Hierbei handelt es sich um geladene Skalare S, Pseudoskalare P, Vektoren V und Axialvektoren A. Durch diese geladenen Bosonen würde man folgende Beiträge erhalten:

$$\Delta a_\mu^{NP} = \frac{f^2}{4\pi^2} \frac{m_\mu^2}{M_0^2} L$$

mit

$$L = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \frac{Q(x)}{(\epsilon\lambda)^2(1-x)(1-\epsilon^{-2}x) + x},$$

wobei $Q(x)$ wieder von den Austauschteilchen abhängig ist:

$$\begin{aligned}Q_s &= -x(1-x)(x+\epsilon) \\Q_P &= -x(1-x)(x-\epsilon) \\Q_V &= 2x^2(1+x-2\epsilon) - \lambda^2(1-\epsilon)^2Q_s \\Q_A &= 2x^2(1+x-2\epsilon) - \lambda^2(1+\epsilon)^2Q_P\end{aligned}$$

Hierbei hätten das Skalar und der Vektor ein negatives Vorzeichen und die anderen Beiträge wären nicht groß genug, um einen bemerkenswerten Beitrag zu leisten.

6 Fazit

Am Anfang der Arbeit wurden einige theoretische Grundlagen und die experimentelle Bestimmung des anomalen magnetischen Moments des Myons aufgezeigt. Dabei war die Ward-Identität ein wichtiger Faktor, da mit ihr die Eichinvarianz der Vakuumpolarisation gezeigt wurde.

Im mittleren Teil hat man sich auf die Beiträge der QED konzentriert und die Einteilung der Diagramme in Gruppen. Es wurde deutlich, dass die größte Unsicherheit des anomalen magnetischen Moment durch die 10. Ordnung kommt, gefolgt von der Unsicherheit der 8. Ordnung. Dies liegt daran, dass diese Werte nicht mehr analytisch, sondern numerisch bestimmt wurden und dies die Genauigkeit des Wertes stark beschränkt.

Die Klassifizierung wurde zunächst theoretisch dargestellt und nachdem die Strukturierung verstanden wurde, wurde die Klassifizierung mit einem Programm reproduziert. Die Gruppeneinteilung wurde für jede Ordnung einzeln betrachtet. In der 1. Gruppe jeder Ordnung waren die Feynman-Diagramme ohne Vakuumpolarisation. Des Weiteren wurden die Diagramme nach der Anzahl der Vertices am reinen Vertexdiagramm eingeteilt. Zusätzlich wurden die LbL-Diagramme in eine gesonderte Gruppe eingeteilt.

Im 4. Kapitel wurden die hadronischen und elektroschwachen Beiträge betrachtet. Mit der Entdeckung des Higgs-Teilchen war es nun möglich einen genaueren Wert für den elektroschwachen Beitrag zu berechnen. Jedoch ist der elektroschwache Beitrag klein und daher hat dies keine großen Auswirkungen auf das gesamte anomale magnetische Moment.

Zum Schluß ging es um neue Theorien, mit denen man die Unsicherheit erklären könnte. Jedoch hat man gesehen, dass die Theorie noch nicht ausgereift ist und es noch Schwierigkeiten gibt.

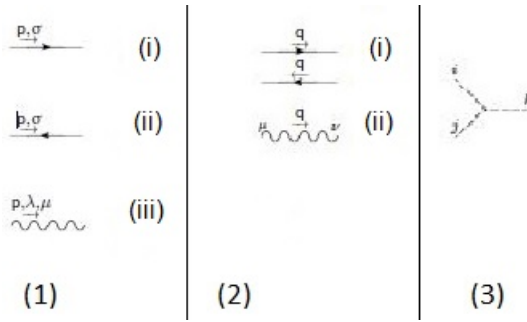


Abbildung 25: Feynman-Regeln vgl.[4]

A Feynman-Regeln der QED

Das folgende Regelwerk wird für die Berechnung der Amplituden von gegebenen quantenfeldtheoretischen Prozessen gebraucht (s. Abb. 26) [4, Kap. VIII]:

(1) Externe Linien:

- (i) Spin-1/2-Teilchen: $\frac{\text{einlaufendes Teilchen } u(p, \sigma)}{\text{auslaufendes Teilchen } \bar{u}(p, \sigma)}$
- (ii) Spin-1/2-Antiteilchen: $\frac{\text{einlaufendes Antiteilchen } \bar{v}(p, \sigma);}{\text{auslaufendes Antiteilchen } v(p, \sigma)}$
- (iii) Spin-1-Teilchen: $\epsilon_{(\lambda)}^{\mu}(p)$

(2) Interne Linien:

- (i) Spin-1/2-Teilchen und Spin-1/2-Antiteilchen: $\frac{i(\not{q}+mc)}{q^2-m^2c^2}$
- (ii) Spin-1-Teilchen $\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{q^2-m^2c^2}$

(3) 3-Teilchen-Vertex: ig_{ijk}

(4) **Energie-Impuls-Erhaltung:** Erhaltung des Viererimpulses an jedem Vertex.

(5) **Integration über die Viererimpulse der internen Linien:** Für jedem internen Viererimpuls q , der in Schritt (5) nicht bestimmt wurde, über $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ integrieren.

(6) **1. Antisymmetrisierung:** Für jede geschlossene Fermionen-Schleife mit (-1) multiplizieren und die Spur über die entsprechenden Gamma-Matrizen soll gebildet werden.

(7) **Gesamtphase:** Zum Schluss das Ergebnis mit i multiplizieren. Damit hat man die Teilamplitude. Alle Teilamplituden werden aufsummiert, um die Gesamtamplitude zu erhalten.

(8) **2. Antisymmetrisierung:** Diagramme, die sich nur durch den Austausch von externen Fermionen unterscheiden werden subtrahiert.

B Programm zur Klassifizierung der Diagramme

Mit dem folgenden Programm kann man Diagramme der QED bis zur 10.Ordnung klassifizieren:

```
##-
off s;
*-----*

#define in "data/diags.3pt.a'loop'.A"
#define out "data/diags.3pt.a'loop'.AA"
cf tag prop vrtx gl gh hg qu uq sc ge el po ph;
auto v k p;
auto s s Gruppe;
.sort
*-----*

#message read 'in'
#include 'in' # diag0
#message found 'maxDiag' diags
.sort

#message write into 'out'
format nospaces;
#write <'out'> "**\n** file generated by amm.AA.frm\n**"
*-----*

#ifndef 'min'
#define min "1"
#endif
#ifndef 'max'
#define max "'maxDiag'"
#endif
#do diagram='min','max'
*-----*
L [diag 'diagram'] = 0
#include 'in' # diag 'diagram';
argument;
id ph?{el ,po ,ph}(s1?,k1?)=ph(s1);
endargument;
b prop vrtx;
.sort
collect tag;
id tag(?a)=1;

id prop(po?(s1?),el?(s2?))=el(s1,s2);
al vrtx(el(s1?),ph(s2?),po(s3?))=el(s1,s2,s3);
repeat id el(s1?,s2?,s3?)*el(s4?,s5?,s6?)*ph(s2?,s5?)=
el(s1,s2,s3)*el(s4,s2,s6);
repeat id el(?a,s1?)*el(s1?,s2?)*el(s2?,?b)=el(?a,?b);
id el(s1?,?a,s2?)*el(s2?,s1?)=po(?a);

id po(?a)=po(?a,nargs_(?a));
id po(?a,s1?odd_)=0;
```

```

id po(? a, s1?even_)=po(? a);

#if ('loop'=4);
if(count (po,1)=0) multiply Gruppe1;
id el(? a)=el(? a, nargs_(? a));
id el(? a,5)=el(? a)*Gruppe2;
id el(? a,7)=el(? a)*Gruppe3;
id el(? a,9)=el(? a)*Gruppe4;
id el(? a,11)=el(? a)*Gruppe5;
id po(? a, -4,?b)=po(? a, -4,?b)*GruppeG;
if (count (po,1)=1);
id Gruppe3*el(? a, s1?,?b, s1?,?c)=Gruppe3*el(? a, s1,?b, s1,?c);
al Gruppe3*el(? a)=el(? a)*GruppeG;
endif;
id Gruppe2*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe3*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe4*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe5*Gruppe1=Gruppe1;
id GruppeG*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe2*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe3*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe4*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe5*GruppeG=GruppeG;
id GruppeG*GruppeG=GruppeG;
#endif;
if(count (po,1)=0) multiply Gruppe1;
id el(? a)=el(? a, nargs_(? a));
id el(? a,5)=el(? a)*Gruppe2;
id el(? a,7)=el(? a)*Gruppe3;
id el(? a,9)=el(? a)*Gruppe4;
id el(? a,11)=el(? a)*Gruppe5;
id po(? a, -4,?b)=po(? a, -4,?b)*GruppeG;
id Gruppe2*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe3*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe4*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe5*Gruppe1=Gruppe1;
id GruppeG*Gruppe1=Gruppe1;
id Gruppe2*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe3*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe4*GruppeG=GruppeG;
id Gruppe5*GruppeG=GruppeG;
id GruppeG*GruppeG=GruppeG;

print+s;
.sort

#message write out
#$catchZero=0;
$catchZero=$catchZero+1;
.sort
format nospaces;
#write <'out'> "*--#[ diag 'diagram' : \n*"

```

```

#if ( '$catchZero'==0)
#write <'out'> " +%E",[diag 'diagram ' ]
#else
#write <'out'> " %E",[diag 'diagram ' ]
#endif
#write <'out'> "*\n*--#] diag 'diagram' : "
drop;
.sort
*-----*
#enddo * diagram
*-----*

#write <'out'> "*--#] diag :\n*\n ;\n*\n*--#] diag : "
#write <'out'> "*--#] diag0 :\n*\n#define \
maxDiag \" 'maxDiag' \"\n*\n*--#] diag0 : "
#write <'out'> "** end"
#message wrote 'out '
.end

```

C 3 Loop Gruppeneinteilung

Gruppe 1:

```

el (-1,3,5,17,-4,3,17,5,-2)*Gruppe1
el (-1,5,17,3,-4,17,5,3,-2)*Gruppe1
el (-1,5,17,9,-4,5,17,9,-2)*Gruppe1
el (-1,7,13,-4,9,7,13,9,-2)*Gruppe1
el (-1,5,15,11,5,-4,15,11,-2)*Gruppe1
el (-1,1,15,-4,15,7,1,7,-2)*Gruppe1
el (-1,7,1,7,15,-4,15,1,-2)*Gruppe1
el (-1,5,17,5,-4,9,17,9,-2)*Gruppe1
el (-1,3,5,3,-4,17,17,5,-2)*Gruppe1
el (-1,5,17,17,-4,3,5,3,-2)*Gruppe1
el (-1,3,5,17,3,-4,17,5,-2)*Gruppe1
el (-1,1,15,-4,7,15,1,7,-2)*Gruppe1
el (-1,3,5,-4,17,3,17,5,-2)*Gruppe1
el (-1,1,15,7,15,-4,1,7,-2)*Gruppe1
el (-1,3,5,17,-4,17,3,5,-2)*Gruppe1
el (-1,3,13,-4,3,11,13,11,-2)*Gruppe1
el (-1,11,13,11,3,-4,13,3,-2)*Gruppe1
el (-1,3,5,-4,17,17,3,5,-2)*Gruppe1
el (-1,1,7,17,17,-4,1,7,-2)*Gruppe1
el (-1,3,9,-4,3,17,17,9,-2)*Gruppe1
el (-1,9,17,17,3,-4,9,3,-2)*Gruppe1
el (-1,1,11,17,-4,11,17,1,-2)*Gruppe1
el (-1,3,-4,15,9,3,15,9,-2)*Gruppe1
el (-1,9,15,3,9,15,-4,3,-2)*Gruppe1
el (-1,1,13,13,-4,17,17,1,-2)*Gruppe1
el (-1,1,11,17,-4,17,11,1,-2)*Gruppe1
el (-1,3,-4,15,3,7,15,7,-2)*Gruppe1

```

el (-1,7,15,7,3,15,-4,3,-2)*Gruppel
 el (-1,1,11,-4,13,11,13,1,-2)*Gruppel
 el (-1,3,-4,15,9,15,3,9,-2)*Gruppel
 el (-1,1,13,11,13,-4,11,1,-2)*Gruppel
 el (-1,9,3,15,9,15,-4,3,-2)*Gruppel
 el (-1,5,-4,7,17,5,17,7,-2)*Gruppel
 el (-1,7,17,5,17,7,-4,5,-2)*Gruppel
 el (-1,1,11,-4,11,15,15,1,-2)*Gruppel
 el (-1,3,-4,15,15,9,3,9,-2)*Gruppel
 el (-1,1,15,15,11,-4,11,1,-2)*Gruppel
 el (-1,9,3,9,15,15,-4,3,-2)*Gruppel
 el (-1,1,11,-4,17,17,11,1,-2)*Gruppel
 el (-1,1,11,17,17,-4,11,1,-2)*Gruppel
 el (-1,5,-4,7,5,17,17,7,-2)*Gruppel
 el (-1,7,17,17,5,7,-4,5,-2)*Gruppel
 el (-1,3,-4,9,17,17,3,9,-2)*Gruppel
 el (-1,9,3,17,17,9,-4,3,-2)*Gruppel
 el (-1,1,-4,13,11,13,11,1,-2)*Gruppel
 el (-1,1,11,13,11,13,-4,1,-2)*Gruppel
 el (-1,1,-4,15,15,11,11,1,-2)*Gruppel
 el (-1,1,11,11,15,15,-4,1,-2)*Gruppel
 el (-1,1,-4,9,17,17,9,1,-2)*Gruppel
 el (-1,1,9,17,17,9,-4,1,-2)*Gruppel

Gruppe 2:

el (-1,5,-4,7,-2)*po(17,7,17,5)*Gruppe2
 el (-1,5,-4,7,-2)*po(17,5)*po(17,7)*Gruppe2
 el (-1,5,-4,7,-2)*po(7,17,17,5)*Gruppe2
 el (-1,5,-4,7,-2)*po(5,17,17,7)*Gruppe2

Gruppe 3:

el (-1,7,13,-4,13,11,-2)*po(11,7)*Gruppe3
 el (-1,1,13,-4,1,11,-2)*po(13,11)*Gruppe3
 el (-1,11,1,-4,13,1,-2)*po(13,11)*Gruppe3
 el (-1,3,-4,17,17,7,-2)*po(7,3)*Gruppe3
 el (-1,7,17,17,-4,3,-2)*po(7,3)*Gruppe3
 el (-1,5,-4,7,17,7,-2)*po(17,5)*Gruppe3
 el (-1,7,17,7,-4,5,-2)*po(17,5)*Gruppe3
 el (-1,3,-4,13,3,9,-2)*po(13,9)*Gruppe3
 el (-1,9,3,13,-4,3,-2)*po(13,9)*Gruppe3
 el (-1,1,11,-4,13,1,-2)*po(13,11)*Gruppe3
 el (-1,1,-4,13,11,1,-2)*po(13,11)*Gruppe3
 el (-1,1,11,13,-4,1,-2)*po(13,11)*Gruppe3

Gruppe G=Gruppe 4:

el (-1,3,13,7,-2)*po(3,7,13,-4)*GruppeG
 el (-1,3,13,7,-2)*po(-4,13,7,3)*GruppeG
 el (-1,7,13,3,-2)*po(3,7,13,-4)*GruppeG
 el (-1,7,13,3,-2)*po(-4,13,7,3)*GruppeG
 el (-1,3,13,7,-2)*po(3,13,7,-4)*GruppeG
 el (-1,3,13,7,-2)*po(-4,7,13,3)*GruppeG

Literatur

- [1] K. Melnikov, A.Vainshtein, Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment (2006).
- [2] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, An Introduction to Quantum Field Theory (1995).
- [3] F. Jegerlehner, A. Nyffeler, Phys. Rept. 477 (2009) 1-110.
- [4] N. Borghini, Vorlesungsskript Grundlagen der Elementarteilchenphysik, Universität Bielefeld, WS 12/13,
<http://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/Teaching/Teilchenphysik/Teilchen.pdf>.
- [5] G.Köpp, F.Krüger, Einführung in die Quanten-Elektrodynamik (1997).
- [6] T.Kinoshita, M.Nio, Phys.Rev. D73 (2006) 013003 [arXiv:hep-ph/0507249].
- [7] T.Kinoshita, M.Nio, Phys.Rev. D73 (2006) 053007 [arXiv:hep-ph/0512330].
- [8] T.Kinoshita, M.Nio, Phys.Rev.Lett. 109 (2012) 111807 [arXiv:1205.5368 [hep-ph]].
- [9] P. Nogueira, J. Comput. Phys. 105 (1993) 279.
- [10] J. A. M. Vermaseren, arXiv:math-ph/0010025.
- [11] W.H. Furry. Phys. Rev 51 (1937) 125.
- [12] C. Gnendiger, D. Stöckinger and H. Stöckinger-Kim, arXiv:1306.5546 [hep-ph].

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, den 25.07.2013

Danksagung

Hiermit bedanke ich mich besonders bei meinem Betreuer Prof. Dr. York Schröder. Er war immer zu erreichen und hat immer meine Fragen beantwortet.

Ich möchte mich auch bei Johanna Albrecht und Mandy Wygas bedanken, da durch die Beiden das Studium um einiges angenehmer war. Zum Schluss möchte ich meiner Familie danken, da sie mich immer unterstützt haben.