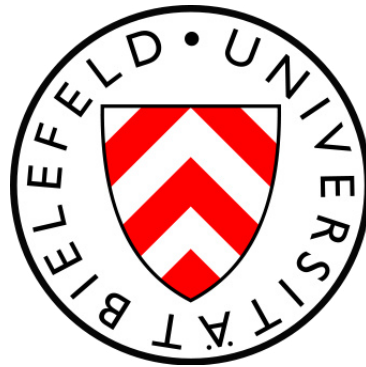


Bachelor-Arbeit

Raumzeit-Dimensionalität in bosonischer Stringtheorie

vorgelegt von
Sebastian Dierks

im
September 2013



Fakultät für Physik, Universität Bielefeld

Erster Gutachter: Prof. Dr. York Schröder

Zweiter Gutachter: MSc Marc Sangel

Inhaltsverzeichnis

Abstract	1
1 Einleitung	2
1.1 Einführung in die Stringtheorie	2
1.1.1 Vereinigung als Grundidee	2
1.1.2 Stringtheorie anschaulich	3
1.1.3 Verifizierung und Falsifizierbarkeit	5
1.2 Zielsetzung	5
2 Konventionen und Definitionen	6
2.1 Spezielle Relativitätstheorie	6
2.2 Das Lichtkegel-Koordinatensystem	7
2.2.1 Lichtkegel-Koordinaten	7
2.2.2 Lichtkegel-Energie und -Impuls	9
2.2.3 Kovariante Gleichungen und Tensoren höherer Stufe	9
3 Beschreibung klassischer, nicht-relativistischer Strings	10
4 Beschreibung klassischer, relativistischer Strings	14
4.1 Vorüberlegung: Das klassische, relativistische Punktteilchen	14
4.2 Herleitung der Nambu-Goto-Wirkung	17
4.2.1 Vorüberlegung: Raumartige Flächen	17
4.2.2 Raumzeit-artige Flächen	20
4.2.3 Nambu-Goto-Wirkung	23
4.3 Bewegungsgleichungen und Randbedingungen	25
5 Erhaltungsgrößen des klassischen, relativistischen Strings	27
5.1 Symmetrien und Erhaltungsgrößen	28
5.1.1 Vorüberlegung: Lagrange-Funktionen	29
5.1.2 Lagrange-Dichten	30
5.2 Invarianz unter Raumzeit-Translationen	32
5.3 Invarianz unter Lorentz-Transformationen	34
6 Klassische, relativistische Strings in Lichtkegel-Eichung	36
6.1 Parametrisierung der Weltfläche	38
6.1.1 τ -Parametrisierung	38
6.1.2 σ -Parametrisierung	41
6.2 Wellengleichung und Zwangsbedingungen	42
6.3 Vollständige Lösung durch Fourier-Entwicklung und Lichtkegel-Eichung	43
6.4 Massenformel	50
7 Vorüberlegung: Quantisierung des relativistischen Punktteilchens in Lichtkegel-Eichung	50
7.1 Klassische Punktteilchen in Lichtkegel-Eichung	51
7.2 Schrödinger- und Heisenberg-Bild	53
7.3 Lichtkegel-Quantisierung	55
7.4 Lorentz-Algebra und -Generatoren	58

8	Quantisierung des relativistischen, offenen Strings in Lichtkegel-Eichung	64
8.1	Basis-Kommutatoren und Lichtkegel-Hamiltonoperator	64
8.2	Quantisierung der transversalen String-Koordinaten $X^I(\tau, \sigma)$	67
8.3	Quantisierung der Lichtkegel-String-Koordinaten $X^\pm(\tau, \sigma)$	73
8.4	Konstruktion des Lichtkegel-Lorentz-Generators \hat{M}^{-I}	78
8.5	Berechnung der Raumzeit-Dimensionalität	80
9	Zusammenfassung und Ausblick	86
	Anhang	i
	Quellenverzeichnis	iii

Abstract

Diese Arbeit umfasst eine ausführliche Einführung in die bosonische Stringtheorie auf Bachelor Niveau. Nach einer längeren Einleitung über die Motivation hinter einer Quantengravitationstheorie werden sukzessive die Theorien des klassischen nicht-relativistischen, des klassischen relativistischen und des quantenmechanischen relativistischen Strings konstruiert, jeweils als Analogieschluss begründet durch vorherige Analyse des einfacheren Punktteilchens. Die Lichtkegel-Eichung ermöglicht eine vollständige Lösung der Wellengleichung unter Berücksichtigung von Zwangs- und Randbedingungen. Der vollständige Satz an Operatoren, der zur Beschreibung quantenmechanischer, relativistischer, bosonischer, freier, offener Strings mit freien Randbedingungen und in Lichtkegel-Eichung benötigt wird, besteht aus einigen Null-Moden- und einer abzählbar unendlichen Menge an Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Zur Sicherstellung der Lorentz-Invarianz der betrachteten Theorie werden Lorentz-Generatoren konstruiert und überprüft, ob diese die Lorentz-Algebra erfüllen. Entgegen den Angaben der Literatur misslang es jedoch, durch explizite Rechnung diesen Nachweis zu erbringen.

1 Einleitung

1.1 Einführung in die Stringtheorie

Stringtheorie ist ein bislang experimentell nicht bestätigter Versuch theoretischer Physiker, eine sogenannte „Theory of Everything“ (ToE) zu konstruieren. In einer solchen wären alle vier fundamentalen Wechselwirkungen - Elektromagnetismus, starke und schwache Kernkraft sowie Gravitation - vereint; insbesondere müsste sie Einsteins klassische Theorie der Gravitation, die Allgemeine Relativitätstheorie, quantenfeldtheoretisch beschreiben können. Stringtheorie verwendet als fundamentale Einheiten eindimensionale Strings, wohingegen die Eichtheorien des Standardmodells nulldimensionale Punktteilchen benutzen.

1.1.1 Vereinigung als Grundidee¹

In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, welchen Platz die Stringtheorie in der Historie der Physik einnimmt. Diese ist geprägt von Ereignissen, bei denen zuvor nicht verknüpfte Phänomene oder Konzepte als zusammengehörig erkannt und daraufhin zusammengefasst, d.h. *vereinigt*, wurden.

Nachdem Ende des 18. Jahrhunderts elektrostatische und Anfang des 19. Jahrhunderts magnetostatische Erscheinungen separat voneinander entdeckt wurden, bemerkten die Physiker, dass elektrische Ströme Magnetfelder und sich zeitlich ändernde Magnetfelder elektrische Felder erzeugen. James Clerk Maxwell gelang 1865 mit der Veröffentlichung seiner nach ihm benannten Maxwell-Gleichungen die konsistente Beschreibung der Elektrodynamik und gleichzeitig die erste Vereinigung in der Physikgeschichte, die Vereinigung von Elektrizität und Magnetismus zum Elektromagnetismus. Diese war nicht nur durch die Zunahme mathematischer Eleganz motiviert, sondern sie war obligatorisch, da separate Theorien schlicht falsch wären.

Als nächstes erfuhr die Physik zwei fundamentale, konzeptionelle Veränderungen: Einerseits entwickelte Albert Einstein die Spezielle Relativitätstheorie (SRT), in der er das alte Newton'sche Konzept absoluter Zeit abschaffte und Raum und Zeit zur Raumzeit *vereinigte*. Andererseits entwickelten Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg u.a. die Quantenmechanik sowie Methoden, klassische Theorien in quantenmechanische umzuwandeln.

Das Ziel der Elementarteilchenphysik ist eine sowohl relativistische als auch quantenmechanische Beschreibung der oben genannten vier Wechselwirkungen bzw. Kräfte, d.h. eine Beschreibung innerhalb des neuen konzeptionellen Gerüsts. Die erste Wechselwirkung, Maxwells Elektromagnetismus, ist vollständig kompatibel mit Einsteins SRT und die Anwendung der entwickelten Quantisierungsmethoden führt zur sogenannten Quantenelektrodynamik (QED). Die elektromagnetische Kraft wirkt auf alle Teilchen, die eine elektrische Ladung tragen.

Die relativistische, quantenmechanische Theorie der zweiten Kraft, der starken Kernkraft, die die subnuklearen Teilchen, die Quarks, zusammenhält, heißt Quantenchromodynamik (QCD). Sie wirkt auf alle Teilchen, die eine sogenannte Farbladung (rot, grün oder blau) tragen. Sie ist viel stärker als die elektromagnetische Kraft, sodass isolierte Quarks nicht in der Natur vorkommen (Confinement).

Die korrekte Beschreibung der dritten Kraft, der schwachen Kernkraft, die bei allen Neutrino-Reaktionen wie z.B. dem radioaktiven β -Zerfall wirksam ist, erforderte erneut eine *Vereinigung*, nämlich der elektromagnetischen Kraft und der schwachen Kernkraft zur elektroschwachen Kraft. Genau wie die starke Kernkraft wird diese von einer besonderen Art der Quantenfeldtheorien, sogenannten Eichtheorien, beschrieben. In Eichtheorien vermitteln die mit

¹orientiert sich an [1, Kapitel 1.1]

den Eich-Quantenfeldern assoziierten Elementarteilchen, die Eichbosonen, die Kräfte. In der QCD sind dies die acht masselosen Gluonen, die genau wie die Quarks eine Farbladung tragen und dem Confinement unterliegen. In dem die elektroschwache Kraft beschreibenden Weinberg-Salam-Modell gibt es vier masselose Kraftteilchen, von denen drei in einem vom Higgs-Teilchen hervorgerufenen Prozess spontaner Symmetriebrechung Masse erlangen. Dies sind die Kraftteilchen der schwachen Kernkraft, nämlich das W^+ -, das W^- - und das Z^0 -Boson. Das vierte, masselose Kraftteilchen ist das Photon, das die elektromagnetische Kraft vermittelt.

Die vierte Kraft, die Gravitation, wird klassisch durch Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie (ART) beschrieben. Ihre Quantisierung führt zu einer inkonsistenten Theorie, weshalb bislang kein gültiges Modell der Quantengravitation existiert.

Das Standardmodell der Teilchenphysik, das alle aktuellen Kenntnisse zusammenfasst, besteht also einerseits aus den beiden Eichtheorien für die starke und die elektroschwache Wechselwirkung, und andererseits aus den von diesen beschriebenen Elementarteilchen. Die fermionischen Materieteilchen gibt es in drei Generationen; sie unterteilen sich in sechs Quarks - up, down, charm, strange, top, bottom/beauty - und sechs Leptonen - Elektron, Myon, Tau und die zugehörigen Neutrinos. Zu jedem Teilchen gibt es ein zugehöriges Antiteilchen. Die bosonischen Kraftteilchen sind das Photon, die W^\pm -Bosonen, das Z^0 -Boson und die acht Gluonen.

Die Leiter der Vereinigung weiter hinaufkletternd, wäre eine mögliche Erweiterung des Standardmodells, die starke und die elektroschwache Wechselwirkung in einer „Grand Unified Theory“ (GUT) zu einer „elektronuklearen“ Kraft zu vereinigen. Aktuelle Daten werden durch getrennte Theorien sehr gut beschrieben, sodass eine solche Vereinigung momentan nur optional erscheint. Nicht optional allerdings ist die Entwicklung eines Modells für die Quantengravitation (separat oder vereinigt mit den anderen Kräften), da eine vollständige physikalische Theorie, eine „Theory of Everything“ (ToE), alle Wechselwirkungen quantenphysikalisch beschreiben muss. Außerdem wird eine solche Theorie zur Beschreibung des frühen Universums² benötigt. Stringtheorie ist der Versuch theoretischer Physiker, eine Theorie der Quantengravitation zu entwickeln.

1.1.2 Stringtheorie anschaulich³

Stringtheorie ist zunächst nur die quantenmechanische Beschreibung relativistischer, eindimensionaler Objekte, die Strings genannt werden. Genau wie bei einer Gitarrensaite, deren verschiedene Schwingungszustände verschiedene Töne erzeugen, besitzen die verschiedenen quantenmechanischen Zustände der Strings z.B. verschiedene Massen, sodass jeder Schwingungszustand einem anderen Elementarteilchen zugeordnet werden kann. Es gibt Stringtheorien, die entweder nur geschlossene oder geschlossene und offene Strings beschreiben, da offene Strings sich immer schließen können. Gravitonen, die Kräftevermittler der gravitativen Wechselwirkung, stellen einen Spin-2-Freiheitsgrad *geschlossener* Strings dar und sind deshalb automatisch in jeder Stringtheorie vorhanden: Stringtheorien liefern somit automatisch eine Theorie der Quantengravitation, obwohl eigentlich nur relativistische „Fäden“ quantenmechanisch beschrieben werden! Weiterhin findet man im Zustandsspektrum offener Strings die Eichbosonen der anderen Wechselwirkungen wieder; da alle Kraftteilchen aus demselben elementaren Objekt, dem String, hervorgehen, sind in der Stringtheorie alle Wechselwirkungen vereint. Ruft man sich in Erinnerung, dass wegen der Probleme bei der Quantisierung der ART eine reine Theorie der Quantengravitation inkonsistent scheint, kann man vermu-

²Urknall, Inflationsphase

³orientiert sich an [1, Kapitel 1.1, 1.2, 1.3]

ten, dass die Vereinigung aller Wechselwirkungen obligatorisch ist, um Gravitation konsistent quantenmechanisch beschreiben zu können - ähnlich wie schon beim Elektromagnetismus und der schwachen Wechselwirkung.

Auch die Materieteilchen des Standardmodells gehen aus den verschiedenen Vibrationsmöglichkeiten des elementaren Strings hervor, weswegen in der Stringtheorie sogar Materie und Kräfte vereint sind. An dieser Stelle muss allerdings auf die Einteilung in bosonische und Superstringtheorien eingegangen werden: Die Spektren „normaler“ Stringtheorien enthalten nur bosonische Zustände und werden daher bosonische Stringtheorien genannt. In sogenannten Superstringtheorien existieren auch fermionische Zustände. Das Präfix „Super-“ bezieht sich auf die „Zutat“ Supersymmetrie (SUSY): in supersymmetrischen Theorien existieren bosonische und fermionische Zustände gleicher Masse. Da diese nicht in der Natur vorkommen, müsste die Supersymmetrie, falls existent, in der Natur spontan gebrochen sein. Bosonische Stringtheorien sind einfacher und werden häufig als „toy model“ verwendet. In Ermangelung an fermionischen Zuständen, d.h. den Materieteilchen des Standardmodells, sind sie aber nicht realistisch.

Stringtheorien sind nur in einer kritischen Raumzeit-Dimensionalität Lorentz-invariant, was eine fundamentale Eigenschaft moderner Theorien sein sollte - Stringtheorie sagt somit die Raumzeit-Dimension D voraus. Es ergeben sich $D = 26$ für bosonische und $D = 10$ für Superstringtheorien. Da wir in der Natur nur vier Raumzeit-Dimensionen beobachten, stellt sich die Frage nach dem Verbleib der sechs raumartigen Extradimensionen (im Fall der realistischen Superstringtheorien). Dies lässt sich am besten anhand eines niedriger-dimensionalen Vergleichs verstehen: Während man einen weit entfernten Strohhalm als eindimensionales Objekt mit Ausdehnung „Länge“ wahrnimmt, nimmt eine Ameise, die auf dem Strohhalm herum klettert, die Oberfläche als zweidimensional wahr, eine im Inneren fliegende Fruchtfliege kann sich sogar entlang drei Raum-Dimensionen bewegen. Die Ameise sieht eine ausge dehnte, große Dimension, die in der Analogie unseren vier Raumzeit-Dimensionen entspricht, und eine aufgerollte, kleine Dimension, die den sechs Extradimensionen entspricht. Die Weise der Kompaktifizierung der Extradimensionen ist dabei sogar physikalisch: Jede Möglichkeit entspricht einem Universum mit einem bestimmten Satz von Naturkonstanten. Es existieren $\sim 10^{500}$ Möglichkeiten; die Menge der zugehörigen Universen, oder *string models*, wird als „landscape“ der Stringtheorie bezeichnet. Die Vorstellung, dass jeder Satz an Naturkonstanten in einem anderen Universum realisiert ist, führt zu Konzepten wie dem „Multiversum“.⁴

Während sich geschlossene Strings, insbesondere Gravitonen, frei im hochdimensionalen Raum bewegen können, haften die beiden Enden offener Strings an sogenannten Dp -Branes, die man sich wie Membranen im hochdimensionalen Raum vorstellen kann (D steht für Dirichlet, p gibt die Raum-Dimension der Membran an). Unser Universum stellt dann eine $D3$ -Brane dar, an der alle Materie- und Kraftteilchen außer den Gravitonen haften. Dies könnte erklären, weswegen wir die Gravitation als so schwach wahrnehmen: Im hochdimensionalen Raum könnten alle Kräfte ungefähr gleich stark sein, aber während sich die Kraftteilchen des Elektromagnetismus und der Kernkräfte nur in vier Dimensionen bewegen, „verdünnen“ sich die Gravitonen in zehn Dimensionen, sodass in unserem vierdimensionalen Schnitt nur wenige Gravitonen übrigbleiben.

⁴Die 10^{500} Möglichkeiten können durch sogenannte Fluss-Kompaktifizierung gewonnen werden und führen zu string models mit diskreten (statt kontinuierlichen) Parametern; solche können zumindest prinzipiell das Standardmodell reproduzieren. Im Allgemeinen gibt es unendlich viele Möglichkeiten.

1.1.3 Verifizierung und Falsifizierbarkeit⁵

Der Stringtheorie wird häufig vorgeworfen, keine konkreten Tests anzubieten, anhand derer sie falsifiziert werden kann. Bislang wurden keine stringtheoretischen Vorhersagen experimentell bestätigt. Allerdings handelt es sich auch noch um eine unvollständige, nur teilweise verstandene Theorie, der die fundamentalen Grundgleichungen („Weltformel“), etwa die Einstein-Gleichungen in der ART, fehlen. Daher konnten bisher nur wenige testbare Vorhersagen gemacht werden.

Die Anerkennung der Stringtheorie als korrektes Modell der Natur sollte drei Punkte umfassen: Erstens muss die Stringtheorie die bisherige Physik als Niedrig-Energie-Grenzwert enthalten. Was die Teilchenphysik betrifft, ist es bislang noch nicht gelungen, den Teilcheninhalt des Standardmodells exakt zu reproduzieren. Allerdings konnte die von Stephen Hawking und Jacob Bekenstein gefundene (und als gültig anerkannte) Formel für die Entropie schwarzer Löcher auch im Rahmen der Stringtheorie hergeleitet werden. Zweitens kommt die Stringtheorie konzeptionell nicht ohne Extradimensionen und Supersymmetrie aus. Ein Nachweis von supersymmetrischen Teilchen oder Extradimensionen an Teilchenbeschleunigern wäre ein guter Hinweis, dass Stringtheorie zumindest auf dem richtigen Weg ist. Drittens sollten zukünftig mit fortschreitendem Verständnis mehr prüfbare Vorhersagen entwickelt werden. Da Quantengravitationsversuche mit heutiger Technik schwer zu realisieren sind, bieten sich auch Experimente an, die die anderen Wechselwirkungen umfassen, da Stringtheorie eine Theorie aller Kräfte ist. Momentan wird in Gravitationslinsen- und -wellenexperimenten nach sogenannten kosmischen Strings gesucht, die im frühen Universum entstanden sein und sich auf kosmologische Größe ausgedehnt haben könnten. Bislang schlug ihr Nachweis jedoch fehl.

1.2 Zielsetzung

Wie zu Beginn von Abschnitt 1.1.2 erklärt, ist Stringtheorie zunächst nur die quantenmechanische Beschreibung relativistischer „Fäden“. Dies führt zu einer hierarchischen Struktur dieser Arbeit: Ich beginne in Kapitel 3 damit, den klassischen, nicht-relativistischen String zu beschreiben, bevor sukzessive die weiteren benötigten Attribute „relativistisch“ in Kapitel 4 und 6 sowie „quantenmechanisch“ in Kapitel 8 hinzukommen. Um hierfür einige Erfahrung und Intuition zu erlangen, wird jeweils davor der entsprechende Schritt am einfacheren Punktteilchen durchgeführt, gekennzeichnet durch die Kapitelüberschriften „Vorüberlegung“, vgl. Kapitel 4.1 und 7. Die relativistische Beschreibung des klassischen Strings wird von Kapitel 5 unterbrochen, in dem Erhaltungsgrößen thematisiert werden, denn die dort entwickelten Inhalte werden für das weitere Vorgehen benötigt.

Der Wechsel von einem Inertialsystem in ein anderes, der im relativistischen Regime durch eine Lorentz-Transformation vollzogen wird, sollte die Beschreibung der Physik nicht verändern. Die Invarianz unter Lorentz-Transformationen sollte, wie in jeder modernen, physikalischen Theorie, daher auch in der Stringtheorie erfüllt sein. Tatsächlich lassen sich Konsistenzgleichungen finden, die zeigen, dass bosonische Stringtheorien nur in 26 und Superstringtheorien nur in 10 Raumzeit-Dimensionen Lorentz-invariant sind. Ziel dieser Bachelor-Arbeit ist die Herleitung der entsprechenden Konsistenzgleichung für bosonische Stringtheorien, s. Kapitel 8.5.

Diese Bachelor-Arbeit orientiert sich maßgeblich an [1]. Ich bitte um Verständnis, dass nur Themenkomplexe entwickelt werden, die die Leserin zum Verständnis der abschließenden Rechnung benötigt, selbst wenn dadurch wichtige oder sich an bestimmten Stellen günstig

⁵orientiert sich an [1, Kapitel 1.3, 1.4]

anschließende Inhalte unberücksichtigt bleiben. Andernfalls wäre eine kompakte und zielgerichtete Darstellung nicht möglich.

2 Konventionen und Definitionen

Bevor ich mit dem klassischen, nicht-relativistischen String beginne, müssen noch einige Konventionen der SRT getroffen werden, die die Metrik und das Linienelement betreffen. Außerdem soll das sogenannte Lichtkegel-Koordinatensystem eingeführt werden, von dem später viel Gebrauch gemacht werden wird.

2.1 Spezielle Relativitätstheorie⁶

In dieser Arbeit soll mit dem symmetrischen, metrischen Tensor der Signatur

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1) = \eta_{\nu\mu} \quad (2.1)$$

gearbeitet werden. Ist d die Anzahl der Raum-Dimensionen, enthält die Diagonale d mal die 1. Es wird $D = d + 1$ für die Raumzeit-Dimensionalität verwendet. Mit Hilfe des metrischen Tensors $\eta_{\mu\nu}$ und seinem Inversen

$$\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1) \quad (2.2)$$

können Lorentz-Indizes wie gewohnt hoch und runter geholt werden.

Der kontravariante D -Ortsvektor ist

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3, \dots) = (ct, x, y, z, \dots) = (ct, \vec{x}); \quad (2.3)$$

somit lautet der zugehörige kovariante Vektor

$$x_\mu = (x_0, x_1, \dots, x_d) = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-ct, \vec{x}). \quad (2.4)$$

Das unter Lorentz-Transformationen invariante Linienelement ist definiert durch

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dx_\mu dx^\mu = -c^2 dt^2 + d\vec{x}^2. \quad (2.5)$$

Wegen des Minus auf der linken Seite gilt für

$$\text{zeitartig getrennte Ereignisse : } ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{(ds)^2} > 0; \quad (2.6)$$

für lichtartige Intervalle gilt $ds^2 = 0$ und für raumartige Intervalle gilt $ds^2 < 0$. Im Ruhesystem eines Teilchens gilt $dx^i = 0$ (lateinische Buchstaben werden für räumliche Indizes verwendet), sodass bei physikalischer Bewegung⁷ für die Eigenzeit

$$d\tau = \frac{ds}{c} > 0 \quad (2.7)$$

gilt. Der Gradient-Operator ist durch

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.8)$$

⁶orientiert sich an [1, Kapitel 2.2, 2.4]

⁷d.h. keine zwei Punkte der Weltlinie sind licht- oder sogar raumartig getrennt, $ds > 0$

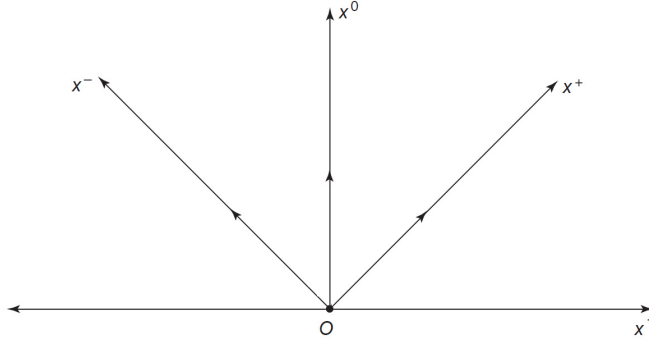


Abbildung 1: Visualisierung der Lichtkegel-Koordinatenachsen [1, S. 26, modifiziert]

definiert.

Der D -Impulsvektor lautet

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad (2.9)$$

und somit gilt

$$p^2 = p_\mu p^\mu = p \cdot p = -\frac{E^2}{c^2} + \vec{p}^2 = -m^2 c^2. \quad (2.10)$$

Der relativistische Lorentz-Faktor wird mit γ bezeichnet:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.11)$$

2.2 Das Lichtkegel-Koordinatensystem

Das Lichtkegel-Koordinatensystem wird ab Kapitel 6.3 verwendet werden. Die Quantisierung des relativistischen Strings wird in dieser Arbeit in diesen Koordinaten stattfinden; sie heißt Lichtkegel-Quantisierung. Eine alternative Quantisierung in normalen Koordinaten, kovariante Quantisierung genannt, ist zwar elegant, aber benötigt mehr Hintergrundwissen [1, S. 22]. Sie wird qualitativ nochmals in den Kapiteln 7.4 und 8.4 Erwähnung finden.

2.2.1 Lichtkegel-Koordinaten⁸

Der D -Ortsvektor in Lichtkegel-Koordinaten hat die Form

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^2, \dots, x^d) \quad (2.12)$$

mit den unabhängigen Linearkombinationen

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1), \\ x^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Da entlang der x^+ -Koordinatenachse per Definition alle anderen Koordinaten (insbesondere x^-) 0 sind, gilt dort $x^0 = x^1$, was gerade der Winkelhalbierenden im rechten Quadranten

⁸orientiert sich an [1, Kapitel 2.3]

von Abb. 1 entspricht; Analoges gilt für die x^- -Koordinatenachse. Da die neuen Koordinatenachsen im alten Koordinatensystem dem Lichtkegel entlang der x^1 -Achse entsprechen, spricht man von Lichtkegel-Koordinaten. Die $D - 2$ Koordinaten x^I , $I = 2, \dots, d$, werden als transversal bezeichnet, x^+ heißt konventionsgemäß Lichtkegel-Zeit und x^- wird als räumliche Koordinate verstanden. Ein Teilchen, das sich z.B. mit $\beta = \frac{v}{c}$ in x^1 -Richtung bewegt, hat daher wegen $x^1 = vt = \beta x^0$ die Lichtkegel-Geschwindigkeit

$$v_{LK} = \frac{x^-}{x^+} = \frac{x^0 - x^1}{x^0 + x^1} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}. \quad (2.14)$$

Licht, das sich in positive x^1 -Richtung bewegt ($\beta = 1$), ruht demnach in diesem Koordinatensystem; Licht, das sich in negative x^1 -Richtung bewegt ($\beta = -1$), hat eine unendliche hohe Lichtkegel-Geschwindigkeit. Da die Koordinaten-Transformation (2.13) keiner Lorentz-Transformation $(x^0, x^1, x^2, \dots, x^d) = (x^+, x^-, x^2, \dots, x^d)$ entspricht, ist dies kein Widerspruch zur SRT.

Die Definition (2.13) kann auf beliebige Vektoren erweitert werden. Dann gilt

$$\begin{aligned} -a^-b^+ - a^+b^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 - a^1)\frac{1}{\sqrt{2}}(b^0 + b^1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 + a^1)\frac{1}{\sqrt{2}}(b^0 - b^1) \\ &= -\frac{1}{2}(a^0b^0 + a^0b^1 - a^1b^0 - a^1b^1 + a^0b^0 - a^0b^1 + a^1b^0 - a^1b^1) \\ &= -a^0b^0 + a^1b^1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

und deswegen

$$\begin{aligned} a \cdot b &= -a^0b^0 + a^1b^1 + a^2b^2 + \dots = \eta_{\mu\nu}a^\mu b^\nu \\ &= -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + \dots \equiv \hat{\eta}_{\mu\nu}a^\mu b^\nu, \end{aligned} \quad (2.16)$$

wobei die letzte Summe über die

$$\text{Lichtkegel - Indizes } +, -, 2, \dots, d = +, -, I \quad (2.17)$$

läuft. Per Koeffizientenvergleich in der zweiten Zeile ergibt sich für die neu eingeführte Lichtkegel-Metrik (in vier Dimensionen)

$$\hat{\eta}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

wobei die Nebendiagonalelemente auffällig sind. Verwendet man in der Definition der Lichtkegel-Metrik die Lichtkegel-Metrik wie gewohnt zum Herunterholen von Indizes, so lassen sich kovariante Lichtkegel-Vektoren definieren:

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = a_+b^+ + a_-b^- + a_2b^2 + \dots \quad (2.19)$$

und durch Vergleich mit der zweiten Zeile von Gleichung (2.16) findet man

$$a_+ = -a^-, a_- = -a^+, a_I = a^I. \quad (2.20)$$

Das Lorentz-Quadrat eines D -Vektors ist

$$a^2 = -2a^+a^- + (a^I)^2 \quad (2.21)$$

mit $(a^I)^2 = a^I a^I = (a^2)^2 + (a^3)^2 + \dots + (a^d)^2$. Zuletzt ergibt sich mit Gleichung (2.18) das Linienelement in Lichtkegel-Koordinaten zu

$$-ds^2 = \hat{\eta}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -2dx^+ dx^- + d\vec{x}_I^2. \quad (2.22)$$

Die Eigenschaft dieses Linienelements, nach dx^+ oder dx^- auflösen zu können, ohne eine Wurzel ziehen zu müssen, ist der Hauptgrund für die Verwendung von Lichtkegel-Koordinaten in den Kapiteln 6.3 und 8.

2.2.2 Lichtkegel-Energie und -Impuls⁹

Die Lichtkegel-Komponenten des D -Impulsvektors lauten

$$\begin{aligned} p^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 + p^1) = -p_-, \\ p^- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(p^0 - p^1) = -p_+. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Wegen

$$p^0 = \frac{E}{c} = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 c^2} \geq |\vec{p}| \geq |p^1|, \quad (2.24)$$

ist $p^0 \pm p^1 \geq 0$ und daher $p^\pm \geq 0$. In der Ungleichung (2.24) gilt Gleichheit, falls das beschriebene Objekt masselos ist und sich ausschließlich in x^1 -Richtung bewegt; in diesem (seltenen) Fall besteht die Möglichkeit, dass $p^+ = 0$ wird. Da in der Lichtkegel-Beschreibung des relativistischen und des quantenmechanischen, relativistischen Strings durch p^+ geteilt werden wird, kann der Lichtkegel-Formalismus in diesem Fall nicht angewendet werden [1, S. 187]. Eine Rotation des Koordinatensystems sollte dieses Problem jedoch lösen.

Wegen $p^\pm \geq 0$, kommen beide Komponenten als Lichtkegel-Energie in Frage. Da Energie und Zeit zueinander konjugierte Größen sind und dies auch in Lichtkegel-Koordinaten gelten soll, wird wegen

$$p \cdot x = -Et + \vec{p} \cdot \vec{x} = -p^- x^+ - p^+ x^- + \vec{p}_I \cdot \vec{x}_I \stackrel{!}{=} -E_{LK} t_{LK} + \vec{p}_{LK} \cdot \vec{x}_{LK} \quad (2.25)$$

p^- als Lichtkegel-Energie interpretiert, weil p^- zusammen mit der Lichtkegel-Zeit x^+ auftritt. p^+ wird folglich als Impuls angesehen.

2.2.3 Kovariante Gleichungen und Tensoren höherer Stufe¹⁰

Gilt eine kovariante Gleichung $A^\mu = B^\mu$, $\mu = 0, 1, \dots, d$, wobei A^μ und B^μ für beliebig komplizierte Ausdrücke mit einem freien Lorentz-Index stehen können, so folgt wegen

$$\begin{aligned} A^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A^0 \pm A^1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^0 \pm B^1) = B^\pm \\ A^I &= A^i = B^i = B^I \end{aligned} \quad (2.26)$$

auch $A^\mu = B^\mu$, $\mu = +, -, I$.

Lichtkegel-Tensoren höherer Stufen werden wie folgt definiert: Allgemein kann ein Lorentz-Tensor n -ter Stufe geschrieben werden als $R^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n} = A_1^{\mu_1} A_2^{\mu_2} \dots A_n^{\mu_n}$, $\mu_i = 0, 1, \dots, d$. Die Komponenten des zugehörigen Lichtkegel-Tensors z.B. zweiter Stufe berechnen sich dann zu

⁹orientiert sich an [1, Kapitel 2.5]

¹⁰siehe [1, S. 213, Problem 10.3]

$(A_1 = A, A_2 = B)$

$$\begin{aligned}
 R^{++} = A^+ B^+ &= \frac{1}{2} (A^0 + A^1) (B^0 + B^1) \\
 &= \frac{1}{2} (A^0 B^0 + A^0 B^1 + A^1 B^0 + A^1 B^1) \\
 &= \frac{1}{2} (R^{00} + R^{01} + R^{10} + R^{11})
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

usw. Wie oben zeigt man für eine kovariante Gleichung $R^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 0, 1, \dots, d$ mittels

$$R^{++} = \frac{1}{2} (R^{00} + R^{01} + R^{10} + R^{11}) = \frac{1}{2} (S^{00} + S^{01} + S^{10} + S^{11}) = S^{++} \tag{2.28}$$

usw., dass die entsprechende Gleichung auch in Lichtkegel-Koordinaten $\mu, \nu = +, -, I$ gilt. Auch die Rückrichtung ist gültig:

$$R^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}, \mu, \nu = 0, 1, \dots, d \iff R^{\mu\nu} = S^{\mu\nu}, \mu, \nu = +, -, I \tag{2.29}$$

. Analoges gilt auch für Tensorgleichungen höherer Ordnung. Daher können in späteren Kapiteln die zunächst kovariant formulierten Gleichungen einfach in Lichtkegel-Koordinaten verwendet werden.

3 Beschreibung klassischer, nicht-relativistischer Strings¹¹

Ein klassischer, nicht-relativistischer, offener String, vorstellbar wie eine Gitarrensaite, befindet sich in der (x, y) -Ebene. In seiner Gleichgewichtskonfiguration ruhe er entlang der x -Achse, wobei seine beiden Endpunkte die Positionen $(0, 0)$ und $(a, 0)$ einnehmen. Schwingungen in x -Richtung werden als longitudinal, Schwingungen in y -Richtung als transversal bezeichnet. Da relativistische Strings nur transversal oszillieren können¹², werde ich mich beim nicht-relativistischen String auf die Beschreibung transversaler Schwingungen beschränken. Dies bedeutet, dass sich die x -Position eines jeden Stück Strings zeitlich nicht verändert.

Der String wird durch zwei Größen charakterisiert, erstens durch die String-Spannung T_0 , die die Einheit einer Kraft besitzt, und zweitens durch die Massen-Liniendichte μ_0 , die die Einheit $\frac{M}{L}$ besitzt. Die Gesamtmasse ergibt sich durch $M = \mu_0 a$. Das Verhältnis der Dimensionen von Spannung und Massendichte besitzt die Einheit einer quadrierten Geschwindigkeit:

$$\left[\frac{T_0}{\mu_0} \right] = \frac{\frac{ML}{T^2}}{\frac{M}{L}} = \frac{L^2}{T^2} = [v]^2. \tag{3.1}$$

Im Allgemeinen können die String-Spannung und die Massendichte räumlich und zeitlich variieren: $T_0 \rightarrow T(t, x)$, $\mu_0 \rightarrow \mu(t, x)$. Insbesondere bei der Beschreibung longitudinaler Schwingungen, bei denen Stauchungen und Zerrungen entlang des Strings auftreten, sind diese Ersetzungen unerlässlich.

Im Folgenden sollen mit Hilfe des Lagrange-Formalismus die Bewegungsgleichung hergeleitet und die möglichen Randbedingungen diskutiert werden: Wie in Abb. 2 zu sehen ist, besitzt ein infinitesimales Stück String, das sich an der Position x befindet, die Geschwindigkeit $\dot{y}(t, x)$; außerdem hat es die Masse $dm = \mu_0 dx$. Somit ergibt sich die kinetische Energie

¹¹orientiert sich an [1, Kapitel 4.1, 4.2, 4.4, 4.6]

¹²[1, S. 120]: „This suggests that longitudinal motion on the [relativistic] string is not physically meaningful.“

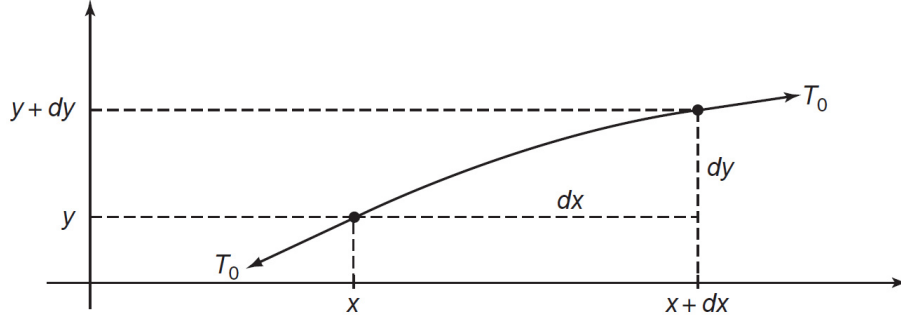


Abbildung 2: Ein infinitesimales Stück eines klassischen, nicht-relativistischen Strings, das transversal vibriert. Die verschiedenen Steigungen an den Endpunkten führen zu einer resultierenden Kraft in y -Richtung [1, S. 74].

des gesamten Strings T als Summe über die einzelnen kinetischen Energien:

$$T(t) = \int_0^a \frac{1}{2} (\mu_0 dx) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad (3.2)$$

Um das infinitesimale String-Stück gegen die Spannung T_0 um die Länge dl zu strecken, muss die potenzielle Energie $dV = T_0 dl$ aufgebracht werden. Da es in der Gleichgewichtsposition von $(x, 0)$ nach $(x + dx, 0)$ verläuft, es während der Vibration aber wie in Abb. 2 von (x, y) nach $(x + dx, y + dy)$ reicht, gilt

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx = dx \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \approx dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2, \quad (3.3)$$

wobei im letzten Schritt angenommen wurde, dass nur kleine Auslenkungen stattfinden:

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1. \quad (3.4)$$

Die gesamte potenzielle Energie errechnet sich damit zu

$$V(t) = \int T_0 dl = \int_0^a T_0 dx \frac{1}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2, \quad (3.5)$$

und mit Hilfe der Lagrange-Funktion $L = T - V$ ergibt sich die Wirkung für den nicht-relativistischen, klassischen String zu

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt L(t) = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{1}{2} \mu_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \equiv \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \mathcal{L} \left(\frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x} \right), \quad (3.6)$$

wobei \mathcal{L} als Lagrange-Dichte bezeichnet wird. Die Ableitungen von \mathcal{L} bezüglich ihrer Argu-

mente $\frac{\partial y}{\partial t} \equiv \dot{y}$ und $\frac{\partial y}{\partial x} \equiv y'$ werden bezeichnet als

$$\begin{aligned}\mathcal{P}^t &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \\ \mathcal{P}^x &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Um die Bewegungsgleichung für $y(t, x)$ zu finden, wird die Wirkung (3.6) variiert. Gemäß des Hamilton'schen Prinzips wird für den physikalischen „Pfad“ $y(t, x)$ die Wirkung unter beliebigen Variationen δy stationär, d.h. $\delta S \stackrel{!}{=} 0$. Die einzige Einschränkung hierfür ist, dass der Anfangs- und der Endzustand festgelegt sein sollen, weswegen

$$\delta y(t_*, x) = 0, \quad t_* \in \{t_i, t_f\}\tag{3.8}$$

für alle x gilt. Unter Verwendung der abstrakten Form der Wirkung (letzter Ausdruck in (3.6)) und der Regel

$$\delta \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial (\delta y)}{\partial \xi},\tag{3.9}$$

wobei ξ für eine beliebige Variable, insbesondere t oder x , stehen kann, ergibt sich mit den Definitionen (3.7)

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} \delta \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\mathcal{P}^t \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} + \mathcal{P}^x \frac{\partial (\delta y)}{\partial x} \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathcal{P}^t \delta y) - \frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} \delta y + \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{P}^x \delta y) - \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} \delta y \right] \\ &= \int_0^a dx [\mathcal{P}^t \delta y]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} dt [\mathcal{P}^x \delta y]_0^a - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left(\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} \right) \delta y.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Durch die beiden partiellen Integrationen wurden alle Ableitungen der Variation δy eliminiert. Damit die Variation δS verschwindet, müssen alle drei Terme separat null werden. Im dritten Term sind die Variationen $\delta y(t, x)$ für $t \in (t_i, t_f)$ und $x \in (0, a)$ beliebig, weswegen die vorstehende Klammer Vorfaktor verschwinden muss. Hieraus erhält man die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial \mathcal{P}^t}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}^x}{\partial x} = 0,\tag{3.11}$$

die sich mit den konkreten Ausdrücken in (3.7) zur Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_0}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\tag{3.12}$$

umschreiben lässt. Die Geschwindigkeit der Wellen, in Übereinstimmung mit der Dimensionsanalyse in (3.1), lässt sich direkt ablesen:

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}.\tag{3.13}$$

Der erste Term verschwindet auf Grund von Gleichung (3.8): Anfangs- und Endbedingun-

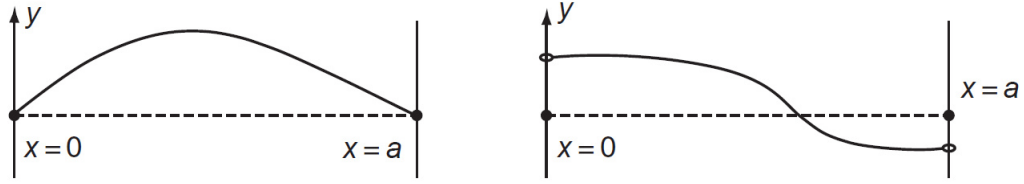


Abbildung 3: Links: String mit fixierten Endpunkten bzw. Dirichlet-Randbedingungen. Rechts: String mit freien Endpunkten bzw. Neumann-Randbedingungen [1, Seite 75].

gen legen den Wert von y für alle x zu den Zeitpunkten t_i und t_f fest, wodurch $\delta y(t_*, x) = 0$ gilt. Der zweite Term

$$\int_{t_i}^{t_f} dt [\mathcal{P}^x(t, a)\delta y(t, a) - \mathcal{P}^x(t, 0)\delta y(t, 0)] \quad (3.14)$$

enthält einen Summanden für jeden Endpunkt. Damit der gesamte Term verschwindet, muss für jeden Endpunkt $x_* \in \{0, a\}$ entweder eine

$$\text{Dirichlet - Randbedingung : } \delta y(t, x_*) = 0 \iff \frac{\partial y}{\partial t}(t, x_*) = 0 \quad (3.15)$$

oder eine

$$\text{Neumann - Randbedingung : } \mathcal{P}^x(t, x_*) = 0 \iff \frac{\partial y}{\partial x}(t, x_*) = 0 \quad (3.16)$$

erfüllt sein. Die obere Äquivalenz gilt, weil sich die Position eines raumfesten, fixierten Endpunkts zeitlich nicht ändert. Die untere Äquivalenz gilt auf Grund von Gleichung (3.7). Da die Endpunkte bei Neumann-Randbedingungen frei beweglich sind, werden sie auch „freie Randbedingungen“ genannt. Die physikalischen Situationen für Dirichlet- und Neumann-Randbedingungen sind in Abb. 3 visualisiert.

Zuletzt soll der Impuls des Strings betrachtet werden, der wegen der Vernachlässigung longitudinaler Schwingungen nur eine y -Komponente besitzt:

$$p_y(t) = \int_0^a (\mu_0 dx) \frac{\partial y}{\partial t} = \int_0^a dx \mathcal{P}^t, \quad (3.17)$$

wobei beim zweiten Gleichheitszeichen Gleichung (3.7) benutzt wurde. \mathcal{P}^t wird deswegen als Impulsdichte interpretiert. Da die Ableitung einer Lagrange-Funktion nach einer Geschwindigkeit der zugehörige generalisierte Impuls, und deswegen die Ableitung einer Lagrange-Dichte nach einer Geschwindigkeit die zugehörige generalisierte Impulsdichte, ist, überrascht dies nicht angesichts der Definition in (3.7). Mit Hilfe der Wellengleichung (3.12) ergibt sich

$$\frac{dp_y(t)}{dt} = \int_0^a dx \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \int_0^a dx T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T_0 \left[\frac{\partial y}{\partial x} \right]_0^a. \quad (3.18)$$

Der Gesamtimpuls ist daher nur im Fall von freien Randbedingungen erhalten, wie ein Vergleich mit Gleichung (3.16) zeigt. In der Stringtheorie können offene Strings mittels Dirichlet-Randbedingungen an den in der Einleitung erwähnten D-Branes anhaften. Der Gesamtimpuls von String *und* Brane ist dann erhalten.

4 Beschreibung klassischer, relativistischer Strings

In diesem und den nächsten beiden Kapiteln wird die Beschreibung sich relativistisch bewegnender Strings ausgearbeitet und mit dem nicht-relativistischen String des letzten Kapitels verglichen. Bevor in diesem Kapitel die Wirkung und die Bewegungsgleichungen für den String aufgestellt werden, werden die entsprechenden Überlegungen am einfacheren Punktteilchen durchgeführt.

4.1 Vorüberlegung: Das klassische, relativistische Punktteilchen¹³

Die Ausführungen dieses Abschnitts gelten für relativistische, freie Teilchen der Masse $m > 0$. „Frei“ bedeutet, dass sie keinem Potenzial unterliegen: $V = 0$. Alle späteren Ausführungen dieser Arbeit zu relativistischen und quantenmechanischen Strings werden sich ebenfalls auf freie Strings beziehen.

Gesucht ist eine Wirkung für freie, relativistische Punktteilchen. Da eine Wirkung keine Lorentz-Indizes besitzt, ist es sinnvoll zu fordern, dass sie ein Lorentz-Skalar sein soll. Dadurch ordnen alle denkbaren Lorentz-Beobachter einer hypothetischen Weltlinie denselben Wert für die Wirkung zu. Sie wird daher für jeden Lorentz-Beobachter für dieselbe, physikalische Weltlinie stationär. Alle Beobachter sind sich dann insbesondere darüber einig, dass die Bewegung physikalisch ist, sobald sie für einen der Beobachter physikalisch ist. Damit die physikalische Weltlinie, die die Lösung der Bewegungsgleichung ist, diese in allen Koordinatensystemen erfüllen kann, muss es sich um eine Lorentz-kovariant formulierte Bewegungsgleichung handeln¹⁴. Die Forderung, die Wirkung solle ein Lorentz-Skalar sein, führt deswegen zur Einigkeit der Lorentz-Beobachter über die physikalisch realisierte Weltlinie sowie zu Lorentz-kovarianten Bewegungsgleichungen, was beides erstrebenswerte Eigenschaften der Wirkung sind.

Zur Quantifizierung der Wirkung muss eine von der Bewegung abhängige Größe gefunden werden, über die sich alle Lorentz-Beobachter einig sind; dies ist die verstrichene Eigenzeit des Teilchens, d.h. die von einer am Teilchen angebrachten Uhr gemessene Zeit, um vom Anfangspunkt x_i^μ zum Endpunkt x_f^μ zu gelangen. Ein infinitesimales Eigenzeitintervall $d\tau = ds/c$ ist mit dem Linienelement ds gemäß Gleichung (2.7) verknüpft; wird es entlang der Weltlinie \mathcal{P} integriert, erhält man die gesamte Eigenzeit. Da die Wirkung die Dimension [Energie] · [Zeit] hat, muss noch ein skalarer Proportionalitätsfaktor mit Dimension [Energie] eingefügt werden. Hierfür bietet sich die Ruheenergie mc^2 an. Für die richtige Normalisierung muss noch ein Minus-Zeichen eingefügt werden:

$$S = -mc^2 \int_{\mathcal{P}} \frac{ds}{c} = -mc \int_{\mathcal{P}} ds. \quad (4.1)$$

Somit berechnet sich die Wirkung des relativistischen, freien Punktteilchens aus minus der Ruheenergie mal der Eigenzeit.

Um die übliche Form einer Wirkung, d.h. ein Integral einer Lagrange-Funktion über die Zeit, zu erhalten, kann ein konkreter Lorentz-Beobachter ausgewählt werden und die Weltlinie durch dessen Zeit parametrisiert werden. Das Linienelement (2.5) lässt sich mit $d\vec{x} = \vec{v}dt$ für physikalische Bewegung wie folgt schreiben:

$$ds = \sqrt{ds^2} = \sqrt{(c^2 - \vec{v}^2) dt^2} = cdt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.2)$$

¹³orientiert sich an [1, Kapitel 5.1, 5.2, 5.3]

¹⁴Lorentz-kovariant bedeutet - im Gegensatz zu Lorentz-invariant -, dass die Gleichung nach einer Lorentz-Transformation nur dieselbe Form haben, nicht aber identisch sein muss.

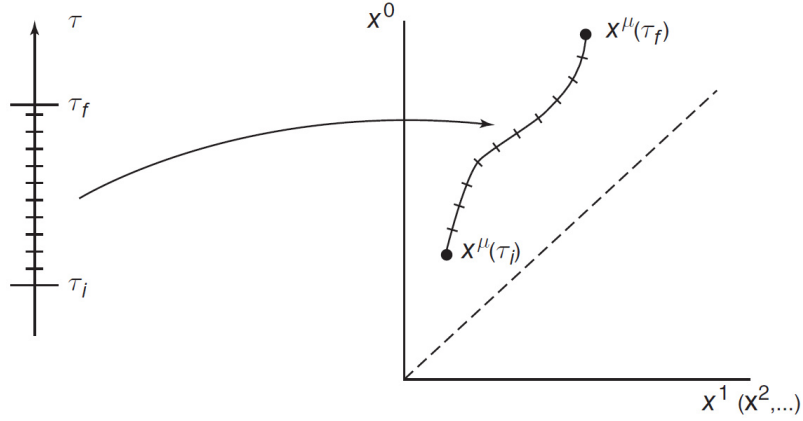


Abbildung 4: Parametrisierung einer Weltlinie durch einen Parameter τ [1, S. 93].

wobei \vec{v} die Geschwindigkeit des Teilchens und $v = |\vec{v}|$ ist. Einsetzen in (4.1) ergibt

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.3)$$

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Die relativistische Geschwindigkeitsgrenze ist dadurch implementiert, dass die Lagrange-Funktion für $v > c$ komplex würde.

Drei kurze Tests sollen die Konsistenz der „geratenen“ Lagrange-Funktion (4.3) überprüfen: Als erstes soll ihr nicht-relativistisches Limit betrachtet werden. Für kleine v lässt sich

$$L \approx -mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) = -mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.4)$$

nähern. Da für die potenzielle Energie $V = 0$ angenommen wurde und Konstanten in der Lagrange-Funktion für die Bewegungsgleichung unerheblich sind, ist dies gerade der gesuchte Ausdruck. Das Auftreten des erwünschten Plus vor $\frac{1}{2}mv^2$ rechtfertigt die gewählte Normalisierung der Wirkung (4.1). Zweitens ergibt sich der konjugierte Impuls des Teilchens aus der Lagrange-Funktion zu

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = -mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(-\frac{\vec{v}}{c^2}\right) = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v}, \quad (4.5)$$

wie erwartet. Drittens ergibt sich die Gesamtenergie des Teilchens aus der Hamilton-Funktion gemäß

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \gamma m (v^2 + c^2 - v^2) = \gamma mc^2, \quad (4.6)$$

ebenfalls wie erwartet. Die Wirkung (4.1) hat sich somit als konsistent erwiesen.

Die Wirkung (4.1) hat eine Eigenschaft, die Reparametrisierungsinvarianz genannt wird:

Die Berechnung des Integrals $\int ds$ findet in der Praxis so statt, dass die Raumzeit-Koordinaten der Weltlinie x^μ als Funktion eines Parameters τ ausgedrückt werden, was Parametrisierung genannt wird, siehe Abb. 4:

$$\begin{aligned}x^\mu &= x^\mu(\tau) \\x_i^\mu &= x^\mu(\tau_i) \\x_f^\mu &= x^\mu(\tau_f),\end{aligned}\tag{4.7}$$

wobei die einzige Vorgabe ist, dass man sich entlang der Weltlinie mit wachsendem τ immer weiter von der Startposition x_i^μ entfernt. τ ist im Allgemeinen nicht die Eigenzeit, sondern ein beliebiger Parameter. Unter Verwendung der Kettenregel ergibt sich für das zeitartige Linienelement

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 = (ds)^2\tag{4.8}$$

und damit für die Wirkung (4.1)

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau.\tag{4.9}$$

Während in Gleichung (4.3) die Zeit zur Parametrisierung verwendet wurde, ist hier hingegen die Zeit x^0 selbst durch τ parametrisiert. Dadurch bleibt die kovariante Formulierung der Wirkung (4.1) in Gleichung (4.9) erhalten.

Reparametrisierungsinvarianz bedeutet, dass der Wert der Wirkung nicht von der Parametrisierung abhängt. Für einen neuen, geeigneten¹⁵ Parameter $\tau' = \tau'(\tau)$ gilt unter Verwendung der Ketten- und der Substitutionsregel nämlich ebenfalls

$$\begin{aligned}S &= -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}} d\tau \\&= -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} \frac{d\tau'}{d\tau}} d\tau \\&= -mc \int_{\tau'_i}^{\tau'_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} d\tau',\end{aligned}\tag{4.10}$$

d.h. die Form ist dieselbe. Wegen der Einfachheit dieses Beweises sagt man, die Wirkung (4.9) sei manifest reparametrisierungsinvariant.

Die Variation der Wirkung (4.9) führt zur erwarteten, Lorentz-kovarianten Bewegungsgleichung [1, Kapitel 5.3]

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = 0,\tag{4.11}$$

die hier der Vollständigkeit halber genannt werden soll. Die Rechnung ist geradlinig, soll hier aber nicht durchgeführt werden, da sie nicht zu Analogieschlüssen bei der Beschreibung des Strings benötigt wird. Da die Zeit-Funktion $t(\tau)$ eines beliebigen Lorentz-Beobachters streng monoton steigend, d.h. $\frac{dt}{d\tau} > 0$, ist, folgt mit Hilfe der Kettenregel

$$0 = \frac{dp^\mu}{d\tau} = \frac{dp^\mu}{dt} \frac{dt}{d\tau},\tag{4.12}$$

weswegen Energie und Impuls des freien, relativistischen Punktteilchens zeitlich erhalten

¹⁵d.h. $\tau'(\tau)$ ist eine streng monoton wachsende Funktion

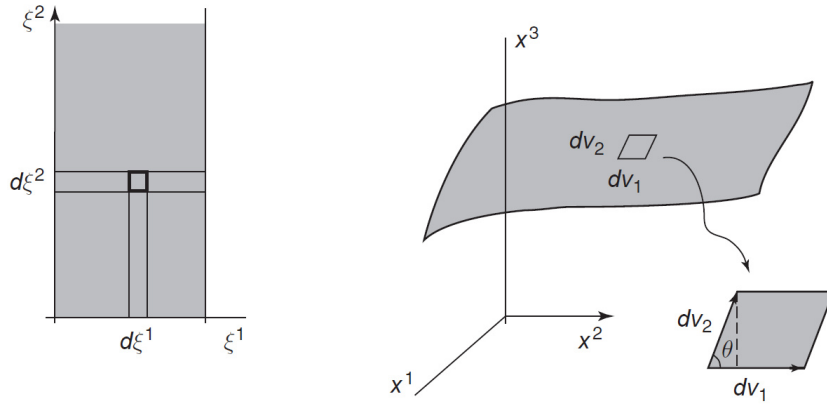


Abbildung 5: Parametrisierung einer raumartigen Fläche durch die Parameter ξ^1 und ξ^2 . Links: Parameter-Raum, rechts: Zielraum mit eingebetteter raumartiger Oberfläche [1, S. 102].

sind.

4.2 Herleitung der Nambu-Goto-Wirkung

Während sich ein nulldimensionales Punktteilchen entlang seiner eindimensionalen Weltlinie durch die Raumzeit bewegt, spannt ein eindimensionaler String eine zweidimensionale Weltfläche in der Raumzeit auf: Ein geschlossener String eine Röhre und ein offener String einen Streifen. In Analogie zum freien Punktteilchen, bei dem die Wirkung proportional zur „Eigenlänge“ $\int ds = c \int d\tau$ der Weltlinie ist, ist die Wirkung des freien Strings, die sogenannte Nambu-Goto-Wirkung, proportional zur „Eigenfläche“. Solche „Raumzeit-artigen“ Flächen unterscheiden sich von gewöhnlichen, „raumartigen“ Flächen im Euklidischen \mathbb{R}^d .

4.2.1 Vorüberlegung: Raumartige Flächen¹⁶

Im ersten Teil dieses Unterkapitels soll das Flächenfunktional $A[\vec{x}]$ für raumartige Flächen¹⁷ hergeleitet werden. Es handelt sich um ein Funktional, da es die eingesetzten *Karten*

$$\vec{x}(\xi^1, \xi^2) = \left(x^1(\xi^1, \xi^2), x^2(\xi^1, \xi^2), \dots, x^d(\xi^1, \xi^2) \right) \quad (4.13)$$

auf eine reelle Zahl, den Flächeninhalt, abbildet. ξ^1 und ξ^2 parametrisieren die Oberfläche; die Koordinatenlinien bilden auf ihr ein Netz. „Karten“ sind ein Konzept der Differentialgeometrie; es handelt sich um lokal-homöomorphe Abbildungen von dem zweidimensionalen Parameter-Raum (dem \mathbb{R}^2 , s. Abb. 5 links) in die Mannigfaltigkeit (die zweidimensionale Oberfläche, eingebettet in den \mathbb{R}^d , s. Abb. 5 rechts). Wegen der Homöomorphie kann man sich ξ^1 und ξ^2 lokal als Koordinaten auf der Oberfläche vorstellen. Der \mathbb{R}^d wird als Zielraum (engl. target space) bezeichnet. Die physikalische Oberfläche im Zielraum ist die Abbildung des rechteckigen Ausschnitts des Parameter-Raums $\left\{ (\xi^1, \xi^2) \mid \xi^1 \in [\xi_i^1, \xi_f^1], \xi^2 \in [\xi_i^2, \xi_f^2] \right\}$ unter den Karten (4.13), rechts in Abb. 5 schraffiert. Sie soll im Folgenden mit \mathcal{S} bezeichnet werden.

Ein infinitesimales, rechteckiges Flächenelement im Parameter-Raum mit Seitenlängen $d\xi^1$ und $d\xi^2$ werde von den Karten auf ein infinitesimales Parallelogramm der physikalischen

¹⁶orientiert sich an [1, Kapitel 6.1, 6.2]

¹⁷z.B. die Oberfläche einer Seifenblase

Fläche \mathcal{S} mit den Seitenlängen

$$\begin{aligned} d\vec{v}_1 &= \vec{x}(\xi^1 + d\xi^1, \xi^2) - \vec{x}(\xi^1, \xi^2) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 \\ d\vec{v}_2 &= \vec{x}(\xi^1, \xi^2 + d\xi^2) - \vec{x}(\xi^1, \xi^2) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 \end{aligned} \quad (4.14)$$

abgebildet, wobei θ der Winkel zwischen diesen Vektoren sei, s. Abb. 5. Der Flächeninhalt des Parallelogramms berechnet sich aus Grundseite mal Höhe:

$$\begin{aligned} dA &= |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| |\sin \theta| \\ &= \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} \\ &= d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

wobei die Identitäten $|\sin \theta| = \sqrt{1 - \cos^2 \theta}$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ sowie die Gleichungen (4.14) verwendet wurden. Dies ist das infinitesimale Flächenelement einer parametrisierten, raumartigen Fläche. Damit ergibt sich das Flächenfunktional zu

$$A = \int dA = \int_{\xi_i^1}^{\xi_f^1} d\xi^1 \int_{\xi_i^2}^{\xi_f^2} d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2}. \quad (4.16)$$

Im zweiten Teil dieses Unterkapitels soll die Invarianz des Flächeninhalts (4.16) unter Reparametrisierungen

$$\xi^1 \rightarrow \tilde{\xi}^1(\xi^1, \xi^2), \quad \xi^2 \rightarrow \tilde{\xi}^2(\xi^1, \xi^2) \quad (4.17)$$

gezeigt werden. Während für die einfacheren Transformationen $\xi^1 \rightarrow \tilde{\xi}^1(\xi^1)$, $\xi^2 \rightarrow \tilde{\xi}^2(\xi^2)$ dieser Flächeninhalt unter Verwendung der Kettenregel manifest reparametrisierungsinvariant ist, wie eine zu (4.10) analoge Rechnung zeigt, kann für den allgemeinen Fall (4.17) zunächst keine Aussage getroffen werden. Natürlich sollte der Flächeninhalt aber unabhängig von der zur Berechnung gewählten Parametrisierung sein.

Unter Verwendung der Matrix

$$g_{ij}(\xi^1, \xi^2) \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

lässt sich (4.16) kurz schreiben als

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \quad g \equiv \det(g_{ij}). \quad (4.19)$$

Die Matrix (4.18) kann als „induzierte Metrik“ auf \mathcal{S} interpretiert werden: Für einen tangential an \mathcal{S} anliegenden Vektor

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \quad (4.20)$$

(Summenkonvention) der Länge ds gilt

$$\begin{aligned}
ds^2 &= (ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = dx_i dx^i \\
&= \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^j \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \\
&= g_{ij} d\xi^i d\xi^j,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei die Gleichungen (4.20) und (4.18) eingesetzt wurden. Da der Zielraum mit der euklidischen und nicht mit der Minkowski-Metrik ausgestattet ist, befindet sich kein Minus vor ds^2 (vgl. die erste Zeile von (4.21) mit (2.5)). Wegen der ähnlichen Form der dritten Zeile zu Gleichung (2.5), weil mit Hilfe von g_{ij} Entfernungen auf \mathcal{S} gemessen werden (nämlich die Länge des Vektors $d\vec{x}$) und weil in der Definition (4.18) das euklidische Skalarprodukt des umgebenden Raums verwendet wird, heißt g_{ij} „induzierte Metrik auf \mathcal{S} “.

Zum Beweis der Reparametrisierungsinvarianz von (4.19) muss man wissen, wie erstens das Integrationsmaß $d\xi^1 d\xi^2$ und zweitens die Metrik \sqrt{g} unter Reparametrisierungen (4.17) transformieren. Für Ersteres ist aus der Analysis bekannt, dass

$$\begin{aligned}
d\xi^1 d\xi^2 &= |\det M| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \\
d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 &= |\det \tilde{M}| d\xi^1 d\xi^2 \\
\implies |\det M| |\det \tilde{M}| &= 1,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

wobei die Determinanten der Matrizen M und \tilde{M} , definiert durch

$$M_{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \tilde{\xi}^j}, \quad \tilde{M}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\xi}^i}{\partial \xi^j}, \tag{4.23}$$

als Funktionaldeterminanten bezeichnet werden. Die Metrik transformiert wie folgt: Da die Länge ds eines infinitesimalen Tangentialvektors als geometrische Eigenschaft unabhängig von der Parametrisierung sein muss, gilt wegen (4.21), unter Verwendung der Kettenregel und wegen (4.23)

$$g_{ij} d\xi^i d\xi^j \stackrel{!}{=} \tilde{g}_{pq} d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj} d\xi^i d\xi^j. \tag{4.24}$$

Damit dies für beliebige $d\xi^i$ gilt, muss $g_{ij} = \tilde{M}_{ip}^T \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{qj}$ sein, was in Matrix-Schreibweise dem Produkt dreier Matrizen entspricht. Nimmt man die Determinante dieser Gleichung und verwendet die Notation in (4.19), ergibt sich

$$\begin{aligned}
g &= \left(\det \tilde{M}^T \right) \tilde{g} \left(\det \tilde{M} \right) = \tilde{g} \left(\det \tilde{M} \right)^2, \\
\sqrt{g} &= \sqrt{\tilde{g}} \left| \det \tilde{M} \right|.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Der Beweis der Reparametrisierungsinvarianz von (4.19) geht unter Verwendung der ersten und dritten Zeile von (4.22) sowie der zweiten Zeile von (4.25) folgendermaßen:

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int |\det M| d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} \left| \det \tilde{M} \right| = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} = \tilde{A}. \tag{4.26}$$

Da der Beweis sehr einfach ist, sobald die Transformation der Determinante der Metrik

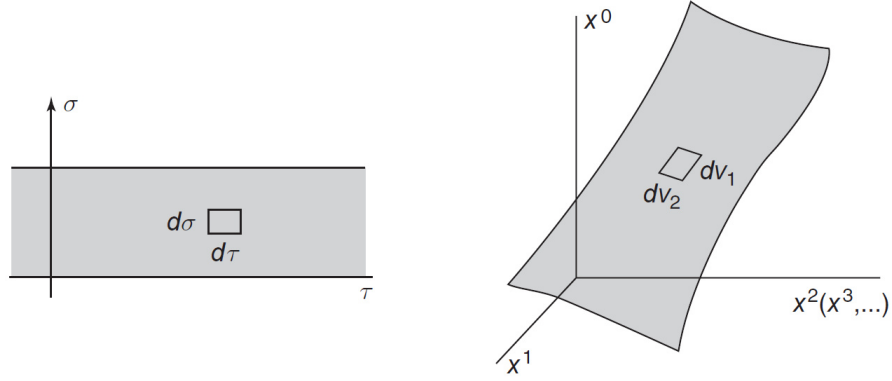


Abbildung 6: Parametrisierung einer Raumzeit-artigen Fläche durch die Parameter τ und σ . Links: Parameter-Raum, rechts: Zielraum mit eingebetteter Raumzeit-artiger Oberfläche [1, S. 107].

bekannt ist, wird das Flächenfunktional in (4.19) als manifest reparametrisierungsinvariant bezeichnet.

4.2.2 Raumzeit-artige Flächen¹⁸

Der Zielraum der Kartenabbildungen ist jetzt die mit der Minkowski-Metrik ausgestattete Raumzeit \mathbb{R}^D , in der der String seine Weltfläche aufspannt. Das Wort „Weltfläche“ wird bei Raumzeit-artigen Flächen doppeldeutig verwendet: Als Weltfläche des Strings im Parameter-Raum wird die rechteckige, in Abb. 6 auf der linken Seite schraffierte Teilmenge des \mathbb{R}^2 bezeichnet. Die physikalische Weltfläche \mathcal{S} ist ihr Bild unter den Karten und wird rechts in Abb. 6 dargestellt. Welche Weltfläche gemeint ist, ergibt sich aus dem Zusammenhang. Wegen der anderen Metrik des Zielraums ist auch die induzierte Metrik auf \mathcal{S} eine andere, d.h. Abstände auf \mathcal{S} werden anders gemessen. Dadurch unterscheiden sich Raumzeit-artige Flächen von raumartigen. Die Parameter (ξ^1, ξ^2) bekommen die Namen (τ, σ) . Die Karten werden im Fall des Strings String-Koordinaten genannt und mit einem großen

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \left(X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma) \right) \quad (4.27)$$

bezeichnet, wohingegen die kleinen x^μ beliebige Raumzeit-Punkte beschreiben. Als Strings werden die Raumzeit-Linien konstanten τ 's angesehen, d.h. σ gibt Positionen entlang der Strings an. τ sei zumindest insofern mit der Zeit x^0 korreliert, als dass Zeit vergeht, wenn τ wächst, d.h.

$$\frac{\partial X^0}{\partial \tau}(\tau, \sigma) > 0 \quad \forall \sigma. \quad (4.28)$$

Somit ergibt sich im Parameter-Raum ein endliches Intervall für σ , üblicherweise bei 0 beginnend: $\sigma \in [0, \sigma_1]$, aber ein im Allgemeinen unbeschränktes Intervall für τ : $\tau \in [\tau_i, \tau_f] \subseteq \mathbb{R}$.

Im Folgenden soll diskutiert werden, wie „physikalische Bewegung“ für einen String definiert wird. Für das Punktteilchen bedeutete dies, dass es sich mit $v < c$ bewegt (in Grenzfällen sei auch $v = c$ erlaubt). Dies ist äquivalent zu der Aussage, alle Tangentialvektoren an die Weltlinie seien zeitartig (lichtartig). Es wird daher der zweidimensionale Tangentialraum an die Weltfläche in einem beliebigen Punkt¹⁹ P betrachtet. Ein String besitzt, abgesehen von

¹⁸orientiert sich an [1, Kapitel 6.3, 6.4]

¹⁹Randpunkte seien ausgenommen

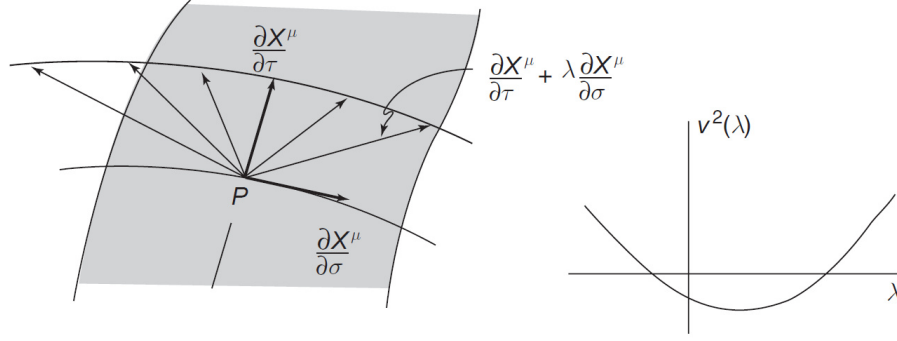


Abbildung 7: Links: Tangentialvektoren v^μ an den Punkt P der Weltfläche. Rechts: Je nach Wert für λ ist v^μ zeit-, licht- oder raumartig [1, S. 110].

den Endpunkten offener Strings, die durch $\sigma_* \in \{0, \sigma_1\}$ beschrieben und deren Weltlinien nur durch τ parametrisiert werden, keine „Bestandteile“. D.h. im Inneren von Strings können keine Punkte verfolgt werden, deren Weltlinien zeitartige Tangentialvektoren besitzen könnten. Trotzdem soll als Kriterium für physikalische Bewegung gefordert werden, dass für jeden Punkt P eine zeitartige tangentielle Richtung existiert (und dadurch unendlich viele). Denn dann befindet sich P für jede dieser Richtungen im Ruhesystem eines anderen Lorentz-Beobachters. Somit existiert für jeden Punkt Q_2 auf einem String mit $\tau + d\tau$ ein Punkt (und dadurch unendlich viele Punkte) Q_1 auf dem vorherigen String mit τ , sodass Q_1 den Punkt Q_2 mit einer Geschwindigkeit $v < c$ erreichen kann. Da für einen beliebigen Lorentz-Beobachter zwei Punkte desselben Strings immer raumartig getrennt sind, existieren immer auch raumartige tangentielle Richtungen. Ein String bewege sich daher physikalisch, wenn der Tangentialraum an jedem Punkt der Weltfläche eine Basis aus einem zeitartigen und einem raumartigen Vektor besitzt.

Da die Tangentialvektoren $\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}$ und $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ linear unabhängig sind, kann jede mögliche tangentielle Richtung ausgedrückt werden durch

$$v^\mu(\lambda) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad \lambda \in (-\infty, \infty), \quad (4.29)$$

wobei die Richtung $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ selbst im Grenzwert $\lambda \rightarrow \infty$ erreicht wird, s. Abb. 7 links. Die Forderung, der String bewege sich physikalisch, bedeutet, dass je nach Wert von λ der Tangentialvektor v^μ zeit-, licht- oder raumartig ist; v^2 ist also negativ, null oder positiv. D.h. das nach oben geöffnete Polynom zweiten Grades

$$v^2(\lambda) = v^\mu(\lambda)v_\mu(\lambda) = \lambda^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 + 2\lambda \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau} \right) + \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2, \quad (4.30)$$

das in Abb. 7 rechts zu sehen ist, besitzt zwei Nullstellen, bzw. die Diskriminante der Gleichung $v^2 = 0$ ist positiv:

$$\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2}{\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^4} - \frac{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2}{\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2} > 0, \quad (4.31)$$

woraus durch Multiplikation mit $\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^4$

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 > 0 \quad (4.32)$$

folgt. Diese Gleichung wird gleich benötigt.

Im letzten Teil dieses Unterabschnitts soll das Flächenfunktional für Raumzeit-artige Flächen formuliert werden: In einer analogen Überlegung zu der aus Kapitel 4.2.1 ergeben sich die Seitenlängen des in Abb. 6 eingezeichneten Parallelogramms zu

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma, \quad (4.33)$$

vgl. Gleichung (4.14). Daher lässt sich vermuten, das Raumzeit-artige Flächenfunktional entspräche Gleichung (4.16), nur in relativistischer Notation:

$$\begin{aligned} A &\stackrel{?}{=} \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right) - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2} \\ &= \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Ein Vergleich mit Formel (4.32) zeigt aber, dass der Term unter der Wurzel negativ ist; das korrekte Raumzeit-artige Flächenfunktional ist deswegen

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2} \equiv \int d\tau d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (4.35)$$

mit den Abkürzungen

$$\dot{X}^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu \equiv \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}. \quad (4.36)$$

Das zusätzliche Minuszeichen unter der Wurzel im Vergleich zu raumartigen Flächen kommt durch die andere Metrik des Zielraums zustande (Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ im Gegensatz zur euklidischen Metrik): So gilt bei Raumzeit-artigen Flächen für die Lorentz-invariante Länge ds eines Tangentialvektors dX^μ an die Weltfläche (s. (2.5))

$$\begin{aligned} -ds^2 &= dX_\mu dX^\mu \\ &= \frac{\partial X_\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \\ &\equiv \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \end{aligned} \quad (4.37)$$

was mit $+ds^2 = dx_i dx^i = g_{ij} d\xi^i d\xi^j$ aus Gleichung (4.21) für raumartige Flächen verglichen werden soll. In der zweiten Zeile wurden die Kettenregel sowie $\xi^1 = \tau$ und $\xi^2 = \sigma$ verwendet. Wegen der anderen Metrik des Zielraums unterscheidet sich auch die auf \mathcal{S} induzierte Metrik $\gamma_{\alpha\beta}$. Als Matrix ausgeschrieben hat diese die Form

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & X'^2 \end{pmatrix}. \quad (4.38)$$

Ein Vergleich mit (4.35) zeigt, dass der Term unter der Wurzel gerade $-\det \gamma_{\alpha\beta} \equiv -\gamma$ ist.

Die endgültige Form für das Raumzeit-artige Flächenfunktional ist daher

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{-\gamma}. \quad (4.39)$$

Da der Beweis analog zu dem für raumartigen Flächen funktioniert (s. (4.26)), ist dies eine manifest reparametrisierungsinvariante Darstellung. D.h. auch für Raumzeit-artigen Flächen ist der Flächeninhalt reparametrisierungsinvariant.

Da Gleichung (4.35) nur relativistische Skalarprodukte enthält, ist die Fläche A ein Lorentz-Skalar und kann als Eigenfläche bezeichnet werden, da sich alle Lorentz-Beobachter über den Flächeninhalt einig sind. Der Flächeninhalt bleibt folglich sowohl unter Reparametrisierungen als auch unter Lorentz-Transformationen erhalten.

4.2.3 Nambu-Goto-Wirkung²⁰

Da die Wirkung für den relativistischen String genau wie beim Punktteilchen ein Lorentz-Skalar sein soll, muss der dimensionsbehaftete Proportionalitätsfaktor zwischen ihr und der skalaren Eigenfläche (4.35) ebenfalls skalar sein. Anhand einer Dimensionsanalyse soll für diesen Proportionalitätsfaktor zunächst eine begründete Vermutung geäußert werden, bevor anhand eines einfachen Beispiels seine Richtigkeit demonstriert wird:

Da die String-Koordinaten X^μ die Dimension Länge L haben, hat der Flächeninhalt in (4.35) die erwartete Dimension L^2 . Die Dimensionen der Parameter τ und σ kürzen sich heraus und spielen keine Rolle. Deswegen kann man z.B. $[\tau] = T$ und $[\sigma] = L$ wählen, da τ etwas mit der Zeit und σ etwas mit Positionen entlang des Strings zu tun haben. Spätestens aber ab Kapitel 6 werden die beiden Parameter als dimensionslos angesehen werden. Somit gilt für die Dimension der Wirkung

$$[S] = \frac{ML^2}{T} = \frac{M}{T} [A] = \frac{\frac{ML}{T^2}}{\frac{L}{T}} [A] = \frac{[T_0]}{[c]} [A], \quad (4.40)$$

wobei c die skalare Lichtgeschwindigkeit und T_0 ein (positiver) Lorentz-Skalar mit der Einheit Newton sind. Dass T_0 die physikalische Interpretation der String-Spannung hat, muss aber noch gezeigt werden. Zur korrekten Normierung bedarf der Proportionalitätsfaktor noch eines Minuszeichens, womit sich die Wirkung für den freien, relativistischen, offenen sowie geschlossenen String, die sogenannte Nambu-Goto-Wirkung, zu

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (4.41)$$

ergibt. Genau wie die Eigenfläche ist diese Wirkung sowohl Lorentz- als auch reparametrisierungsinvariant.

Zur Demonstration der Richtigkeit der Normierung und der Interpretation von T_0 als String-Spannung soll ein statischer, offener String aus Sicht eines Lorentz-Beobachters betrachtet werden, aus dessen Sicht der String entlang der x^1 -Achse ruht. Seine Endpunkte befinden sich an den räumlichen Koordinaten $\vec{x} = (0, \vec{0})$ und $\vec{x} = (a, \vec{0})$. Ziel soll die Berechnung der Gesamtenergie

$$H = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\mu} \dot{X}^\mu - L \quad (4.42)$$

sein, wozu zunächst die Lagrange-Funktion benötigt wird. Für den betrachteten String gilt

²⁰ orientiert sich an [1, Kapitel 6.4, 6.6, 6.7]

$X^i(\tau, \sigma) = 0$ für $i = 2, \dots, d$. Sich die Reparametrisierungsinvarianz der Wirkung zunutze machend, kann man sich die Parametrisierung der nicht-trivialen String-Koordinaten $X^0 = ct$ und X^1 aussuchen. Es soll die sogenannte „static gauge“ verwendet werden:

$$X^0(\tau, \sigma) = ct(\tau, \sigma) \stackrel{!}{=} c\tau \quad (4.43)$$

bzw.

$$\tau = t \implies X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = \left(ct, \vec{X}(t, \sigma) \right). \quad (4.44)$$

Das Wort „gauge“ (dt. Eichung) wird in der Stringtheorie synonym für „Parametrisierung“ verwendet, da die Reparametrisierungsinvarianz in der Stringtheorie dieselbe Rolle wie die Eichinvarianz in der Elektrodynamik besitzt: eine geeignete Parametrisierung kann helfen, die Gleichungen zu vereinfachen und die Physik zu entschlüsseln. In der static gauge ist X^0 σ -unabhängig und τ fällt genau mit der Zeit des ausgewählten Lorentz-Beobachters zusammen. Die gewählte Parametrisierung/Eichung heißt „statisch“, weil in ihr die Strings, d.h. die Linien auf der Weltfläche mit gleichem τ , gerade die „statischen Fäden“ sind, die der gewählte Lorentz-Beobachter zu einem festen Zeitpunkt $t = \tau$ sieht; der Beobachter sieht also alle zum String gehörenden Raumzeit-Punkte gleichzeitig.

Die static gauge ist eine Teilparametrisierung, da sie keine Aussage über σ trifft. Es muss daher noch die σ -Parametrisierung für $X^1(t, \sigma)$ festgelegt werden. Da der String statisch ist, kann die Zeitabhängigkeit fallengelassen werden und es gilt

$$X^1(t, \sigma) = f(\sigma), \quad f(0) = 0, \quad f(\sigma_1) = a, \quad (4.45)$$

für eine beliebige, aber streng monoton wachsende Funktion $f(\sigma)$, d.h.

$$f' \equiv \frac{df}{d\sigma} > 0. \quad (4.46)$$

Zusammenfassend ergeben sich

$$X^\mu = \left(ct, f(\sigma), \vec{0} \right), \quad \dot{X}^\mu = \left(c, 0, \vec{0} \right), \quad X'^\mu = \left(0, f', \vec{0} \right), \quad (4.47)$$

sowie

$$\dot{X}^2 = -c^2, \quad X'^2 = f'^2, \quad \dot{X} \cdot X' = 0. \quad (4.48)$$

Damit lässt sich die Wirkung (4.41) berechnen:

$$S = -\frac{T_0}{c} \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{c^2 f'^2} = -T_0 \int_{t_i}^{t_f} dt [f(\sigma)]_0^{\sigma_1} = \int_{t_i}^{t_f} dt (-T_0 a), \quad (4.49)$$

wobei die Gleichungen (4.46) und (4.45) benutzt wurden. Daraus liest man eine konstante Lagrange-Funktion

$$L = -T_0 a \quad (4.50)$$

ab. Da Konstanten in der Lagrange-Funktion für die Bewegungsgleichung irrelevant sind, ist dies in Übereinstimmung mit den hier herrschenden physikalischen Bedingungen $T = V = 0$. Da alle Ableitungen der konstanten Lagrange-Funktion verschwinden, gilt nach Gleichung (4.42)

$$H = -L = T_0 a. \quad (4.51)$$

Dies ist die gesuchte Gleichung. Sie erlaubt die physikalische Interpretation von T_0 als String-Spannung und rechtfertigt die gewählte Normierung der Nambu-Goto-Wirkung: Da

der String statisch ist, ist H die Ruheenergie E_0 . Da sowohl T_0 als auch a positiv sind, ist die Normierung richtig gewählt, da eine negative Ruheenergie unphysikalisch wäre. Interpretiert man T_0 als String-Spannung, entspricht die Ruheenergie der Arbeit, die verrichtet werden muss, um einen punktförmigen String entgegen der Spannung auf die Länge a zu strecken. Die String-Spannung verleiht dem relativistischen String daher seine Masse M . Somit ergibt sich ein Zusammenhang zwischen der Spannung und der Massen-Liniendichte μ_0 :

$$M = \mu_0 a = \frac{E_0}{c^2} = \frac{T_0 a}{c^2} \implies T_0 = \mu_0 c^2, \quad (4.52)$$

d.h. T_0 und μ_0 sind keine unabhängigen Größen mehr. Mit der Interpretation $T_0 a = E_0$ ist Gleichung (4.50) die natürliche Verallgemeinerung der unteren Gleichung von (4.3) für $v = 0$ beim relativistischen Punktteilchen.

4.3 Bewegungsgleichungen und Randbedingungen²¹

Das Hamilton'sche Prinzip $\delta S = 0$, angewendet auf die Nambu-Goto-Wirkung, wird zu den Bewegungsgleichungen und den möglichen Randbedingungen führen:

Unter Einführung einer Lagrange-Dichte schreibt sich die Nambu-Goto-Wirkung (4.41) als

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu), \quad (4.53)$$

$$\mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} = -\frac{T_0}{c} \left((\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Zunächst sollen die häufig benötigten Abkürzungen

$$\mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \quad (4.54)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - \dot{X}^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}$$

eingeführt werden, die sich durch mehrfaches Anwenden der Ketten- und Produktregel (für den zweiten Summanden unter der Wurzel) ergeben. Da jede τ - oder σ -Ableitung von X^μ selbst eine (im Allgemeinen komplizierte) Funktion von τ und σ ist, sind \mathcal{P}_μ^τ und \mathcal{P}_μ^σ äußerst komplizierte Funktionen von τ und σ . Mit (4.54), dem Trick (3.9) und zweifacher partieller

²¹ orientiert sich an [1, Kapitel 6.5, 6.6]

Integration berechnet sich die Variation der Wirkung (4.53) dann zu

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \delta \dot{X}^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \delta X'^\mu \right] \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \\
&= \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu) - \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} \delta X^\mu + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu) - \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \delta X^\mu \right] \\
&= \int_0^{\sigma_1} d\sigma [\mathcal{P}_\mu^\tau \delta X^\mu]_{\tau_i}^{\tau_f} + \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\mathcal{P}_\mu^\sigma \delta X^\mu]_0^{\sigma_1} - \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \delta X^\mu.
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Damit die Variation der Wirkung verschwindet, müssen alle drei Terme separat verschwinden. Der dritte Term wird für beliebige Variationen δX^μ nur null, wenn die Klammer null wird:

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \tag{4.56}$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen für den freien, relativistischen, offenen sowie geschlossenen String. Der Plural wird verwendet, da es sich um D Gleichungen handelt. Ein Blick auf die Gleichungen (4.54) zeigt, dass die Bewegungsgleichungen äußerst kompliziert sind. Das gesamte Kapitel 6 ist ihrer Lösung gewidmet.

Das Vorgehen beim relativistischen String ähnelt sehr stark jenem beim nicht-relativistischen, wenn man τ durch t sowie σ durch x ersetzt und die Beschreibung von der relativistischen, D -dimensionalen Raumzeit auf den zweidimensionalen Raum ((x, y) -Ebene) herunterbricht, siehe hierzu die Formeln (3.6), (3.7), (3.10) und (3.11).

Der erste Term verschwindet durch die Forderung, dass der Anfangs- und Endzustand, festgelegt durch die Anfangs- und Endbedingungen, keiner Variation unterliegen:

$$\delta X^\mu(\tau_i, \sigma) = \delta X^\mu(\tau_f, \sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in [0, \sigma_1]. \tag{4.57}$$

Der zweite Term betrifft den Rand der Weltfläche. Ausgeschrieben hat er die Form

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \left(\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_1) \delta X^0(\tau, \sigma_1) - \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, 0) \delta X^0(\tau, 0) \right. \\
&\quad + \mathcal{P}_1^\sigma(\tau, \sigma_1) \delta X^1(\tau, \sigma_1) - \mathcal{P}_1^\sigma(\tau, 0) \delta X^1(\tau, 0) \\
&\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
&\quad \left. + \mathcal{P}_d^\sigma(\tau, \sigma_1) \delta X^d(\tau, \sigma_1) - \mathcal{P}_d^\sigma(\tau, 0) \delta X^d(\tau, 0) \right).
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Für offene Strings verschwindet dieser Term, wenn für jeden Endpunkt $\sigma_* \in \{0, \sigma_1\}$ und für jede Dimension $\mu \in \{0, 1, \dots, d\}$ entweder $\delta X^\mu(\tau, \sigma_*)$ oder $\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*)$ null wird. Verschwindet $\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*)$, ist die Variation $\delta X^\mu(\tau, \sigma_*)$ beliebig, d.h. der entsprechende Endpunkt kann sich entlang der Dimension μ frei bewegen. Deshalb wird die Randbedingung

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0 \tag{4.59}$$

als „freie Randbedingung“ bezeichnet. Wie in Kapitel 6.2 klar werden wird, führt eine geschickte Parametrisierung der Weltfläche dazu, dass $\mathcal{P}_\mu^\sigma \propto \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ ist, d.h. eine freie Randbedingung entspricht einer Neumann-Randbedingung, in Übereinstimmung mit dem nicht-

relativistischen Fall (3.16). Im anderen Fall, d.h. wenn $\delta X^\mu(\tau, \sigma_*)$ verschwindet, ist die String-Koordinate X^μ des Endpunktes für alle τ konstant, d.h. ihre Ableitung nach τ verschwindet. Da die Zeit X^0 des Endpunktes nicht fixiert bleiben kann, wenn sich τ verändert, s. (4.28), kann die Randbedingung

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu \neq 0 \quad (4.60)$$

nicht für $\mu = 0$ realisiert werden. In dieser Darstellung ist offensichtlich, dass es sich in diesem Fall um Dirichlet-Randbedingungen handelt, vgl. auch mit (3.15). Für $\mu = 0$ müssen also freie Randbedingungen realisiert sein:

$$\mathcal{P}_0^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_0^\sigma(\tau, \sigma_1) = 0. \quad (4.61)$$

Die Weltfläche geschlossener Strings besitzt keinen Rand, weswegen der zweite Term in der letzten Zeile von (4.55) ebenfalls verschwindet. Dies ist mathematisch durch periodische Randbedingungen realisiert: Per Äquivalenzrelation werden folgende Punkte des Parameter-Raums miteinander identifiziert:

$$(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + \sigma_1). \quad (4.62)$$

Die Weltfläche im Parameter-Raum schließt sich dadurch zu einem Zylinder. Insbesondere gilt $(\tau, 0) \sim (\tau, \sigma_1)$. Somit beschreiben $\sigma = 0$ und $\sigma = \sigma_1$ denselben Raumzeit-Punkt der physikalischen Weltfläche:

$$X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \sigma_1). \quad (4.63)$$

Diese Gleichungen werden „periodische Randbedingungen“ genannt. Das Ableiten dieser Gleichungen nach τ und σ und das Bilden der Variation führen zu

$$\dot{X}^\mu(\tau, 0) = \dot{X}^\mu(\tau, \sigma_1), \quad X'^\mu(\tau, 0) = X'^\mu(\tau, \sigma_1), \quad \delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \sigma_1), \quad (4.64)$$

und unter Verwendung der Gleichungen (4.54) sieht man, dass

$$\mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma_1), \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_1), \quad (4.65)$$

weil \mathcal{P}_μ^τ und \mathcal{P}_μ^σ nur von \dot{X}^μ und X'^μ abhängen. Mit Hilfe der dritten Gleichung in (4.64) und der zweiten Gleichung in (4.65) folgt

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma_1) \delta X^\mu(\tau, \sigma_1) - \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) \delta X^\mu(\tau, 0) = \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) \delta X^\mu(\tau, 0) - \mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, 0) \delta X^\mu(\tau, 0) = 0, \quad (4.66)$$

weswegen alle Zeilen in (4.58) separat verschwinden. Für geschlossene Strings und periodischen Randbedingungen verschwindet folglich der zweite Term aus (4.55) ebenfalls und damit die gesamte Variation der Nambu-Goto-Wirkung.

Hiermit wurden für den klassischen, relativistischen String schließlich die Nambu-Goto-Wirkung aufgestellt und plausibel gemacht, die Bewegungsgleichungen hergeleitet und die möglichen Randbedingungen für offene sowie geschlossene Strings diskutiert.

5 Erhaltungsgrößen des klassischen, relativistischen Strings

Nachdem schließlich die Bewegungsgleichungen für freie, relativistische Strings hergeleitet sind, wird es das Ziel des Kapitels 6 sein, eine vollständige Lösung unter Berücksichtigung der möglichen Randbedingungen zu finden. Um die dortige Vorgehensweise zu verstehen,

wird in diesem Kapitel in Abschnitt 5.2 eine physikalische Interpretation der abstrakten Bewegungsgleichung (4.56) gegeben. Außerdem werden in Abschnitt 5.3 sogenannte Lorentz-Ladungen eingeführt, deren Quantenversionen zur abschließenden Berechnung der Raumzeit-Dimension in Kapitel 8.5 benötigt werden.

5.1 Symmetrien und Erhaltungsgrößen²²

Zum Einstieg soll die Ladungserhaltung der klassischen Elektrodynamik wiederholt werden, die mit Hilfe der D -Stromdichte

$$j^\alpha = (c\rho, \vec{j}) \quad (5.1)$$

formuliert wird, wobei ρ die Ladungs- und \vec{j} die Stromdichte sind. In der Elektrodynamik ist j^α ein „erhaltener Strom“; als solcher wird konventionsgemäß jeder D -Vektor bezeichnet, deren relativistische Divergenz

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0 \quad (5.2)$$

ist. Gleichung (5.2) wird als Kontinuitätsgleichung bezeichnet; für den elektrodynamischen Fall (5.1) hat diese ausgeschrieben die Form

$$\partial_\alpha j^\alpha = \partial_0 j^0 + \partial_i j^i = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (5.3)$$

Eigentlich ist nicht der Strom j^μ erhalten, sondern die mit dem Strom assoziierte Ladung Q , die sich, abgesehen von einer Normierung (Faktor $\frac{1}{c}$), durch Integration der Null-Komponente des erhaltenen Stroms über die Raum-Koordinaten ergibt:

$$Q(t) = \int_V \rho(x) d^d \vec{x} = \int_V \frac{j^0(x)}{c} d^d \vec{x}, \quad (5.4)$$

denn für die so definierte Ladung gilt

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d^d \vec{x} = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^d \vec{x} = - \int_{\partial V} \vec{j} \cdot d^{d-1} \vec{x} = -I, \quad (5.5)$$

wobei zunächst die Kontinuitätsgleichung und anschließend der Gauß'sche Satz verwendet wurde; ∂V bezeichne den Rand des Integrationsvolumens. Die Ladung im Inneren von V kann sich also nur zeitlich ändern, falls ein Strom I über den Rand von V fließt; dies wird als Ladungserhaltung bezeichnet. Für ein hinreichend großes Volumen, das das relevante physikalische System enthält, gilt dann

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (5.6)$$

Es sei noch angemerkt, dass die elektrische Ladung sogar eine Lorentz-invariante Erhaltungsgröße ist, d.h. verschiedene Lorentz-Beobachter sind sich nicht nur über den Erhalt von Q , sondern auch über ihren Wert, einig. Dies gilt für Erhaltungsgrößen im Allgemeinen nicht; Energie und Impuls sind zwei einfache Gegenbeispiele.

Im Folgenden soll nun gezeigt werden, wie Erhaltungsgrößen allgemein im Rahmen des Lagrange-Formalismus konstruiert werden können. Transformationen der dynamischen Variablen q^a oder Felder ϕ^a eines Systems, die die Lagrange-Funktion $L(q^a, \dot{q}^a; t)$ oder -Dichte $\mathcal{L}(\phi^a, \partial_\alpha \phi^a)$ dieses Systems invariant lassen, werden Symmetrie-Transformationen oder ein-

²²orientiert sich an [1, Kapitel 8.1, 8.2]

fach Symmetrien genannt. Jede (kontinuierliche) Symmetrie ist gemäß des Noether-Theorems mit einer Erhaltungsgröße assoziiert. Erhaltungsgrößen erleichtern die Beschreibung eines physikalischen Systems, weswegen gerne hoch symmetrische Lagrange-Dichten (bzw. -Funktionen) verwendet werden.

5.1.1 Vorüberlegung: Lagrange-Funktionen

Ein System mit den dynamischen Variablen bzw. generalisierten Koordinaten q^a werde durch die Wirkung

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q^a(t), \dot{q}^a(t); t) dt \quad (5.7)$$

beschrieben; die Lagrange-Funktion L kann explizit zeitabhängig sein. Transformationen der generalisierten Koordinaten, zusammen mit den daraus resultierenden Transformationen der generalisierten Geschwindigkeiten

$$\begin{aligned} q^a(t) &\rightarrow q'^a(t) = q^a(t) + \delta q^a(t), \\ \dot{q}^a(t) &\rightarrow \dot{q}'^a(t) = \dot{q}^a(t) + \frac{d(\delta q^a(t))}{dt}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

resultieren in einer Transformation der Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} L &\rightarrow L' = L + \delta L, \\ \delta L &= \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d(\delta q^a)}{dt}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

wobei in beiden Termen über a summiert wird und die Kettenregel sowie Gleichung (3.9) verwendet wurden. Transformationen (5.8), die zu

$$\delta L = 0 \quad (5.10)$$

führen, werden Symmetrie-Transformationen genannt. Die Transformation der a -ten Koordinate q^a kann durch „Regeln“ $h_i^a(q^a(t); t)$ spezifiziert werden; dies sind Funktionen für die a -te Koordinate, nummeriert durch i , die jedem beliebigen „Pfad“ $q^a(t)$, der eingesetzt wird, ihre Veränderung $\delta q^a(t)$ zuordnen; diese Zuordnung kann im Allgemeinen explizit zeitabhängig sein. Damit schreibt sich die Variation als

$$\delta q^a(t) = \epsilon^i h_i^a(q^a(t); t), \quad (5.11)$$

wobei ϵ^i infinitesimale Konstanten sind und über i summiert wird. Der Index a nummeriert also die Koordinaten q^a und der Index i die Anzahl der Parameter ϵ^i in der Variation $\delta q^a = \epsilon^i h_i^a$.

Das Noether-Theorem besagt nun: Beschreibt $\delta q^a(t)$ die Symmetrie-Transformation eines physikalisch erlaubten „Pfades“ $q^a(t)$, d.h. genügt $q^a(t)$ der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} - \frac{\partial L}{\partial q^a} = 0, \quad (5.12)$$

dann sind die sogenannten Noether-Ladungen Q_i , definiert durch

$$\epsilon^i Q_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \stackrel{(5.11)}{=} \epsilon^i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} h_i^a(q^a(t); t), \quad (5.13)$$

zeitlich erhalten:

$$\frac{d}{dt}Q_i = 0. \quad (5.14)$$

Der Beweis benutzt die beiden Voraussetzungen, nämlich dass erstens die Lagrange-Funktion einer Symmetrie-Transformation unterliegt, d.h. dass Gleichung (5.10) gilt, und dass zweitens der Pfad die Euler-Lagrange-Gleichung (5.12) erfüllt. Damit gilt unter Verwendung der Produktregel im letzten Schritt

$$0 \stackrel{(5.10)}{=} \delta L \stackrel{(5.9)}{=} \frac{\partial L}{\partial q^a} \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d(\delta q^a)}{dt} \stackrel{(5.12)}{=} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \delta q^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \frac{d(\delta q^a)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta q^a \right), \quad (5.15)$$

woraus unter Verwendung der Definition (5.13)

$$0 = \frac{d}{dt} (\epsilon^i Q_i) = \epsilon^i \frac{d}{dt} Q_i \quad (5.16)$$

folgt. Für beliebige ϵ^i ist dies nur zu erfüllen, falls jeder Summand separat verschwindet, d.h. falls Gleichung (5.14) für alle i gilt, q.e.d. Pro Parameter ϵ^i in der Symmetrie-Transformation $q^a \rightarrow q^a + \epsilon^i h_i^a$ gibt es also eine erhaltene Ladung Q_i .

Als Beispiel soll eine Lagrange-Funktion $L(\dot{q}(t))$ betrachtet werden, die nur von der Geschwindigkeit eines eindimensionalen Systems abhängt, d.h. das System unterliege keinem ortsabhängigen Potenzial und der Raum sei entlang q homogen. Da es nur eine generalisierte Koordinate q gibt, wird der Index a nicht benötigt. Für eine solche Lagrange-Funktion ist die Transformation $\delta q(t) = \epsilon$, d.h. eine konstante Raumtranslation, eine Symmetrie-Transformation, denn es gilt

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d\epsilon}{dt} = 0. \quad (5.17)$$

Die Wahl $\delta q(t) = \epsilon$ zeigt, dass auch der Index i nicht benötigt wird; sie ist außerdem äquivalent zu $h(q(t); t) \equiv 1$. Die erhaltene Ladung ist gemäß Gleichung (5.13) und nach dem Kürzen von ϵ

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p \quad (5.18)$$

der zu q kanonisch konjugierte Impuls p . Dies ist ein wohlbekanntes Resultat, da q zyklisch ist, d.h. $\frac{\partial L}{\partial q} = 0$.

5.1.2 Lagrange-Dichten

Ein System werde durch die Wirkung

$$S = \int_{\xi_i}^{\xi_f} d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^k \mathcal{L}(\phi^a(\xi), \partial_\alpha \phi^a(\xi)) \quad (5.19)$$

beschrieben. ξ^α sind dabei die Koordinaten der „Welt“, in der sich das System befindet (z.B. wäre für die Raumzeit $k = d$); $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}$ ist die partielle Ableitung nach der α -ten Koordinate. Der Index α nummeriert folglich die Koordinaten ξ^α der „Welt“ bzw. die Vektorkomponenten von Vektoren j^α in dieser „Welt“. Der Index a nummeriert die Felder ϕ^a . Die Lagrange-Dichte \mathcal{L} hängt von allen Feldern ϕ^a und allen Ableitungen aller Felder $\partial_\alpha \phi^a$ ab. Wird ξ ohne kontravarianten Index verwendet, wie bei den Argumenten der Felder und

Feld-Ableitungen sowie den Integrationsgrenzen, ist dies eine Kurzschreibweise, um alle ξ 's aufzuzählen.

Transformationen der Felder, zusammen mit den daraus resultierenden Transformationen der Ableitungen der Felder

$$\begin{aligned}\phi^a(\xi) &\rightarrow \phi'^a(\xi) = \phi^a(\xi) + \delta\phi^a(\xi), \\ \partial_\alpha\phi^a(\xi) &\rightarrow \partial_\alpha\phi'^a(\xi) = \partial_\alpha\phi^a(\xi) + \partial_\alpha(\delta\phi^a(\xi)),\end{aligned}\tag{5.20}$$

werden als Symmetrie-Transformationen bezeichnet, wenn für die resultierende Variation der Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \delta\mathcal{L}, \\ \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a}\delta\phi^a + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\partial_\alpha(\delta\phi^a),\end{aligned}\tag{5.21}$$

gilt:

$$\delta\mathcal{L} = 0.\tag{5.22}$$

Für die zweite Zeile von Gleichung (5.21) wurden die Kettenregel und Gleichung (3.9) verwendet. Die Transformation des a -ten Feldes ϕ^a kann durch „Regeln“ $h_i^a(\phi^a(\xi); \xi)$ spezifiziert werden; dies sind Funktionen für das a -te Feld, nummeriert durch i , die jeder beliebigen Feldkonfiguration $\phi^a(\xi)$, die eingesetzt wird, ihre Veränderung $\delta\phi^a(\xi)$ zuordnen; diese Zuordnung kann im Allgemeinen noch explizit von den Koordinaten abhängen. Damit schreibt sich die Variation als

$$\delta\phi^a(\xi) = \epsilon^i h_i^a(\phi^a(\xi); \xi),\tag{5.23}$$

wobei ϵ^i infinitesimale Konstanten sind und über i summiert wird. Der Index i nummeriert somit die Anzahl der Parameter ϵ^i in der Variation $\delta\phi^a = \epsilon^i h_i^a$.

Das Noether-Theorem für Lagrange-Dichten besagt nun: Beschreibt $\delta\phi^a(\xi)$ die Symmetrie-Transformation einer physikalisch erlaubten Feldkonfiguration $\phi^a(\xi)$, d.h. genügt $\phi^a(\xi)$ der Euler-Lagrange-Gleichung

$$\partial_\alpha \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^a} = 0,\tag{5.24}$$

dann handelt es sich bei den sogenannten Noether-Strömen j_i^α , definiert durch

$$\epsilon^i j_i^\alpha \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)}\delta\phi^a \stackrel{(5.23)}{=} \epsilon^i \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha\phi^a)} h_i^a(\phi^a(\xi); \xi),\tag{5.25}$$

um erhaltene Ströme:

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0.\tag{5.26}$$

Wichtig ist der Unterschied zwischen den Rollen der beiden Indizes von j_i^α . i nummeriert die verschiedenen erhaltenen Ströme: pro Parameter ϵ^i in der Symmetrie-Transformation $\phi^a \rightarrow \phi^a + \epsilon^i h_i^a$ gibt es einen erhaltenen Strom $(j_i)^\alpha$; α hingegen nummeriert die Komponenten eines erhaltenen Stromes für festes i : davon gibt es genauso viele, wie die „Welt“ Koordinaten hat.

Der Beweis des Noether-Theorems benutzt die beiden Voraussetzungen, nämlich dass erstens die Lagrange-Dichte einer Symmetrie-Transformation unterliegt, d.h. dass Gleichung (5.22) gilt, und dass zweitens die Feldkonfiguration die Euler-Lagrange-Gleichung (5.24) er-

füllt. Damit gilt unter Verwendung der Produktregel im letzten Schritt

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{(5.22)}{=} \delta L \stackrel{(5.21)}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^a} \delta \phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \partial_\alpha (\delta \phi^a) \\
&\stackrel{(5.24)}{=} \left(\partial_\alpha \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \right) \delta \phi^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \partial_\alpha (\delta \phi^a) = \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi^a)} \delta \phi^a \right),
\end{aligned} \tag{5.27}$$

woraus unter Verwendung der Definition (5.25)

$$0 = \partial_\alpha (\epsilon^i j_i^\alpha) = \epsilon^i \partial_\alpha j_i^\alpha \tag{5.28}$$

folgt. Für beliebige ϵ^i ist dies nur zu erfüllen, falls Gleichung (5.26) für alle i gilt, q.e.d.

Wie für die elektrodynamische Stromdichte in (5.5) bewiesen, ist mit jedem erhaltenen Strom j_i^α eine erhaltene Ladung

$$Q_i = N \int_V d\xi^1 \dots d\xi^k j_i^0 \tag{5.29}$$

assoziiert, wobei N eine frei wählbare Normierung ist (im Beispiel der Elektrodynamik war $N = 1/c$). D.h. es gilt

$$\frac{dQ_i}{d\xi^0} = 0, \tag{5.30}$$

falls die Stromdichte am Systemrand verschwindet. Pro Parameter ϵ^i in der Symmetrie-Transformation gibt es demnach eine Erhaltungsgröße Q_i .

5.2 Invarianz unter Raumzeit-Translationen²³

Das in Abschnitt 5.1.2 entwickelte Wissen soll im Folgenden auf die mit der Nambu-Goto-Wirkung assoziierte Lagrange-Dichte \mathcal{L} angewendet werden. Hierzu werden die Gleichungen (5.19) und (4.53) miteinander verglichen. Dies zeigt, dass die „Welt“ der zweidimensionale Parameter-Raum ist, d.h. $\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$, $k = 1$. Der Index α kann daher die Werte 0 und 1 annehmen. Weiterhin sind die Felder ϕ^a gerade die String-Koordinaten X^μ , d.h. der Index a entspricht dem Raumzeit-Index μ . \mathcal{L} hängt nur von den Ableitungen $\partial_\alpha \phi^a(\xi) = (\dot{X}^\mu(\tau, \sigma), X'^\mu(\tau, \sigma))$ ab, nicht jedoch von den String-Koordinaten selbst.

In diesem und dem nächsten Abschnitt werden konkrete Variationen δX^μ konstruiert, die Symmetrie-Transformationen der Lagrange-Dichte \mathcal{L} entsprechen, und in Gleichung (5.25) eingesetzt, um die assoziierten Noether-Ströme zu erhalten: In Analogie zu dem Beispiel um Gleichung (5.18) ist \mathcal{L} z.B. invariant unter Raumzeit-Translationen

$$\delta X^\mu = \epsilon^\mu \tag{5.31}$$

bzw.

$$\begin{aligned}
X^\mu &\rightarrow X'^\mu = X^\mu + \epsilon^\mu, \\
\partial_\alpha X^\mu &\rightarrow \partial_\alpha X'^\mu = \partial_\alpha X^\mu + \partial_\alpha \epsilon^\mu = \partial_\alpha X^\mu,
\end{aligned} \tag{5.32}$$

denn genau wie im obigen Beispiel gilt $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot{X}^\mu, X'^\mu)$, sodass

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta (\partial_\alpha X^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \partial_\alpha (\delta X^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \partial_\alpha \epsilon^\mu = 0. \tag{5.33}$$

²³orientiert sich an [1, Kapitel 8.3, 8.4]

Ein Vergleich von Gleichung (5.31), die sich zu $\delta X^\mu = \epsilon^\mu = \epsilon^\nu h_\nu^\mu(X^\mu(\tau, \sigma); \tau, \sigma)$ mit $h_\nu^\mu \equiv \delta_\nu^\mu$ (Kronecker-Delta) umschreiben lässt, mit Gleichung (5.23) zeigt, dass auch der Index i über die Raumzeit-Werte ν läuft. Somit gibt es ν Parameter in der Symmetrie-Transformation und daher auch ν Noether-Ströme und Erhaltungsgrößen.

Das Einsetzen von (5.31) in (5.25) führt unter Verwendung der Definitionen (4.54) zu

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \epsilon^\mu \mathcal{P}_\mu^\alpha, \quad (5.34)$$

d.h. die beiden Komponenten des μ -ten Stroms sind gerade $(j_\mu)^\alpha = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma) = \mathcal{P}_\mu^\alpha$. Die Bewegungsgleichung des relativistischen Strings (4.56) stimmt dann gerade mit der Feststellung überein, dass \mathcal{P}_μ^α ein erhaltener Strom ist:

$$\partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (5.35)$$

\mathcal{P}_μ^τ und \mathcal{P}_μ^σ sind somit die Komponenten eines zweidimensionalen Vektors auf der Weltfläche des Parameter-Raums; \mathcal{P}_μ^τ ist die Komponente entlang der τ - und \mathcal{P}_μ^σ ist die Komponente entlang der σ -Achse.

Analog zu Formel (5.29) können durch Integration der Null-Komponente über die Raum-Koordinaten die mit den μ erhaltenen Strömen assoziierten μ erhaltenen Ladungen berechnet werden:

$$Q_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) \equiv p_\mu(\tau). \quad (5.36)$$

Die Ladungen werden als der D -Impulsvektor interpretiert, da die unterliegenden Symmetrie-Transformationen Zeit- und Raumtranslationen sind. Aus dieser Gleichung ergibt sich die anschauliche Bedeutung der Größe \mathcal{P}_μ^τ : Dies ist die σ -Energieimpulsdichte entlang des Strings. Diese Interpretation ist analog zum nicht-relativistischen Fall, vgl. Gleichung (3.17). Unter Verwendung der Bewegungsgleichung gilt

$$0 \stackrel{?}{=} \frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} = - \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = - [\mathcal{P}_\mu^\sigma(\tau, \sigma)]_0^{\sigma_1}. \quad (5.37)$$

Wenn dieser Ausdruck verschwindet, sind die Komponenten des D -Impulses in Parameter-Raum-Zeit τ erhalten. Dies ist für offene Strings mit freien Randbedingungen (4.59) und für geschlossene Strings mit periodischen Randbedingungen (4.65) der Fall; unterliegt jedoch einer der Endpunkte $X^i(\tau, \sigma_*)$ einer Dirichlet-Randbedingung (4.60), ist die zugehörige Impulskomponente p_i im Allgemeinen nicht erhalten (der Impulsstrom verschwindet nicht am Rand der Weltfläche im Parameter-Raum), wohl aber der Gesamtimpuls von String und D-Brane, an der der String haftet. Auch diese Beobachtung wurde am Ende von Kapitel 3 bereits für nicht-relativistische Strings gemacht.

Weiterhin kann Gleichung (5.36) so interpretiert werden, dass sich der D -Impuls p_μ gerade als Fluss des Stromes $(\mathcal{P}_\mu)^\alpha$ über eine Linie konstanten τ 's im Parameter-Raum ergibt. Der allgemeine Fluss dieses Stromes über einen beliebigen Pfad γ im Parameter-Raum ist gegeben durch

$$p_\mu(\gamma) = \int_\gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau), \quad (5.38)$$

da $\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma) \cdot (d\sigma, -d\tau) = \mathcal{P}_\mu \cdot n$ gerade der infinitesimale Fluss am Ort (τ, σ) des Pfades γ ist, wobei $n_\alpha = (d\sigma, -d\tau)$ gerade der nach außen zeigende Normalenvektor an den Pfad ist. Für einen Pfad konstanten τ 's ist $d\tau = 0$ und (5.38) reduziert sich zu (5.36). Wie in [1, Kapitel 8.4] bewiesen wird, gilt für physikalische Situationen, in denen der Impuls p_μ in τ

erhalten ist (bzw. in denen der Impulsstrom über den Rand der Weltfläche verschwindet), d.h. für offene Strings mit freien Randbedingungen und für geschlossene Strings, dass Gleichung (5.38) für jeden Pfad γ denselben Impuls p_μ liefert, solange der Pfad für offene Strings die Kanten der Parameter-Raum-Weltfläche verbindet und für geschlossene Strings nicht zusammenziehbar ist, d.h. den Parameter-Raum-Zylinder einmal umgibt. Somit gilt

$$p_\mu(\gamma) = p_\mu(\tau) = p_\mu = \text{const} \quad \forall \gamma, \tau \quad (5.39)$$

für die genannten physikalischen Situationen. Da sich die abschließende Rechnung in Abschnitt 8.5 auf offene Strings mit freien Randbedingungen bezieht, d.h. $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$, werden in dieser Arbeit immer Fälle betrachtet, in denen sich

$$p_\mu = \int_\gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau) \quad (5.40)$$

auf das einfachere Integral $p_\mu = \int_0^{\sigma_1} d\sigma \mathcal{P}_\mu^\tau$ reduzieren lässt. Da deswegen Gleichung (5.38) nie explizit benötigt wird, soll der Beweis für das erste Gleichheitszeichen in (5.39) nicht erbracht werden. Allerdings erlaubt (5.38) auch die physikalische Interpretation der zweiten Komponente \mathcal{P}_μ^σ des Noether-Stroms.

Gleichung (5.37) ist ein Erhaltungsgesetz entlang der „Parameter-Raum-Zeit“ τ . Sich die Pfadunabhängigkeit von (5.40) zunutze machend, liefert die Integration des Impulsflusses entlang eines Pfades γ , der die Raumzeit-Punkte der String-Weltfläche mit konstanter Zeit t eines bestimmten Lorentz-Beobachters beschreibt, denselben Wert für den Impuls wie ein Pfad mit konstantem τ . Ist p_μ daher in τ erhalten, ist er somit auch in der „Raumzeit-Zeit“ t erhalten:

$$\frac{dp_\mu}{dt} = 0. \quad (5.41)$$

Alternativ kann man diese Gleichung unter Anwendung der „static gauge“ $\tau = t$ auf $\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0$ erhalten.

5.3 Invarianz unter Lorentz-Transformationen²⁴

Da in der Lagrange-Dichte (4.53) alle Lorentz-Indizes in relativistischen Skalarprodukten zu Lorentz-Skalaren kontrahiert werden, ist sie neben den gerade untersuchten Raumzeit-Translationen auch invariant unter Lorentz-Transformationen. Lorentz-Transformationen sind folglich Symmetrie-Transformationen. In diesem Abschnitt sollen die zugehörigen Lorentz-Ströme und -Ladungen konstruiert werden:

Lorentz-Transformationen sind lineare Transformationen $X^\mu \rightarrow X'^\mu = \Lambda^\mu_\nu X^\nu$, die das Linielement $\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu$ invariant lassen. Bei einer infinitesimalen Transformation entspricht die Matrix Λ ungefähr der Einheitsmatrix, sodass

$$\begin{aligned} X'^\mu &= X^\mu + \delta X^\mu \stackrel{!}{=} (\delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu_\nu) X^\nu = X^\mu + \epsilon^{\mu\nu} X_\nu \\ \Rightarrow \delta X^\mu &= \epsilon^{\mu\nu} X_\nu. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Das Kronecker-Delta δ^μ_ν stellt dabei die Komponenten der Einheitsmatrix dar und $\epsilon^{\mu\nu}$ sind infinitesimale Konstanten. Die Invarianz des Linielements führt zu Einschränkungen dieser

²⁴orientiert sich an [1, Kapitel 8.5]

Konstanten:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \delta(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = \eta_{\mu\nu} \delta X^\mu X^\nu + \eta_{\mu\nu} X^\mu \delta X^\nu = 2\eta_{\mu\nu} \delta X^\mu X^\nu \\
&= 2\eta_{\mu\nu} \epsilon^{\mu\rho} X_\rho X^\nu = 2\epsilon^{\mu\rho} X_\mu X_\rho \\
&= [(\epsilon^{\mu\rho} + \epsilon^{\rho\mu}) + (\epsilon^{\mu\rho} - \epsilon^{\rho\mu})] X_\mu X_\rho.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Hierbei wurde beim letzten Gleichheitszeichen der ersten Zeile die Symmetrie des metrischen Tensors verwendet, in der zweiten Zeile der Index ν herunter geholt und in der dritten Zeile wurde ϵ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Teil aufgespalten. Mit $\epsilon_{sym}^{\mu\rho} = 1/2(\epsilon^{\mu\rho} + \epsilon^{\rho\mu})$ und $\epsilon_{asym}^{\mu\rho} = 1/2(\epsilon^{\mu\rho} - \epsilon^{\rho\mu})$ gilt weiterhin

$$0 = 2\epsilon_{sym}^{\mu\rho} X_\mu X_\rho + \epsilon^{\mu\rho} X_\mu X_\rho - \epsilon^{\rho\mu} X_\mu X_\rho = 2\epsilon_{sym}^{\mu\rho} X_\mu X_\rho \quad \forall X_\mu, X_\rho, \tag{5.44}$$

weswegen $\epsilon_{sym}^{\mu\rho} \equiv 0$ und

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\rho} &= \epsilon_{sym}^{\mu\rho} + \epsilon_{asym}^{\mu\rho} = \epsilon_{asym}^{\mu\rho} = \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\rho} - \epsilon^{\rho\mu}) \\
\Rightarrow \epsilon^{\mu\rho} &= -\epsilon^{\rho\mu}
\end{aligned} \tag{5.45}$$

ist. Infinitesimale Lorentz-Transformationen schreiben sich daher als

$$\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu, \quad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}. \tag{5.46}$$

Ein Vergleich mit (5.25) zeigt, dass die Indizes μ, ν hier die Rolle des Index i , der die Parameter der Symmetrie-Transformation nummeriert, spielen:

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu. \tag{5.47}$$

Damit dies für beliebige $\epsilon^{\mu\nu}$ gelten kann, muss

$$j_{\mu\nu}^\alpha \stackrel{?}{=} \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu \tag{5.48}$$

sein; wegen der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu}$ lässt sich jedoch weiterhin spezifizieren

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha &= \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{2} [(j_{\mu\nu}^\alpha + j_{\nu\mu}^\alpha) + (j_{\mu\nu}^\alpha - j_{\nu\mu}^\alpha)] \\
&= \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{2} j_{\mu\nu}^\alpha + \frac{\epsilon^{\mu\nu}}{2} j_{\nu\mu}^\alpha + \epsilon^{\mu\nu} (j_{asym})_{\mu\nu}^\alpha \\
&= \epsilon^{\mu\nu} (j_{asym})_{\mu\nu}^\alpha,
\end{aligned} \tag{5.49}$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen durch Vertauschung der Indizes im zweiten Term der zweiten Zeile und die Anwendung der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu}$ zustande kommt. Wegen $(j_{asym})_{\mu\nu}^\alpha \equiv 1/2(j_{\mu\nu}^\alpha - j_{\nu\mu}^\alpha) \stackrel{!}{=} j_{\mu\nu}^\alpha$ muss auch der Strom $j_{\mu\nu}^\alpha = -j_{\nu\mu}^\alpha$ antisymmetrisch sein, die erste Vermutung (5.48) war daher unvollständig. Die rechte Seite von (5.47) lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned}
\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha &= \epsilon^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu = \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\nu} - \epsilon^{\nu\mu}) \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu - \frac{1}{2} \epsilon^{\nu\mu} \mathcal{P}_\mu^\alpha X_\nu \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha),
\end{aligned} \tag{5.50}$$

wobei für den letzten Schritt die Indizes im zweiten Summanden vertauscht wurden. Der Term

in Klammern ist wie gewünscht antisymmetrisch und daher ein Kandidat für die Noether-Ströme; der Faktor $-\frac{1}{2}$ kann in der Definition weggelassen werden, da die Normierung der Ströme keinen Einfluss auf ihre Erhaltung hat. Somit werden die Lorentz-Ströme definiert als

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha \equiv X_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha, \quad \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = -\mathcal{M}_{\nu\mu}^\alpha, \quad \alpha \in \{\tau, \sigma\}. \quad (5.51)$$

Diese Ströme sind erhalten:

$$\partial_\alpha \mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (5.52)$$

Wenn der Fluss der Lorentz-Ströme über den Rand der Parameter-Raum-Weltfläche verschwindet, sind die ebenfalls antisymmetrischen, assoziierten Lorentz-Ladungen²⁵

$$M_{\mu\nu}(\gamma) = \int_\gamma (\mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau) = -M_{\nu\mu}(\gamma) \quad (5.53)$$

pfadunabhängig,

$$M_{\mu\nu}(\gamma) = M_{\mu\nu}, \quad (5.54)$$

sowie erhalten,

$$\frac{dM_{\mu\nu}}{d\tau} = 0 \stackrel{(5.54)}{=} \frac{dM_{\mu\nu}}{dt}, \quad (5.55)$$

und (5.53) vereinfacht sich zu der in dieser Arbeit gebräuchlichen Form

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma = \int_0^{\sigma_1} (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma \quad (5.56)$$

für einen Pfad γ mit konstantem τ . Der Fluss der Lorentz-Ströme über den Weltflächen-Rand verschwindet, genau wie beim Impulsstrom, für offene Strings mit freien Randbedingungen sowie für geschlossene Strings, da in der Definition (5.51) der Impulsstrom multiplikativ vorkommt.

Wegen ihrer Antisymmetrie gibt es z.B. für $D = 4$ sechs verschiedene Lorentz-Ladungen. Die Ladungen M_{ij} mit $i \neq j$ sind gerade die Drehimpulse $L_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} M_{jk}$ mit dem Levi-Civita-Symbol $\epsilon_{123} = 1$, da sie sich durch Integration der σ -Drehimpulsdichte $X_i \mathcal{P}_j^\tau - X_j \mathcal{P}_i^\tau$ ergeben. Die Ladungen M_{0i} sind mit den drei Boosts assoziiert und legen, zusammen mit der Gesamtenergie E , den Anfangsort des String-Schwerpunkts fest, s. hierzu [1, S. 168].

Die mit der Nambu-Goto-Wirkung assoziierte Lagrange-Dichte (4.53) ist neben Raumzeit-Translationen und Lorentz-Transformationen außerdem noch invariant unter Reparametrisierungen, wie in Kapitel 4 ausführlich diskutiert wurde. Die assoziierten Erhaltungsgrößen sollen in Kapitel 7.4 behandelt werden.

6 Klassische, relativistische Strings in Lichtkegel-Eichung

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie sich die Bewegungsgleichung (4.56) durch geschickte Parametrisierung der Weltfläche zu einer Wellengleichung reduziert, jedoch auf Kosten zweier zusätzlicher Zwangsbedingungen. Dies ist ähnlich zum nicht-relativistischen String, vgl. Gleichungen (3.11) und (3.12). Anschließend wird das Gleichungssystem analysiert und eine vollständige Lösung ausgearbeitet. Dass die Lösung der äußerst komplizierten Bewegungsgleichungen (4.56) nur durch eine sehr geschickte Wahl der Parametrisierung der Weltfläche gelingt, ist der Grund, weswegen die Reparametrisierungsinvarianz der Nambu-Goto-Wirkung

²⁵vgl. (5.38)

in Kapitel 4 so ausführlich diskutiert wurde. Zuletzt wird eine Formel für die Masse einer beliebigen String-Konfiguration hergeleitet.

Zuvor sollen noch zwei Konventionen eingeführt werden. Als Erstes soll der sogenannte Steigungsparameter diskutiert werden: Historisch wurde die Stringtheorie, bevor sie zur Kandidatin einer Quantengravitationstheorie wurde, als Theorie starker Wechselwirkungen studiert. Zu dieser Zeit war die Quantenchromodynamik noch unbekannt. Damals sollte die Stringtheorie unter anderem dazu verwendet werden, sogenannte Regge-Trajektorien zu erklären; diese beschreiben den linearen Zusammenhang zwischen dem Drehimpuls J von hadronischen Anregungen, gemessen in Einheiten von \hbar , und dem Quadrat ihrer Energie $E^2 : \frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2$ [1, Kapitel 8.6], [?, ca. 5Min 30s]. Die Proportionalitätskonstante α' wird „Steigungsparameter“ (engl. slope parameter) genannt und hat die Einheit

$$[\alpha'] = [E]^{-2}. \quad (6.1)$$

α' kann im Rahmen der Betrachtung eines klassischen, relativistischen Strings, der starr um sein Zentrum rotiert, berechnet werden. Die Berechnung des Drehimpulses erfolgt über die explizite Auswertung des Integrals der Lorentz-Ladungen M_{ij} , $i \neq j$, s. (5.56). Man findet [1, Kapitel 7.4, 8.6]

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c} \text{ bzw. } T_0 = \frac{1}{2\pi \alpha' \hbar c}. \quad (6.2)$$

T_0 und α' können daher synonym verwendet werden. In der restlichen Arbeit soll, wie in der Literatur üblich [1, S. 170], mit dem Steigungsparameter gearbeitet werden. Die Nambu-Goto-Wirkung hat dann die Form

$$S = -\frac{1}{2\pi \alpha' \hbar c^2} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}. \quad (6.3)$$

Es soll angemerkt werden, dass die Proportionalität $J \propto E^2$ ziemlich ungewöhnlich ist, schließlich würde man von einem klassischen, nicht-relativistischen String mit konstanter Massendichte $E = \frac{J^2}{2I} \Rightarrow J \propto \sqrt{E}$ erwarten (I bezeichne das Trägheitsmoment). Genauso wie aus den fundamentalen Konstanten \hbar , c und G (Newton'sche Gravitationskonstante) die Planck-Länge $l_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ konstruiert werden kann, kann aus \hbar , c und α' ebenfalls eine Längeneinheit konstruiert werden, die als String-Länge l_S bezeichnet wird. Mit $l_S = \hbar^\alpha c^\beta \alpha'^\gamma$ und $[l_S] = L$, $[\hbar] = \frac{ML^2}{T}$, $[c] = \frac{L}{T}$ sowie $[\alpha'] = \frac{T^4}{M^2 L^4}$ ergibt sich durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} [l_S] = L &= [\hbar^\alpha c^\beta \alpha'^\gamma] = \frac{M^\alpha L^{2\alpha}}{T^\alpha} \frac{L^\beta}{T^\beta} \frac{T^{4\gamma}}{M^{2\gamma} L^{4\gamma}} = M^{\alpha-2\gamma} L^{2\alpha+\beta-4\gamma} T^{-\alpha-\beta+4\gamma} \\ \Rightarrow \alpha - 2\gamma &= 0, \quad 2\alpha + \beta - 4\gamma = 1, \quad -\alpha - \beta + 4\gamma = 0 \\ \Rightarrow \alpha = \beta &= 1, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (6.4)$$

d.h.

$$l_S = \hbar c \sqrt{\alpha'} \propto \sqrt{\alpha'}. \quad (6.5)$$

Somit können sogar T_0 , α' und l_S synonym verwendet werden. Die String-Länge (bzw. die String-Spannung oder der Steigungsparameter) ist der einzige freie Parameter in der Stringtheorie und legt die Längenskala der Theorie fest.

Als Zweites sollen im Folgenden natürliche Einheiten verwendet werden: Das bedeutet,

dass

$$c = 1 = \hbar \quad (6.6)$$

gesetzt wird. Dadurch verschwinden alle c 's und \hbar 's aus den Gleichungen und die Einheiten L , T und M werden voneinander abhängig:

$$L = T = \frac{1}{M}, \quad (6.7)$$

wodurch nur noch eine Einheit betrachtet werden muss²⁶. Damit werden die Gleichungen (6.3) und (6.5) zu

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}, \quad (6.8)$$

$$l_S = \sqrt{\alpha'}. \quad (6.9)$$

Wie zu Beginn von Abschnitt 4.2.3 diskutiert, sind die Einheiten der Parameter τ und σ frei wählbar. Im Folgenden werden sie als dimensionslos angenommen:

$$[\tau] = 1 = [\sigma]. \quad (6.10)$$

6.1 Parametrisierung der Weltfläche

Es wird eine Klasse vollständiger Parametrisierungen eingeführt. „Vollständig“ bedeutet, dass sowohl die τ - als auch die σ -Abhängigkeit der String-Koordinaten $X^\mu(\tau, \sigma)$ konkretisiert wird. Die in 4.2.3 benutzte „static gauge“ ist als τ -Teil-Parametrisierung in der Klasse enthalten.

6.1.1 τ -Parametrisierung²⁷

In der betrachteten Klasse der τ -Teil-Parametrisierungen sei τ proportional zu einer Linearkombination der String-Koordinaten:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = n \cdot X(\tau, \sigma) = \lambda\tau. \quad (6.11)$$

Für $n_\mu = (1, 0, \dots, 0)$ und $\lambda = c = 1$ erhält man z.B. die static gauge $X^0(\tau, \sigma) = \tau$. Ein anschauliches Verständnis der Eichung (6.11) bekommt man durch die verwandte Gleichung

$$n \cdot x = \lambda\tau, \quad (6.12)$$

wobei kleine x verwendet werden, um zu betonen, dass es sich nicht um String-Koordinaten, sondern um beliebige Raumzeit-Punkte handelt. Alle Ereignisse x^μ , die der Gleichung (6.12) für dasselbe τ genügen, bilden eine zweidimensionale Hyperebene in der Raumzeit, wobei n^μ der Normalenvektor der Ebene ist:

$$n \cdot x_1 - n \cdot x_2 \equiv n \cdot \Delta x = \lambda\tau - \lambda\tau = 0, \quad (6.13)$$

d.h. n^μ und Δx^μ sind orthogonal (im Sinne des relativistischen Skalarprodukts), wobei Δx^μ ein Vektor in der Hyperebene ist. Jeder Hyperebene kann ein festes τ zugeordnet werden. Die τ -Parametrisierung aus Gleichung (6.11) ist daher so zu interpretieren, dass allen Punkten

²⁶in der Elementarteilchenphysik wird z.B. üblicherweise M in Einheiten von GeV benutzt

²⁷orientiert sich an [1, Kapitel 9.1]

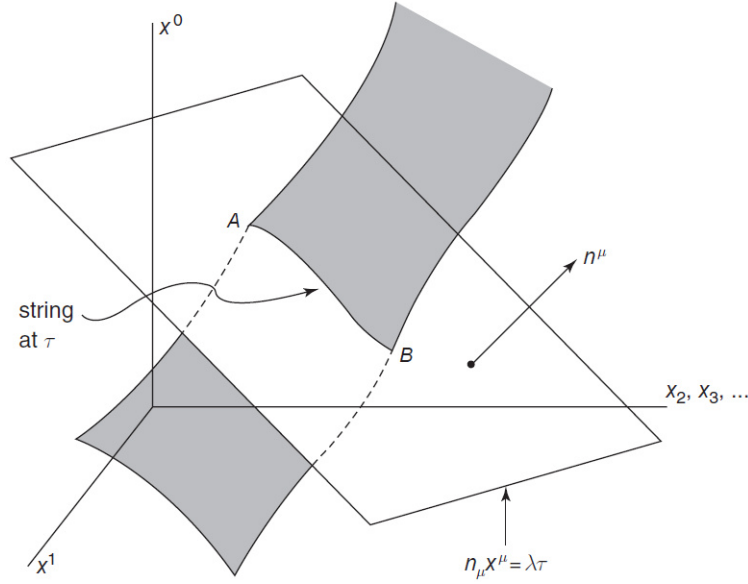


Abbildung 8: Visualisierung der Eichbedingung $n \cdot X = \lambda\tau$. Ein String ergibt sich als Schnittmenge aus der Weltfläche und der Hyperebene orthogonal zu n^μ [1, S. 176].

der String-Weltfläche, die Teil der τ -Hyperebene sind, gerade der Wert τ zugeordnet wird. Ein String besteht aus den Raumzeit-Punkten der Weltfläche, die dasselbe τ besitzen; sie sind daher die Schnittmengen aus Hyperebene und Weltfläche. All dies wird in Abb. 8 visualisiert. In der static gauge ist der Normalenvektor n^μ parallel zur x^0 -Achse, weswegen die Strings gerade die Punkte der Weltfläche sind, die der Lorentz-Beobachter gleichzeitig, d.h. zur Zeit t , sieht.

Strings sollen raumartige Objekte sein, d.h. zwei beliebige Punkte des Strings müssen raumartig getrennt sein²⁸: $(\Delta X)^2 \geq 0$, mit $\Delta X^\mu = X^\mu(\tau, \sigma_1) - X^\mu(\tau, \sigma_2)$. Diese Forderung schränkt die Wahl erlaubter Normalenvektoren auf

$$n^2 \leq 0 \quad (6.14)$$

ein, d.h. n^μ muss zeit- oder lichtartig sein. Dies lässt sich folgendermaßen beweisen:

Es gilt $n \cdot \Delta X = 0$. Diese Bedingung ist Lorentz-invariant.

- Falls $n^2 < 0$ ist, kann ein Lorentz-Beobachter gefunden werden, für den

$$n'_\mu = (n'_0 \neq 0, 0, \dots, 0)$$

ist (d.h. $n'^2 = n^2 < 0$). Damit $0 = n' \cdot \Delta X' = n'_0 \Delta X'^0$ gelten kann, muss $\Delta X'^0 = 0$ sein, da der Normalenvektor nicht der Null-Vektor sein soll. Daher gilt $(\Delta X')^2 = (\Delta X)^2 \geq 0$, wobei Gleichheit gilt, falls $\Delta X^\mu = 0$ der Null-Vektor ist.

- Falls $n^2 = 0$ ist²⁹, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $n_\mu = (1, 1, 0, 0, \dots)$ angenommen werden. Dann ist $0 = n \cdot \Delta X = \Delta X^0 + \Delta X^1$ und somit $\Delta X^\mu = (\Delta X^0, -\Delta X^0, \Delta X^2, \Delta X^3, \dots)$, d.h.

$$(\Delta X)^2 = -(\Delta X^0)^2 + (\Delta X^0)^2 + (\Delta X^2)^2 + (\Delta X^3)^2 \dots = (\Delta X^2)^2 + (\Delta X^3)^2 + \dots \geq 0.$$

²⁸Im Grenzwert beliebig naher Punkte sollten auch lichtartige Tangenten an den String zugelassen werden.

²⁹s. [1, Problem 9.1]

Gleichheit gilt, wenn $\Delta X^\mu = (\Delta X^0, -\Delta X^0, 0, 0 \dots)$ bzw.

$$\Delta X_\mu = (-\Delta X^0, -\Delta X^0, 0, 0 \dots) = -\Delta X^0 n_\mu \propto n_\mu,$$

d.h. $n \cdot \Delta X = -\Delta X^0 n^2 = 0$ ist erfüllt. \square

Zusätzlich zu (6.14) wird die Wahl des Normalenvektors weiterhin dadurch eingeschränkt, dass

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0 \quad (6.15)$$

für die Endpunkte $\sigma_* \in \{0, \sigma_1\}$ offener Strings sei. Dann ist nämlich $n \cdot p$ in τ erhalten:

$$\frac{d}{d\tau}(n \cdot p) = n_\mu \frac{dp^\mu}{d\tau} \stackrel{(5.37)}{=} -[n \cdot \mathcal{P}^\sigma(\tau, \sigma)]_0^{\sigma_1}. \quad (6.16)$$

Die rechte Seite verschwindet für geschlossene Strings mit periodischen Randbedingungen (4.65) und für offene Strings mit freien Randbedingungen (4.59). Die Forderung (6.15) führt schließlich auch zum Verschwinden der rechten Seite für offene Strings mit Dirichlet-Randbedingungen: Unterliegt einer der beiden $\mu = i$ -ten Endpunkte einer Dirichlet-Randbedingung, muss

$$n_i = 0 \quad (6.17)$$

gelten, damit (6.15) erfüllt ist. Zusammenfassend gilt für alle drei Fälle

$$\frac{d}{d\tau}(n \cdot p) = 0, \quad (6.18)$$

d.h. $n \cdot p$ ist eine Konstante.

Damit lässt sich die Konstante λ in (6.11) spezifizieren: Zunächst lässt sich die Parametrisierung umschreiben zu

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \tilde{\lambda}(n \cdot p) \tau. \quad (6.19)$$

Da der Normalenvektor nun auf beiden Seiten der Gleichung auftritt, ist nur noch seine Richtung, aber nicht mehr seine Länge relevant. Die natürliche Einheit der neuen Konstante $\tilde{\lambda}$ ist

$$[\tilde{\lambda}] = \left[\frac{n \cdot X}{(n \cdot p) \tau} \right] = \frac{1 \cdot L}{(1 \cdot M) 1} = \frac{1}{M^2} \stackrel{(6.1)}{=} [\alpha'], \quad (6.20)$$

weswegen $\tilde{\lambda} \propto \alpha'$ angenommen wird. Wähle $\tilde{\lambda} = 2\alpha'$ für offene und $\tilde{\lambda} = \alpha'$ für geschlossene Strings. Daraus ergibt sich die endgültige Parametrisierung zu

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau \quad (6.21)$$

mit

$$\beta = \begin{cases} 2 & \text{für offene Strings,} \\ 1 & \text{für geschlossene Strings.} \end{cases} \quad (6.22)$$

6.1.2 σ -Parametrisierung³⁰

Die σ -Parametrisierung soll so gewählt werden, dass die „Energieimpulsdichte“³¹ $n_\mu \mathcal{P}^{\tau\mu} = n \cdot \mathcal{P}^\tau$ konstant entlang jeden Strings ist, d.h.

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot \mathcal{P}^\tau) = 0. \quad (6.23)$$

Gleich große, infinitesimale Intervalle $d\sigma$ entlang eines Strings im Parameter-Raum beschreiben daher unterschiedlich große, infinitesimale Intervalle des Strings in der Raumzeit, die jedoch alle denselben Impuls $n \cdot dp$ tragen. Per Integration lässt sich dies auf endliche Intervalle verallgemeinern; beispielsweise ist der σ -Wert, der einem Punkt auf einem String zugeordnet wird, proportional zum Impuls, den das Stück String vom $\sigma = 0$ -Endpunkt bis zu diesem Punkt trägt. Je größer die Energieimpulsdichte auf einem Stück String ist, desto schneller ändert sich dort der σ -Wert. Stellt man sich die Parametrisierung als ein Netz auf der Weltfläche mit Linien konstanten σ 's vor, sogenannten σ -Koordinaten-Linien, so ist auf einem gewählten String die Differenz der σ -Werte zweier Linien proportional zur Impulsenergie $n \cdot p$, den das Stück String zwischen den Linien trägt.

Weiterhin können die σ -Werte aller σ -Koordinaten-Linien mit einem konstanten Faktor multipliziert werden. Dadurch ändert sich nur das σ -Intervall, mit dem der gesamte String parametrisiert wird, die Eigenschaft der konstanten Energieimpulsdichte bleibt dadurch unverändert. σ_1 ist daher frei wählbar. Konventionsgemäß ist

$$\sigma \in \left[0, \frac{2\pi}{\beta}\right] = \begin{cases} [0, \pi] & \text{für offene Strings,} \\ [0, 2\pi] & \text{für geschlossene Strings.} \end{cases} \quad (6.24)$$

$n \cdot \mathcal{P}^\tau \stackrel{(6.23)}{=} a(\tau)$ ist im Allgemeinen noch eine Funktion von τ , variiert also von String zu String. Eine Integration dieser Gleichung ergibt allerdings

$$\int_0^{2\pi/\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau d\sigma = a(\tau) \frac{2\pi}{\beta} \stackrel{(5.36)}{=} n \cdot p. \quad (6.25)$$

Wegen (6.18) ist $a(\tau) = \frac{n \cdot p}{2\pi/\beta} = a = n \cdot \mathcal{P}^\tau$ für alle Arten von Randbedingungen auch τ -unabhängig und damit eine Konstante auf der gesamten Weltfläche.

$$n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta} n \cdot \mathcal{P}^\tau \quad (6.26)$$

ist die implizite Gleichung für die σ -Teil-Parametrisierung der betrachteten Klasse von Parametrisierungen.

Berechnet man das Skalarprodukt der Bewegungsgleichung mit dem Normalenvektor n^μ , ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (6.26)

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tau} (n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = \frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma), \quad (6.27)$$

d.h. auch $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ ist entlang der Strings konstant (vgl. mit (6.23)). Für offene Strings war

³⁰orientiert sich an [1, Kapitel 9.2]

³¹vgl. (5.36)

$n \cdot \mathcal{P}^\sigma(\tau, \sigma_*) = 0$, s. (6.15), d.h. es gilt sogar

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0 \quad \forall \tau, \sigma \text{ für offene Strings.} \quad (6.28)$$

Für geschlossene Strings ist die σ -Parametrisierung uneindeutig, da die σ -Koordinaten-Linie, die den Wert $\sigma = 0$ zugeordnet bekommt, beliebig gewählt werden kann; Rotationen der zylinderförmigen Weltfläche im Parameter-Raum verändern die konstante Energieimpulsdichte entlang der Strings nicht. Nachdem ein beliebiger Punkt der Weltfläche ausgewählt wurde und den Wert $\sigma = 0$ zugeschrieben bekommt, kann aber von dort ausgehend die $\sigma = 0$ -Koordinaten-Linie so konstruiert werden, dass gerade $n \cdot \mathcal{P}^\sigma(\tau, \sigma = 0) = 0$ gilt. Die genaue Konstruktion wird in [1, S. 180 f.] beschrieben. Da Gleichung (6.27) auch für geschlossene Strings gilt, folgt

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0 \quad \forall \tau, \sigma \text{ für offene und geschlossene Strings.} \quad (6.29)$$

Zusammenfassend sind die wichtigen Gleichungen diesen Abschnitts die Parametrisierungen (6.21) und (6.26) sowie die resultierende Gleichung (6.29). Alle drei gelten für geschlossene und offene Strings mit beliebigen Randbedingungen. Der in allen drei Gleichungen vorkommende Normalenvektor n^μ unterliegt den Bedingungen (6.14) und (6.15). Die Terme $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ und $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ sind konstant auf der gesamten Weltfläche, d.h. alle τ - und σ -Ableitungen verschwinden.

6.2 Wellengleichung und Zwangsbedingungen³²

Die Ausdrücke (4.54) für die Energieimpulsdichten vereinfachen sich in der betrachteten Klasse von Parametrisierungen. Berechnet man das Skalarprodukt $n \cdot \mathcal{P}^\sigma$ explizit, ergibt sich in natürlichen Einheiten und unter Verwendung von α' statt T_0

$$0 \stackrel{(6.29)}{=} n \cdot \mathcal{P}^\sigma = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\left(\dot{X} \cdot X'\right) \frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot X) - \dot{X}^2 \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot X)}{\sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \stackrel{(6.21)}{=} -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\left(\dot{X} \cdot X'\right) \beta \alpha' (n \cdot p)}{\sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - \dot{X}^2 X'^2}}. \quad (6.30)$$

Da $(n \cdot p) \neq 0$ ist, kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad \forall \tau, \sigma \quad (6.31)$$

ist. Dies ist die erste Zwangsbedingung, die aus der gewählten Parametrisierung folgt. Berechnet man das Skalarprodukt $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ explizit, ergibt sich in natürlichen Einheiten und unter Verwendung von α' statt T_0

$$\frac{\beta}{2\pi} (n \cdot p) \stackrel{(6.26)}{=} n \cdot \mathcal{P}^\tau = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\left(\dot{X} \cdot X'\right) \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot X) - X'^2 \frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot X)}{\sqrt{\left(\dot{X} \cdot X'\right)^2 - \dot{X}^2 X'^2}} \stackrel{(6.21)}{=} \stackrel{(6.31)}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \beta \alpha' (n \cdot p)}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}, \quad (6.32)$$

d.h.

$$1 = \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \Rightarrow \dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad \forall \tau, \sigma. \quad (6.33)$$

³²orientiert sich an [1, Kapitel 9.3]

Dies ist die zweite Zwangsbedingung. Bildet man die unabhängigen Linearkombinationen (6.33) \pm 2(6.31), so lassen sich die beiden Zwangsbedingungen zusammenfassen zu

$$\left(\dot{X} \pm X'\right)^2 = 0. \quad (6.34)$$

Die Zwangsbedingungen haben diese Form unabhängig von der Wahl von β , das sich erwartungsgemäß herauskürzt.

Die Anwendung der Zwangsbedingungen auf (4.54) ergibt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau\mu} &\stackrel{(6.31)}{=} -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{0 \cdot X'^\mu - X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{0 - \dot{X}^2 X'^2}} \stackrel{(6.33)}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2}{|X'^2|} \dot{X}^\mu, \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} &\stackrel{(6.31)}{=} -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{0 \cdot \dot{X}^\mu - \dot{X}^2 X'^\mu}{\sqrt{0 - \dot{X}^2 X'^2}} \stackrel{(6.33)}{=} -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2}{|X'^2|} X'^\mu. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Da X'^μ ein Tangentialvektor an den String ist, ist er raumartig, d.h. $X'^2 > 0$, sodass $\frac{X'^2}{|X'^2|} = 1$ ist. Somit sind die Energieimpulsdichten einfach proportional zu den Ableitungen der String-Koordinaten:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau\mu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu, \\ \mathcal{P}^{\sigma\mu} &= -\frac{1}{2\pi\alpha'} X'^\mu. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Die zweite Zeile rechtfertigt im Nachhinein die Einstufung von freien Randbedingungen als Neumann-Randbedingungen, vgl. den Text unterhalb von (4.59).

Die Bewegungsgleichung

$$0 = \frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \ddot{X}^\mu - \frac{1}{2\pi\alpha'} X''^\mu \quad (6.37)$$

vereinfacht sich zu einer Wellengleichung (natürliche Einheiten):

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0. \quad (6.38)$$

In den bisherigen Ausführungen dieser Arbeit wurde stets auf die verschiedenen Möglichkeiten eines offenen Strings mit freien oder mit Dirichlet-Randbedingungen sowie eines geschlossenen Strings eingegangen³³. Alle drei Fälle werden von derselben Wellengleichung (6.38) und denselben Zwangsbedingungen (6.34) beschrieben und unterscheiden sich nur durch die Randbedingungen (4.59), (4.60) oder (4.65) und die damit verknüpfte gültige oder ungültige Impulserhaltung.

6.3 Vollständige Lösung durch Fourier-Entwicklung und Lichtkegel-Eichung³⁴

Im Folgenden wird nur noch der offene String mit freien Randbedingungen untersucht, für den auch die abschließende Rechnung in Abschnitt 8.5 durchgeführt werden wird. Die vollständige Lösung in diesem Abschnitt bezieht sich nur auf offene, freie Strings.

Der allgemeinste Ansatz für $X^\mu(\tau, \sigma)$, der die Wellengleichung (6.38) löst, ist

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \{f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)\}, \quad (6.39)$$

³³mit Ausnahme des nicht-relativistischen Strings in Kapitel 3, in dem nur offene Strings betrachtet wurden

³⁴orientiert sich an [1, Kapitel 9.4, 9.5]

wobei $f^\mu(u)$ und $g^\mu(u)$ beliebige reelle³⁵ Funktionen eines Arguments sind, die dieselbe Einheit wie X^μ besitzen:

$$[f^\mu] = [g^\mu] = [X^\mu] = L = \frac{1}{M}. \quad (6.40)$$

Es gilt nämlich

$$\frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \sigma^2} = \frac{1}{2} \{f''^\mu(\tau + \sigma) - (-g''^\mu(\tau - \sigma))\} = \frac{1}{2} \{f''^\mu(\tau + \sigma) + g''^\mu(\tau - \sigma)\} = \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial \tau^2}, \quad (6.41)$$

d.h. der Ansatz löst die Wellengleichung. Die Striche stehen für Ableitungen nach dem Argument u .

Der String unterliege ausschließlich freien Randbedingungen (4.59) (entspricht einer raumfüllenden D-Brane). Wegen (6.36) gelten die Neumann-Bedingungen

$$X'^\mu(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \sigma_* \in \{0, \pi\}. \quad (6.42)$$

Für $\sigma_* = 0$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) &= \frac{1}{2} \{f'^\mu(\tau) - g'^\mu(\tau)\} = 0 \quad \forall \tau \\ \Rightarrow f'^\mu(u) &= g'^\mu(u) \\ \Rightarrow g^\mu(u) &= f^\mu(u) + c^\mu \end{aligned} \quad (6.43)$$

mit einer Konstante c^μ . Setzt man dies in den Ansatz (6.39) ein und benennt $f^\mu \rightarrow f^\mu + \frac{c^\mu}{2}$ um, kann die Konstante in die Definition von f^μ absorbiert werden:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} \{f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)\}. \quad (6.44)$$

Für $\sigma_* = \pi$ folgt damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) &= \frac{1}{2} \{f'^\mu(\tau + \pi) - f'^\mu(\tau - \pi)\} = 0 \quad \forall \tau \\ \xrightarrow{u \equiv \tau - \pi} f'^\mu(u + 2\pi) &= f'^\mu(u) \quad \forall u, \end{aligned} \quad (6.45)$$

d.h. $f'^\mu(u)$ ist eine 2π -periodische Funktion. Da dies ein natürliches Intervall ist, war die Wahl $\sigma \in [0, \pi]$ für offene Strings sinnvoll. Die Funktion $f'^\mu(u)$ kann in eine reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$\begin{aligned} f'^\mu(u) &= f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu)) \\ \int du f'^\mu(u) &= f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n^\mu}{n} \sin(nu) - \frac{b_n^\mu}{n} \cos(nu) \right) \equiv f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)) \end{aligned} \quad (6.46)$$

mit den neuen Koeffizienten $A_n^\mu = -\frac{b_n^\mu}{n} \in \mathbb{R}$ und $B_n^\mu = \frac{a_n^\mu}{n} \in \mathbb{R}$. Die Reellwertigkeit der Koeffizienten f_0^μ , f_1^μ , A_n^μ und B_n^μ folgt aus der Reellwertigkeit von X^μ und dem Ansatz (6.44). Wegen (6.40) sind die Entwicklungskoeffizienten außerdem dimensionsbehaftet. Dies schließt die Analyse der Randbedingungen.

Das Einsetzen von (6.46) in den Ansatz (6.44) führt nach der Anwendung der Additions-

³⁵da X^μ reell ist

theoreme auf

$$\begin{aligned}
& A_n^\mu \cos(n(\tau + \sigma)) + B_n^\mu \sin(n(\tau + \sigma)) + A_n^\mu \cos(n(\tau - \sigma)) + B_n^\mu \sin(n(\tau - \sigma)) \\
&= A_n^\mu \{ \cos(n\tau) \cos(n\sigma) - \sin(n\tau) \sin(n\sigma) + \cos(n\tau) \cos(n\sigma) + \sin(n\tau) \sin(n\sigma) \} \\
&+ B_n^\mu \{ \sin(n\tau) \cos(n\sigma) + \sin(n\sigma) \cos(n\tau) + \sin(n\tau) \cos(n\sigma) - \sin(n\sigma) \cos(n\tau) \} \\
&= 2 (A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \cos(n\sigma)
\end{aligned} \tag{6.47}$$

zu

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \cos(n\sigma). \tag{6.48}$$

Zur weiteren physikalischen Einsicht sollen drei weitere Notationen eingeführt werden:

- Die Null-Mode f_0^μ entspricht einer konstanten Verschiebung der gesamten Weltfläche. Sie wird im Folgenden bezeichnet mit

$$x_0^\mu \equiv f_0^\mu. \tag{6.49}$$

- Es werden die neuen, komplexen Koeffizienten

$$a_n^\mu \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\alpha'}} (B_n^\mu - iA_n^\mu) \in \mathbb{C}, \quad a_n^{\mu*} \equiv \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n}{2\alpha'}} (B_n^\mu + iA_n^\mu) \in \mathbb{C} \tag{6.50}$$

eingeführt, wobei der Stern für die komplexe Konjugation steht. Wegen

$$[A_n^\mu] = [B_n^\mu] = [X^\mu] = \frac{1}{M} = [\sqrt{\alpha'}] \tag{6.51}$$

sind diese Koeffizienten dimensionslos. In der quantisierten Version der Theorie (s. Kapitel 8) werden dies Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Die Summanden in (6.48) lassen sich dann umschreiben zu

$$\begin{aligned}
A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) &= A_n^\mu \frac{1}{2} (e^{in\tau} + e^{-in\tau}) - B_n^\mu \frac{i}{2} (e^{in\tau} - e^{-in\tau}) \\
&= -\frac{i}{2} \{ e^{in\tau} (B_n^\mu + iA_n^\mu) - e^{-in\tau} (B_n^\mu - iA_n^\mu) \} \\
&\stackrel{(6.50)}{=} -i \sqrt{\frac{2\alpha'}{n}} \{ e^{in\tau} a_n^{\mu*} - e^{-in\tau} a_n^\mu \}.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Die String-Koordinaten haben dann die Form

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + f_1^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\tau} a_n^{\mu*} - e^{-in\tau} a_n^\mu) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}. \tag{6.53}$$

- f_1^μ ist proportional zum Impuls p^μ des Strings, denn es gilt

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}^{\tau\mu} \stackrel{(6.36)}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu \stackrel{(6.53)}{=} \frac{1}{2\pi\alpha'} \left\{ f_1^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\tau} a_n^{\mu*} + e^{-in\tau} a_n^\mu) \sqrt{n} \cos(n\sigma) \right\} \\
\Rightarrow p^\mu &= \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\alpha'} f_1^\mu + \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (e^{in\tau} a_n^{\mu*} + e^{-in\tau} a_n^\mu) \sqrt{n} \int_0^\pi d\sigma \cos(n\sigma) \right\} \\
\Rightarrow p^\mu &= \frac{1}{2\alpha'} f_1^\mu.
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass

$$\int_0^\pi d\sigma \cos(n\sigma) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{6.55}$$

Mit $f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu$ ergibt sich

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\tau} a_n^{\mu*} - e^{-in\tau} a_n^\mu) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}. \tag{6.56}$$

Die drei Terme entsprechen der räumlichen Null-Mode, dem D -Impuls des Strings und den String-Oszillationen. Die gefundene Lösung der Wellengleichung unter freien Randbedingungen ist daher leicht physikalisch interpretierbar. Sind alle $a_n^\mu = 0$, so entfällt die σ -Abhängigkeit und $X^\mu(\tau) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau$ beschreibt die Bewegung eines freien Punktteilchens. Es ist leicht nachprüfbar, dass $X^\mu(\tau, \sigma)^* = X^\mu(\tau, \sigma)$, d.h. die String-Koordinaten sind reell.

Weiterhin werden die folgenden Koeffizienten eingeführt:

$$\begin{aligned}
\alpha_0^\mu &\equiv \sqrt{2\alpha'} p^\mu \in \mathbb{R}, \\
\alpha_n^\mu &\equiv a_n^\mu \sqrt{n} \in \mathbb{C}, \quad \alpha_{-n}^\mu \equiv a_n^{\mu*} \sqrt{n} = \alpha_n^{\mu*} \in \mathbb{C}, \quad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{6.57}$$

Die α_n^μ -Koeffizienten werden als „Moden“ oder „Oszillatoren“ bezeichnet. Sie sind ebenfalls dimensionslos und definiert für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei sich je zwei Koeffizienten mit Indizes $\pm n$ durch komplexe Konjugation in einander umrechnen lassen³⁶. Die unendliche Reihe in (6.56) lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned}
-\sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\tau} a_n^{\mu*} - e^{-in\tau} a_n^\mu) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\tau} a_n^\mu \sqrt{n} \frac{\cos(n\sigma)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(-n)\tau} a_n^{\mu*} \sqrt{n} \frac{\cos(-n\sigma)}{-n} \\
&\stackrel{(6.57)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-in\tau} \alpha_n^\mu \frac{\cos(n\sigma)}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i(-n)\tau} \alpha_{-n}^\mu \frac{\cos(-n\sigma)}{-n} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} e^{-in\tau} \alpha_n^\mu \frac{\cos(n\sigma)}{n}.
\end{aligned} \tag{6.58}$$

Im ersten Schritt wurde die Symmetrie des Kosinus ausgenutzt und im letzten Schritt wurde $n \rightarrow -n$ im zweiten Term umbenannt. Mit all diesen Konventionen ist die endgültige Lösung

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \tag{6.59}$$

³⁶ dies gilt auch für $n = 0$

Eine vollständige Lösung ist daher gegeben, wenn die Konstanten x_0^μ und α_n^μ für $n \geq 0$ spezifiziert werden.

Ausgedrückt durch die α_n^μ -Moden nehmen die Ableitungen und die Linearkombinationen der Ableitungen der String-Koordinaten eine übersichtliche Form an:

$$\dot{X}^\mu(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (6.60)$$

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \sin(n\sigma), \quad (6.61)$$

$$\left(\dot{X}^\mu \pm X'^\mu\right)(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (6.62)$$

Bisher wurden die beiden Zwangsbedingungen (6.34) noch nicht berücksichtigt. Diese schränken die freie Wahl der Konstanten x_0^μ und α_n^μ ($n \geq 0$) ein. Beliebiges Festsetzen der Null-Moden und Oszillatoren führt im Allgemeinen zu Lösungen (6.59), die die Zwangsbedingungen nicht erfüllen.

Um die Zwangsbedingungen einzubeziehen, wird eine bestimmte Parametrisierung aus der betrachteten Klasse ausgewählt. Dies ist die sogenannte „light-cone gauge“. Sie wird spezifiziert durch die Auswahl eines konkreten Normalenvektors:

$$n_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots \right). \quad (6.63)$$

Dieser Vektor ist lichtartig und erfüllt daher die Bedingung (6.14). Da $n_1 \neq 0$ ist, müssen die beiden Endpunkte entlang der x^1 -Richtung freien Randbedingungen unterliegen (s. (6.15) bzw. (6.17))³⁷. Unter Verwendung von Lichtkegel-Koordinaten gilt somit $n \cdot X = X^+$ und $n \cdot p = p^+$. Die beiden Parametrisierungsbedingungen (6.21) und (6.26) lauten dann (mit $\beta = 2$ für offene Strings)

$$\begin{aligned} X^+(\tau, \sigma) &= 2\alpha' p^+ \tau \equiv \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau, \\ p^+ &= \pi \mathcal{P}^{\tau+}. \end{aligned} \quad (6.64)$$

Die zweite Bedingung besagt, dass die Energieimpulsdichte $\mathcal{P}^{\tau+}$ konstant ist.

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 2.2.3 bleibt (z.B.) Gleichung (6.59) uneingeschränkt gültig, wenn der Index statt über die kovarianten Werte $\mu = 0, 1, \dots, d$ über die Lichtkegel-Werte $\mu = +, -, I$ läuft. Durch die erste Eichbedingung vereinfacht sich die X^+ -Koordinate stark:

$$X^+(\tau, \sigma) = x_0^+ + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^+ e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \stackrel{!}{=} \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau \quad (6.65)$$

Die Lichtkegel-Eichung besteht demnach darin, die folgenden Konstanten 0 zu setzen³⁸:

$$x_0^+ \equiv 0, \quad \alpha_n^+ \equiv 0 \quad \forall n \geq 1. \quad (6.66)$$

Die X^+ -Koordinate wird vollständig durch die Impuls-Null-Mode p^+ (bzw. α_0^+) beschrieben.

Die transversalen String-Koordinaten X^I werden durch die Zwangsbedingungen nicht wei-

³⁷Das Koordinatensystem kann immer so gelegt werden, dass dies keine Einschränkung darstellt.

³⁸Wegen $\alpha_{-n}^\mu = \alpha_n^{\mu*}$ verschwinden auch die Oszillatoren mit negativem Index.

ter eingeschränkt:

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^I\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (6.67)$$

Die Konstanten x_0^I und α_n^I ($n \geq 0$) können frei gewählt werden.

Die allgemeine Reihen-Entwicklung der X^- -Koordinate ist

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^-\tau + i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n \neq 0} \frac{1}{n}\alpha_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (6.68)$$

Wegen der Zwangsbedingungen können die Minus-Moden α_n^- ($n \in \mathbb{Z}$) nicht mehr frei gewählt werden, sondern können durch p^+ und α_n^I ausgedrückt werden. Abgesehen von der Koordinaten-Null-Mode x_0^- ist somit X^- vollständig durch die anderen String-Koordinaten bestimmt. Da X^\pm durch je eine Null-Mode vollständig charakterisiert sind, wird die gesamte „Dynamik“ des Strings von den transversalen String-Koordinaten X^I beschrieben.

Im Folgenden soll die konkrete Abhängigkeit der Minus-Moden α_n^- von den transversalen Moden ermittelt werden. Hierzu werden die Zwangsbedingungen (6.34) in Lichtkegel-Koordinaten ausgewertet (s. (2.21)):

$$\left(\dot{X} \pm X'\right)^2 = -2\left(\dot{X}^+ \pm X'^+\right)\left(\dot{X}^- \pm X'^-\right) + \left(\dot{X}^I \pm X'^I\right)^2 = 0. \quad (6.69)$$

In Lichtkegel-Eichung gilt $\dot{X}^+ = 2\alpha'p^+$ und $X'^+ = 0$, sodass sich die Zwangsbedingungen zu

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{4\alpha'p^+} \left(\dot{X}^I \pm X'^I\right)^2 \quad (6.70)$$

umformen lassen. Dies sind die Zwangsbedingungen in Lichtkegel-Koordinaten und -Eichung; sie können mit den allgemeinen Gleichungen (6.62) für die Linearkombinationen der Ableitungen der String-Koordinaten verglichen werden, woraus sich die konkrete Abhängigkeit der Minus-Moden α_n^- von den transversalen Moden berechnen lassen wird. Der Umformungsschritt ist daher sehr zentral, um die vollständige Lösung zu erhalten. Er wird gleichermaßen durch die Verwendung von Lichtkegel-Koordinaten und durch die Lichtkegel-Eichbedingung ermöglicht: Erstere erlauben wegen der Nebendiagonalelemente der Lichtkegel-Metrik die Umstellung der Gleichung nach $\dot{X}^- \pm X'^-$ ohne das Ziehen einer Wurzel. Wegen Letzterer ist der Term $\left(\dot{X}^+ \pm X'^+\right) = 2\alpha'p^+ \neq 0$, durch den geteilt wird, nur eine Konstante (z.B. keine Funktion mit Nullstellen).

Ist $X^-(P)$ in einem Punkt P der Weltfläche bekannt, kann $X^-(Q)$ in einem anderen Punkt Q per Integration entlang eines (beliebigen) Pfades γ , der die Punkte verbindet, berechnet werden:

$$X^-(Q) = X^-(P) + \int_{\gamma} dX^- = X^-(P) + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial X^-}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial X^-}{\partial \sigma} d\sigma \right). \quad (6.71)$$

Durch Addition und Subtraktion der Gleichungen (6.70) lassen sich $\dot{X}^- = \frac{\partial X^-}{\partial \tau}$ und $X'^- =$

$\frac{\partial X^-}{\partial \sigma}$ durch \dot{X}^I und X'^I ausdrücken, z.B.

$$\begin{aligned}
\dot{X}^- &= \frac{1}{2} \left[\left(\dot{X}^- + X'^- \right) + \left(\dot{X}^- - X'^- \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\alpha' p^+} \left[\left(\dot{X}^I + X'^I \right) \left(\dot{X}^I + X'^I \right) + \left(\dot{X}^I - X'^I \right) \left(\dot{X}^I - X'^I \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{4\alpha' p^+} \left[\dot{X}^I \dot{X}^I + 2\dot{X}^I X'^I + X'^I X'^I + \dot{X}^I \dot{X}^I - 2\dot{X}^I X'^I + X'^I X'^I \right] \\
&= \frac{1}{4\alpha' p^+} \left[\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I \right],
\end{aligned} \tag{6.72}$$

d.h. $X^-(Q)$ hängt tatsächlich nur von den transversalen String-Koordinaten und der Null-Mode $X^-(P) \equiv x_0^-$ ab. Zur Berechnung des genauen Zusammenhangs zwischen den Minus-Moden α_n^- und den transversalen Moden α_n^I werden die Gleichungen (6.62) und (6.70) miteinander verglichen:

$$\begin{aligned}
\dot{X}^- \pm X'^- &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} \stackrel{!}{=} \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(\dot{X}^I \pm X'^I \right) \left(\dot{X}^I \pm X'^I \right) \\
&= \frac{1}{4\alpha' p^+} \left(\sqrt{2\alpha'} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I e^{-ip(\tau \pm \sigma)} \right) \left(\sqrt{2\alpha'} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \alpha_q^I e^{-iq(\tau \pm \sigma)} \right) \\
&= \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)} \\
&= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)}.
\end{aligned} \tag{6.73}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt

$$\alpha_n^- = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \tag{6.74}$$

d.h. auch die Impuls-Null-Mode α_0^- kann so berechnet werden. Dies ist die explizite Form der Minus-Moden, ausgedrückt durch die transversalen Moden (und p^+). Setzt man dies in (6.68) ein, ergibt sich schließlich die Fourier-Reihenentwicklung der X^- -Koordinate.

Damit ist die vollständige Lösung der Wellengleichung unter Berücksichtigung der Zwangs- und Randbedingungen konstruiert: Den Oszillatoren und Null-Moden α_n^I ($n \geq 0$), x_0^I , p^+ und x_0^- können beliebige Werte zugeordnet werden. Durch α_n^I und x_0^I ist X^I und durch p^+ ist X^+ vollständig bestimmt. Aus α_n^I und p^+ lassen sich weiterhin α_n^- berechnen und zusammen mit x_0^- ist auch X^- vollständig bestimmt.

Zuletzt sollen noch die sogenannten transversalen Virasoro-Moden L_n^\perp eingeführt werden:

$$L_n^\perp \equiv \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{6.75}$$

Sie sind gemäß Gleichung (6.74) proportional zu den Minus-Oszillatoren:

$$L_n^\perp = \sqrt{2\alpha'} p^+ \alpha_n^-. \tag{6.76}$$

Insbesondere gilt

$$L_0^\perp = \sqrt{2\alpha'} p^+ \alpha_0^- = 2\alpha' p^+ p^-. \quad (6.77)$$

Werden (6.77) und (6.76) in die Reihen-Entwicklung (6.68) eingesetzt, wird deutlich, dass die transversalen Virasoro-Moden die Expansionsmoden der Minus-Koordinate X^- sind:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^\perp \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (6.78)$$

6.4 Massenformel³⁹

Es ist von Interesse, die Masse M einer beliebigen String-Konfiguration $\{\alpha_n^I, x_0^I, p^+, x_0^-\}$ zu kennen. Dazu berechnet man

$$\begin{aligned} M^2 &= -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I \stackrel{(6.77)}{=} \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I \\ &\stackrel{(6.75)}{=} \frac{1}{2\alpha'} \left\{ \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \sum_{p=-1}^{-\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right\} - p^I p^I \stackrel{p \rightarrow -p}{=} \frac{1}{2\alpha'} \left\{ 2\alpha' p^I p^I + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \right\} - p^I p^I \\ &= \frac{1}{\alpha'} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \end{aligned} \quad (6.79)$$

Ausgedrückt durch die ursprünglichen, komplexen Oszillatoren a_n^I schreibt sich die Massenformel als (s. (6.57))

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n}^I \alpha_n^I = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n^I|^2 \geq 0. \quad (6.80)$$

Die Masse $M = +\sqrt{M^2}$ ist somit reell und nicht negativ. Sie hängt nur von den α_n^I -Moden mit $n \geq 1$ ab, nicht jedoch von α_0^I, x_0^I, p^+ und x_0^- . Da die α_n^I beliebige komplexe Zahlen sind, existieren klassische, relativistische Strings mit kontinuierlichen Massen, was unphysikalisch ist, da die Teilchen in der Natur ein diskretes Spektrum besitzen. Ein weiteres Problem ist, dass es nur eine einzige masselose String-Konfiguration gibt. In dieser sind alle Oszillatoren $\alpha_n^I = 0$, wodurch die σ -Abhängigkeiten von X^I und X^- verschwinden, d.h. nur das Punktteilchen ist masselos. Man findet jedoch keine masselosen Photonen-Zustände. Eine analoge Analyse für den klassischen, relativistischen, geschlossenen String zeigt, dass auch dort keine masselosen Gravitonen-Zustände existieren [1, S. 191]. Beide Probleme treten in der quantisierten Version der Theorie des relativistischen Strings nicht mehr auf.

7 Vorüberlegung: Quantisierung des relativistischen Punktteilchens in Lichtkegel-Eichung

Zur Vorbereitung der Quantisierung des relativistischen Strings im nächsten Kapitel wird im Folgenden das relativistische Punktteilchen, das in Abschnitt 4.1 behandelt wurde, quantisiert. Die beiden Quantisierungen, genannt Lichtkegel-Quantisierungen, werden in Lichtkegel-Koordinaten und Lichtkegel-Eichung durchgeführt. Letzteres bedeutet, dass die $+$ -Koordinate $x^+(\tau)$ der parametrisierten Weltlinie bzw. $X^+(\tau, \sigma)$ der parametrisierten Weltfläche proportional zu τ gewählt wird. Wegen der Sonderrolle der $+$ -Koordinate ist die Lichtkegel-

³⁹ orientiert sich an [1, Kapitel 9.5]

Quantisierung nicht manifest Lorentz-kovariant, sondern die Fälle $\mu = +, -, I$ müssen separat betrachtet werden⁴⁰. Eine Lorentz-kovariante Quantisierung ist zwar formulierbar und, da keine Fallunterscheidungen gemacht werden müssen, eleganter, jedoch komplizierter [1, S. 226 f., S. 46].

In diesem Kapitel wird zunächst die Lichtkegel-Eichung auf das *klassische* Punktteilchen angewendet, wodurch sich die Bewegungsgleichung vereinfacht und eine Lösung gefunden werden kann. Dies verläuft ganz analog zum komplizierteren Fall des Strings, untersucht in Abschnitt 6.3. Danach werden die verschiedenen Bilder zur Zeitentwicklung in der Quantenmechanik wiederholt, bevor schließlich die Quantentheorie des Punktteilchens dargestellt wird. Zuletzt wird untersucht, welche Rolle die klassischen Noether-Ladungen, d.h. die Erhaltungsgrößen, in der Quantentheorie spielen. Die hierbei gefundene Lorentz-Algebra ist eine wichtige Grundlage für die abschließende Rechnung in Abschnitt 8.5.

7.1 Klassische Punktteilchen in Lichtkegel-Eichung⁴¹

Mit der Abkürzung $\dot{x}^2 = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$ und $c = 1$ schreiben sich die Wirkung (4.9) und die Lagrange-Funktion für das klassische, relativistische Punktteilchen als

$$\begin{aligned} S &= -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\dot{x}^2} d\tau, \\ L &= -m \sqrt{-\dot{x}^2}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

wobei $x^\mu(\tau)$ die parametrisierte Weltlinie mit einem beliebigen, dimensionslosen Parameter τ ist. Da die Lagrange-Funktion nur von Ableitungen der Koordinaten abhängt, sind die x^μ zyklisch und ihre Bewegungsgleichungen (5.12) lauten

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \quad (7.2)$$

mit

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}. \quad (7.3)$$

Erwartungsgemäß erfüllt das relativistische Punktteilchen die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$p^2 + m^2 = p_\mu p^\mu + m^2 = \frac{m^2 \dot{x}_\mu \dot{x}^\mu}{-\dot{x}^2} + m^2 = 0. \quad (7.4)$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner in (7.3) von τ abhängen, sind die Bewegungsgleichungen (7.2) nicht trivial lösbar, analog zu (4.56) und (4.54) im Fall des Strings. Wegen der Reparametrisierungsinvarianz der Wirkung kann mit Hilfe einer geschickt gewählten Eichbedingung die Lösung vereinfacht werden. Man wählt die Lichtkegel-Eichung

$$x^+(\tau) = \frac{1}{m^2} p^+ \tau, \quad (7.5)$$

in der x^+ proportional zu τ ist. Das ungewöhnlich erscheinende $\frac{1}{m^2}$ führt wegen $[\tau] = 1$ zur Übereinstimmung der Einheiten und entspricht $\beta\alpha'$ aus Gleichung (6.64). In dieser Eichung

⁴⁰wie bereits in Abschnitt 6.3 geschehen, nachdem die Lichtkegel-Eichung in (6.63) gewählt wurde, vgl. z.B. (6.65), (6.67) und (6.78)

⁴¹orientiert sich an [1, Kapitel 11.1]

wird der Nenner in (7.3) τ -unabhängig:

$$p^+ = \frac{m\dot{x}^+}{\sqrt{-\dot{x}^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m} \implies \dot{x}^2 = -\frac{1}{m^2} < 0. \quad (7.6)$$

Erwartungsgemäß sind die Weltlinien-Tangenten \dot{x}^μ zeitartige Vektoren. Damit vereinfacht sich (7.3) zu

$$\dot{x}^\mu = \frac{p^\mu}{m^2} = \text{const} \quad (7.7)$$

und die Bewegungsgleichung lautet

$$\ddot{x}^\mu = 0. \quad (7.8)$$

Die gewählte Eichbedingung vereinfacht daher, wie beim String, die ursprüngliche Bewegungsgleichung maßgeblich. Die Energie-Impuls-Beziehung (7.4) in Lichtkegel-Koordinaten,

$$p^2 + m^2 = -2p^+p^- + p^I p^I + m^2 = 0 \implies p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2), \quad (7.9)$$

schränkt die freie Wahl aller Impulskomponenten ein und stellt daher eine Zwangsbedingung dar. Durch die Parametrisierung hervorgerufene Zwangsbedingungen, sowie Randbedingungen, gibt es jedoch keine.

Das Lösen der Bewegungsgleichung ist deutlich weniger aufwendig als die analoge Rechnung für den String aus Abschnitt 6.3. Eine Integration von (7.7) nach τ ergibt

$$x^\mu(\tau) = x_0^\mu + \frac{p^\mu}{m^2} \tau. \quad (7.10)$$

Für die transversalen Koordinaten $\mu = I$ gilt folglich

$$x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau, \quad (7.11)$$

wobei x_0^I und p^I durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Ein Vergleich von (7.10) mit (7.5) zeigt, dass durch die Eichbedingung letztlich

$$x_0^+ \equiv 0 \quad (7.12)$$

gesetzt wird. Für die --Koordinate ergibt sich

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau, \quad (7.13)$$

wobei sich p^- gemäß (7.9) aus den anderen Impulsen berechnen lässt. Genau wie beim String ist die „Dynamik“ in den transversalen Koordinaten x^I enthalten und x^\pm sind vollständig durch die „Null-Moden“ p^+ und x_0^- bestimmt.

Eine vollständige Lösung der Bewegungsgleichung und Zwangsbedingung ist somit gefunden: Die unabhängigen

$$\text{dynamischen Variablen } x^I, x_0^-, p^I, p^+ \quad (7.14)$$

können beliebig fixiert werden. Mittels $x_0^I = x^I(\tau) - \frac{p^I}{m^2} \tau$ kann dann x_0^I berechnet werden und die transversalen Koordinaten sind vollständig bestimmt. Aus p^+ kann dann x^+ und aus p^I, p^+ sowie x_0^- kann x^- vollständig konstruiert werden.

7.2 Schrödinger- und Heisenberg-Bild⁴²

In diesem Abschnitt soll die Zeitentwicklung in der Quantenmechanik thematisiert werden. Historisch gibt es drei Bilder, das Schrödinger-, Heisenberg- und Wechselwirkungsbild, wobei Letzteres hier nicht benötigt wird. Im Wesentlichen unterscheiden sich die Bilder dadurch, dass sich im Schrödinger-Bild die Zustände und im Heisenberg-Bild die Operatoren zeitlich entwickeln. Da die dynamischen Variablen einer klassischen Theorie in der zugehörigen Quantentheorie zu Operatoren werden, ist das Heisenberg-Bild näher verwandt mit der klassischen Mechanik als das Schrödinger-Bild.

Im **Schrödinger-Bild** berechnet sich ein Schrödinger-Zustand $|\psi, t\rangle$ zur Zeit t aus einem Anfangszustand $|\psi, t_0\rangle$ zur Zeit t_0 gemäß

$$|\psi, t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi, t_0\rangle, \quad (7.15)$$

wobei der unitäre Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$ eine Funktion des Hamilton-Operators $\hat{H}(t)$ ist. Ist dieser auf Grund eines zeitlich variierenden Potentials explizit zeitabhängig, kann $\hat{U}(t, t_0)$ im Allgemeinen eine beliebig komplizierte Funktion von $\hat{H}(t)$ sein. Für den häufig auftretenden Fall eines zeitlich unabhängigen Hamilton-Operators gilt jedoch (mit $\hbar = 1$)

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-i\hat{H}(t-t_0)}. \quad (7.16)$$

Oft wird $t_0 = 0$ gewählt, sodass

$$|\psi, t\rangle = e^{-i\hat{H}t} |\psi\rangle \quad (7.17)$$

mit $|\psi\rangle \equiv |\psi, 0\rangle$ gilt. Schrödinger-Operatoren wie z.B. der Orts- und Impuls-Operator \hat{x} und \hat{p} sind im Allgemeinen zeitunabhängig. Es können allerdings explizit zeitabhängige Schrödinger-Operatoren aus zeitunabhängigen Schrödinger-Operatoren und der Zeit t konstruiert werden. Beispiele hierfür sind explizit zeitabhängige Hamilton-Operatoren $\hat{H}(t)$, der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$, der statistische Operator $\hat{\rho}(t) \equiv |\psi, t\rangle \langle \psi, t|$ oder Operatoren wie $\hat{x} + \frac{1}{m}\hat{p}t$. Die Bewegungsgleichung für das physikalische System ist die Schrödinger-Gleichung, die die Zeitentwicklung der Schrödinger-Zustände beschreibt:

$$i \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = \hat{H}(t) |\psi, t\rangle. \quad (7.18)$$

Im **Heisenberg-Bild** sind die Zustände die zeitunabhängigen Zustände $|\psi\rangle$, definiert durch

$$|\psi\rangle \equiv |\psi, t_0\rangle = \hat{U}^\dagger(t, t_0) |\psi, t\rangle, \quad (7.19)$$

was sich in vielen physikalischen Beispielen zu $|\psi\rangle = e^{+i\hat{H}t} |\psi, t\rangle$ reduziert. Die Heisenberg-Operatoren $\hat{O}_H(t)$ sind durch

$$\hat{O}_H(t) \equiv \hat{U}^\dagger(t, t_0) \hat{O}_S(t) \hat{U}(t, t_0) \quad (7.20)$$

gegeben. Diese Definition gilt sowohl für explizit zeitabhängige Schrödinger-Operatoren $\hat{O}_S(t)$ als auch für zeitunabhängige Schrödinger-Operatoren $\hat{O}_S(t) = \hat{O}$. In letzterem Fall kann man, genau wie oben bei den Zuständen $|\psi, t\rangle$ bzw. $|\psi\rangle$ praktiziert, bereits anhand der notierten oder nicht notierten Zeitabhängigkeit erkennen, ob es sich um Schrödinger- oder Heisenberg-Operatoren handelt, sodass die Indizierung mit S oder H unnötig wird. Die Indizes S und H sollen nur im Fall explizit zeitabhängiger Operatoren verwendet werden, um die Lesbarkeit der Formeln zu erhöhen. Ist ein Schrödinger-Operator \hat{O} zeitunabhängig, ist der assoziierte

⁴²orientiert sich an [1, Kapitel 11.2]

Heisenberg-Operator $\hat{\mathcal{O}}(t)$ implizit zeitabhängig; dies ist die Zeitabhängigkeit des Zeitentwicklungsoperators. Besitzt ein Schrödinger-Operator $\hat{\mathcal{O}}_S(t)$ eine explizite Zeitabhängigkeit, wird diese ins Heisenberg-Bild übertragen und $\hat{\mathcal{O}}_H(t)$ ist implizit und explizit zeitabhängig. Im Allgemeinen besteht die Möglichkeit, dass sich die implizite und explizite Zeitabhängigkeit eines Operators gegenseitig aufheben, sodass er auch im Heisenberg-Bild zeitunabhängig ist. Die Bewegungsgleichung für das physikalische System ist die Heisenberg-Gleichung, die die Zeitentwicklung der Heisenberg-Operatoren beschreibt:

$$i \frac{d\hat{\mathcal{O}}(t)}{dt} = i \frac{\partial \hat{\mathcal{O}}(t)}{\partial t} + [\hat{\mathcal{O}}(t), \hat{H}(t)], \quad (7.21)$$

wobei $\hat{H}(t) \equiv \hat{H}(\hat{q}(t), \hat{p}(t); t)$ der Heisenberg-Hamilton-Operator ist, der sich gemäß (7.20) aus dem Schrödinger-Hamilton-Operator $\hat{H}(\hat{q}, \hat{p}; t)$ ergibt. \hat{q} und \hat{p} stehen für die Gesamtheit der generalisierten Orts- und Impuls-Operatoren. Der Hamilton-Operator kann im Allgemeinen explizit zeitabhängig sein. Setzt man ihn in die Bewegungsgleichung (7.21) ein, findet man

$$\frac{d\hat{H}(t)}{dt} = \frac{\partial \hat{H}(t)}{\partial t}, \quad (7.22)$$

d.h. für beide Bilder gilt: der Hamilton-Operator ist entweder explizit zeitabhängig oder zeitunabhängig, in welchem Fall die Energie eine Erhaltungsgröße ist; eine implizite Zeitabhängigkeit tritt nicht auf. Für rein implizit zeitabhängige Heisenberg-Operatoren reduziert sich (7.21) zu

$$i \frac{d\hat{\mathcal{O}}(t)}{dt} = [\hat{\mathcal{O}}(t), \hat{H}(t)]. \quad (7.23)$$

Dann ist der Operator $\hat{\mathcal{O}}$ eine Erhaltungsgröße, falls er mit dem Hamilton-Operator kommutiert.

Zusammenfassend gilt daher: Möchte man die Zeitentwicklung eines konkreten physikalischen Systems berechnen, muss zunächst festgelegt werden, ob im Schrödinger- oder im Heisenberg-Bild gearbeitet werden soll, und dann überprüft werden, welcher Zeitabhängigkeit (keine, implizit oder explizit) die Operatoren unterliegen und ob der Hamilton-Operator zeitunabhängig oder (explizit) zeitabhängig ist (gegebenenfalls kann der Zeitentwicklungsoperator kompliziert werden). Dann kann die angemessene Gleichung zur Berechnung der Zeitentwicklung ausgewählt werden.

Physikalische Eigenschaften eines Systems wie Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerte und Varianzen lassen sich gleichermaßen in beiden Bildern berechnen; so gilt z.B. für Skalarprodukte wegen der Unitarität von \hat{U}

$$\langle \psi_1, t | \psi_2, t \rangle = \langle \psi_1 | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle, \quad (7.24)$$

d.h. die Verwendung von Schrödinger- bzw. Heisenberg-Zuständen führt auf dasselbe Ergebnis. Für Erwartungswerte gilt ebenfalls

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_S(t) \rangle(t) = \langle \psi, t | \hat{\mathcal{O}}_S(t) | \psi, t \rangle = \langle \psi | \hat{U}^\dagger \hat{\mathcal{O}}_S(t) \hat{U} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{\mathcal{O}}_H(t) | \psi \rangle. \quad (7.25)$$

Gleiches gilt für Varianzen $\Delta \hat{\mathcal{O}} = \left\langle \left(\hat{\mathcal{O}} - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{A} \rangle$ mit dem Operator $\hat{A} = \left(\hat{\mathcal{O}} - \langle \hat{\mathcal{O}} \rangle \right)^2$. Ist ein Kommutator im Schrödingerbild gegeben, so gilt derselbe Kommutator auch für Heisenberg-Operatoren, und andersherum:

$$[\hat{\alpha}_S(t), \hat{\beta}_S(t)] = \hat{\gamma}_S(t) \iff [\hat{\alpha}_H(t), \hat{\beta}_H(t)] = \hat{\gamma}_H(t), \quad (7.26)$$

denn

$$\begin{aligned}
[\hat{\alpha}_H(t), \hat{\beta}_H(t)] &= [\hat{U}^\dagger \hat{\alpha}_S(t) \hat{U}, \hat{U}^\dagger \hat{\beta}_S(t) \hat{U}] \\
&= \hat{U}^\dagger \hat{\alpha}_S(t) \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{\beta}_S(t) \hat{U} - \hat{U}^\dagger \hat{\beta}_S(t) \hat{U} \hat{U}^\dagger \hat{\alpha}_S(t) \hat{U} \\
&= \hat{U}^\dagger [\hat{\alpha}_S(t), \hat{\beta}_S(t)] \hat{U} \stackrel{\text{Vor.}}{=} \hat{U}^\dagger \hat{\gamma}_S(t) \hat{U} = \hat{\gamma}_H(t).
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Der Beweis für die Rückrichtung wird analog geführt. Z.B. folgt

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \implies [\hat{x}(t), \hat{p}(t)] = i. \tag{7.28}$$

7.3 Lichtkegel-Quantisierung⁴³

In diesem Abschnitt wird die Quantisierung des relativistischen Punktteilchens entwickelt. Dazu werden die klassischen dynamischen Variablen durch Operatoren ersetzt und deren Kommutator-Relationen postuliert. Es wird gefordert, dass die Operatoren die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen.

Zuerst sollen einige Bemerkungen zur Lorentz-kovarianten Quantisierung gemacht werden: Das Punktteilchen werde durch einen Satz zeitunabhängiger Schrödinger-Operatoren \hat{x}^μ und \hat{p}^μ bzw. deren assoziierte, implizit zeitabhängige Heisenberg-Operatoren $\hat{x}^\mu(\tau)$ und $\hat{p}^\mu(\tau)$ beschrieben. τ übernimmt hier die Funktion der Zeit t des letzten Abschnitts. Die Zeit $x^0(\tau)$ wird ebenfalls ein Operator. Es werden die folgenden Kommutator-Relationen postuliert:

$$[\hat{x}^\mu(\tau), \hat{p}^\nu(\tau)] = i\eta^{\mu\nu} \tag{7.29}$$

sowie

$$[\hat{x}^\mu(\tau), \hat{x}^\nu(\tau)] = 0 \quad , \quad [\hat{p}^\mu(\tau), \hat{p}^\nu(\tau)] = 0 \tag{7.30}$$

Gemäß (7.26) gelten die gleichen Kommutatoren auch für die Lorentz-kovarianten Schrödinger-Operatoren. Für $\mu, \nu = 1, \dots, d$ ist $\eta^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}$, wodurch die Kommutator-Relationen plausibel sind. Wegen Gleichung (2.29) können die Kommutatoren in Lichtkegel-Koordinaten ausgewertet werden; z.B. gilt

$$[\hat{x}^+(\tau), \hat{p}^-(\tau)] = i\eta^{+-} = -i. \tag{7.31}$$

Im Folgenden wird die Lichtkegel-Quantisierung entwickelt. Die in (7.14) als unabhängig ausgewählten dynamischen Variablen werden zu zeitunabhängigen Schrödinger-Operatoren erklärt:

$$\hat{x}^I, \hat{x}_0^-, \hat{p}^I, \hat{p}^+. \tag{7.32}$$

Die korrespondierenden Heisenberg-Operatoren besitzen eine implizite Zeitabhängigkeit:

$$\hat{x}^I(\tau), \hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^I(\tau), \hat{p}^+(\tau). \tag{7.33}$$

Die Kommutator-Relationen der vier Lichtkegel-Schrödinger-Operatoren seien

$$[\hat{x}^I, \hat{p}^J] = i\eta^{IJ} = i\delta^{IJ} \quad , \quad [\hat{x}_0^-, \hat{p}^+] = i\eta^{-+} = -i. \tag{7.34}$$

Alle anderen Kommutatoren verschwinden:

$$[\hat{x}^I, \hat{x}^J] = [\hat{x}^I, \hat{x}_0^-] = [\hat{x}^I, \hat{p}^+] = [\hat{x}_0^-, \hat{p}^I] = [\hat{p}^I, \hat{p}^J] = [\hat{p}^I, \hat{p}^+] = 0. \tag{7.35}$$

Gemäß (7.26) gelten die gleichen Kommutatoren auch für die Lichtkegel-Heisenberg-Operatoren.

⁴³orientiert sich an [1, Kapitel 11.3]

In der klassischen Lichtkegel-Theorie des Punktteilchens konnten aus den unabhängigen dynamischen Variablen die Lichtkegel-Koordinaten x^+ und x^- vollständig konstruiert werden. Analog zu den klassischen Formeln werden aus den Basis-Schrödinger-Operatoren (7.32) die zusammengesetzten Schrödinger-Operatoren definiert:

$$\begin{aligned}\hat{x}^+(\tau) &= \frac{\hat{p}^+}{m^2}\tau, \\ \hat{x}^-(\tau) &= \hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2}\tau,\end{aligned}\tag{7.36}$$

mit

$$\hat{p}^- = \frac{1}{2\hat{p}^+} (\hat{p}^I \hat{p}^I + m^2).\tag{7.37}$$

Auf der rechten Seite der drei Gleichheitszeichen stehen nur die zeitunabhängigen Basis-Schrödinger-Operatoren und die Zeit τ (sowie die Masse m). $\hat{x}^+(\tau)$ und $\hat{x}^-(\tau)$ sind explizit zeitabhängige Schrödinger-Operatoren, \hat{p}^- ist zeitunabhängig. Die korrespondierenden Heisenberg-Operatoren lauten

$$\begin{aligned}\hat{x}^+(\tau) &= \frac{\hat{p}^+(\tau)}{m^2}\tau, \\ \hat{x}^-(\tau) &= \hat{x}_0^-(\tau) + \frac{\hat{p}^-(\tau)}{m^2}\tau\end{aligned}\tag{7.38}$$

(implizite und explizite Zeitabhängigkeit)⁴⁴ sowie

$$\hat{p}^-(\tau) = \frac{1}{2\hat{p}^+(\tau)} (\hat{p}^I(\tau)\hat{p}^I(\tau) + m^2)\tag{7.39}$$

(implizite Zeitabhängigkeit). Die Kommutator-Relationen der drei Operatoren mit den Basis-Operatoren sowie untereinander lassen sich auf die in (7.34) und (7.35) postulierten Relationen zurückführen. Beispielsweise gilt

$$[\hat{x}^+(\tau), \hat{p}^-] = \frac{\tau}{2m^2} \left[\hat{p}^+, \frac{1}{\hat{p}^+} (\hat{p}^I \hat{p}^I + m^2) \right] = 0,\tag{7.40}$$

da alle Impulse kommutieren und insbesondere $[\hat{p}^I, \hat{p}^+] = 0$ gilt. Dass im Rahmen der Lorentz-kovarianten Quantisierung $[\hat{x}^+, \hat{p}^-] = -i$ (s. (7.31)), im Rahmen der Lichtkegel-Quantisierung jedoch $[\hat{x}^+, \hat{p}^-] = 0$ gilt, zeigt die Unterschiedlichkeit der beiden Theorien. Die Operatoren beider Varianten werden zwar gleich bezeichnet, da sie aber unterschiedliche Kommutator-Relationen erfüllen handelt es sich um vollkommen verschiedene Objekte.

Um die τ -Entwicklung der sieben Heisenberg-Operatoren (7.33), (7.38) und (7.39) berechnen zu können, wird der Hamilton-Operator definiert, der gemäß der Heisenberg'schen Bewegungsgleichung (7.21) τ -Translation generiert: Die Lichtkegel-Energie \hat{p}^- generiert wegen (2.25) Translationen in der Lichtkegel-Zeit \hat{x}^+ . Wegen der Eichbedingung (erste Zeile in (7.36)) gilt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial \hat{x}^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^+} = \frac{\hat{p}^+}{m^2} \frac{\partial}{\partial \hat{x}^+}.\tag{7.41}$$

⁴⁴ $\hat{x}^+(\tau)$ und $\hat{x}^-(\tau)$ betreffend bietet sich eigentlich eine Indizierung mit S und H an; im Folgenden wird aber aus dem Zusammenhang klar, ob Schrödinger- oder Heisenberg-Operatoren gemeint sind. Andernfalls wird es explizit erwähnt werden.

Demnach wird der Heisenberg-Hamilton-Operator definiert als

$$\hat{H}(\tau) = \frac{\hat{p}^+(\tau)\hat{p}^-(\tau)}{m^2} = \frac{1}{2m^2} (\hat{p}^I(\tau)\hat{p}^I(\tau) + m^2). \quad (7.42)$$

Da τ als Parameter und \hat{H} als Generator gemeinsam in Form $-i\hat{H}\tau$ als Argument der Exponentialfunktion vorkommen, muss das Produkt $\hat{H}\tau$ dimensionslos sein; wegen $[\tau] = 1$ findet man korrekterweise $[\hat{H}] = 1$ in (7.42). Da der Hamilton-Operator nicht explizit zeitabhängig ist, gilt Gleichung (7.22):

$$\frac{d\hat{H}(t)}{dt} = \frac{\partial\hat{H}(t)}{\partial t} = 0, \quad (7.43)$$

d.h. der Hamilton-Operator ist in beiden Bildern zeitunabhängig: $\hat{H}(\tau) = \hat{H}$.

Als Erstes soll die Zeitentwicklung der Impulse untersucht werden. Da $\hat{p}^I(\tau)$, $\hat{p}^+(\tau)$ und $\hat{p}^-(\tau)$ implizit zeitabhängige Operatoren sind, findet die Bewegungsgleichung (7.23) Anwendung:

$$\begin{aligned} i\frac{d\hat{p}^I(\tau)}{d\tau} &= [\hat{p}^I(\tau), \hat{H}] = \frac{1}{2m^2} [\hat{p}^I(\tau), \hat{p}^J(\tau)\hat{p}^J(\tau) + m^2] = 0, \\ i\frac{d\hat{p}^+(\tau)}{d\tau} &= [\hat{p}^+(\tau), \hat{H}] = \frac{1}{2m^2} [\hat{p}^+(\tau), \hat{p}^I\hat{p}^I + m^2] = 0, \\ i\frac{d\hat{p}^-(\tau)}{d\tau} &= [\hat{p}^-(\tau), \hat{H}] = \frac{1}{4m^2} \left[\frac{1}{\hat{p}^+} (\hat{p}^I\hat{p}^I + m^2), \hat{p}^J\hat{p}^J + m^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Alle Kommutatoren verschwinden, da alle Impulse kommutieren und der Hamilton-Operator nur die transversalen Impulse enthält. Die Heisenberg-Impuls-Operatoren sind somit zeitunabhängig: $\hat{p}^\mu(\tau) = \hat{p}^\mu$ für $\mu = +, -, I$.

Als Zweites soll die Zeitentwicklung der implizit zeitabhängigen Heisenberg-Operatoren $\hat{x}_0^-(\tau)$ und $\hat{x}^I(\tau)$ ermittelt werden:

$$\begin{aligned} i\frac{d\hat{x}_0^-(\tau)}{d\tau} &= [\hat{x}_0^-(\tau), \hat{H}] = \frac{1}{2m^2} [\hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^I\hat{p}^I + m^2] = 0, \\ i\frac{d\hat{x}^I(\tau)}{d\tau} &= [\hat{x}^I(\tau), \hat{H}] = \frac{1}{2m^2} [\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J\hat{p}^J + m^2] = \frac{1}{2m^2} [\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J\hat{p}^J] = \frac{1}{2m^2} 2i\hat{p}^I = i\frac{\hat{p}^I}{m^2}. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Im letzten Schritt der ersten Zeile wurde $[\hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^I] = 0$ verwendet und im vorletzten Schritt der zweiten Zeile wurde

$$\begin{aligned} [A, BC] &= B[A, C] + [A, B]C, \\ [AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B, \end{aligned} \quad (7.46)$$

und somit

$$[\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J\hat{p}^J] = \hat{p}^J [\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J] + [\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J] \hat{p}^J = 2i\eta^{IJ}\hat{p}^J = 2i\hat{p}^I \quad (7.47)$$

benutzt. Der Operator $\hat{x}_0^-(\tau) = \hat{x}_0^-$ ist somit wie die Impulse ein zeitunabhängiger Heisenberg-Operator. Eine Integration nach τ und das Kürzen von i führt weiterhin zu

$$\hat{x}^I(\tau) = \hat{x}_0^I + \frac{\hat{p}^I}{m^2}\tau \quad (7.48)$$

mit einem zeitunabhängigen Heisenberg-Operator \hat{x}_0^I (Integrationskonstante). Um zu beweisen, dass der „implizit und explizit zeitabhängige“ Heisenberg-Operator $\hat{x}_0^I(\tau) \equiv \hat{x}^I(\tau) - \frac{\hat{p}^I}{m^2}\tau$

zeitunabhängig ist, $\hat{x}_0^I(\tau) = \hat{x}_0^I$, muss die Bewegungsgleichung (7.21) ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{x}_0^I(\tau)}{d\tau} &= i \frac{\partial \hat{x}_0^I(\tau)}{\partial \tau} + [\hat{x}_0^I(\tau), \hat{H}] = -i \frac{\hat{p}^I}{m^2} + \frac{1}{2m^2} \left[\hat{x}^I(\tau) - \frac{\hat{p}^I}{m^2} \tau, \hat{p}^J \hat{p}^J + m^2 \right] \\ &= -i \frac{\hat{p}^I}{m^2} + \frac{1}{2m^2} [\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J \hat{p}^J] - \frac{\tau}{2m^4} [\hat{p}^I, \hat{p}^J \hat{p}^J] = -i \frac{\hat{p}^I}{m^2} + \frac{1}{2m^2} 2i \hat{p}^I - 0 \\ &= 0. \end{aligned} \quad (7.49)$$

Explizite und implizite Zeitabhängigkeit heben sich gegenseitig auf.

Als Letztes soll die Zeitentwicklung der implizit und explizit zeitabhängigen Heisenberg-Operatoren $\hat{x}^+(\tau)$ und $\hat{x}^-(\tau)$ berechnet werden:

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{x}^+(\tau)}{d\tau} &= i \frac{\partial \hat{x}^+(\tau)}{\partial \tau} + [\hat{x}^+(\tau), \hat{H}] = i \frac{\hat{p}^+}{m^2} + \frac{1}{2m^2} \left[\frac{\hat{p}^+}{m^2} \tau, \hat{p}^I \hat{p}^I + m^2 \right] = i \frac{\hat{p}^+}{m^2}, \\ i \frac{d\hat{x}^-(\tau)}{d\tau} &= i \frac{\partial \hat{x}^-(\tau)}{\partial \tau} + [\hat{x}^-(\tau), \hat{H}] = i \frac{\hat{p}^-}{m^2} + \frac{1}{2m^2} \left[\hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2} \tau, \hat{p}^I \hat{p}^I + m^2 \right] = i \frac{\hat{p}^-}{m^2}. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Die beiden Kommutatoren verschwinden im letzten Schritt, da alle Impulse kommutieren und da $[\hat{x}_0^-, \hat{p}^I] = 0$ ist.

Die gefundene Zeitunabhängigkeit der Impulse und der „Null-Moden“ ist in Analogie zum klassischen Punktteilchen sehr physikalisch. Ebenfalls stimmen die gefundenen Zeitabhängigkeiten der Koordinaten $\hat{x}^\pm(\tau)$ und $\hat{x}^I(\tau)$ mit der klassischen Vorstellung überein. Die Definitionen der Basis-Operatoren und zusammengesetzten Operatoren, der Kommutator-Relationen und des Hamilton-Operators bilden somit eine quantenmechanische Theorie, die aus der klassischen dadurch hervorgeht, dass die den klassischen Variablen entsprechenden Heisenberg-Operatoren die klassischen Bewegungsgleichungen erfüllen. Dieser Zusammenhang zwischen klassischer und quantenmechanischer Theorie ist der angestrebte, wie im ersten Absatz dieses Unterkapitels erklärt wird. Die Lichtkegel-Quantisierung ist demnach gelungen und hiermit abgeschlossen.

7.4 Lorentz-Algebra und -Generatoren⁴⁵

In diesem Abschnitt wird untersucht, welche Funktion die erhaltenen, klassischen Noether-Ladungen in der Quantentheorie des relativistischen Punktteilchens besitzen. Wie sich herausstellen wird werden die Noether-Ladungen zu Operatoren, die, per Kommutator angewandt auf die Koordinaten $\hat{x}^\mu(\tau)$, die (Symmetrie-)Transformation $\hat{x}^\mu(\tau) \rightarrow \hat{x}^\mu(\tau) + \delta \hat{x}^\mu(\tau)$ generieren, die in der klassischen Theorie Anlass für ihre Erhaltung war. In Hinblick auf die Rechnung in Kapitel 8.5 interessieren besonders die Lorentz-Generatoren $\hat{M}^{\mu\nu}(\tau)$, die eine Lie-Algebra, die sogenannte Lorentz-Algebra, erfüllen und Lorentz-Transformationen der Koordinaten generieren. Zunächst werden jedoch die Impuls-Operatoren $\hat{p}^\mu(\tau)$ betrachtet, die die einfachere Lie-Algebra $[\hat{p}^\mu(\tau), \hat{p}^\nu(\tau)] = 0$ erfüllen und Raumzeit-Translationen der Koordinaten generieren.

Da die Lagrange-Funktion (7.1) nur von τ -Ableitungen der Koordinaten x^μ abhängt, ist die Transformation $x^\mu(\tau) \rightarrow x^\mu(\tau) + \delta x^\mu(\tau)$ mit

$$\delta x^\mu(\tau) = \epsilon^\mu \quad (7.51)$$

eine Symmetrie-Transformation und die Impulse p^μ sind die zugehörigen Erhaltungsgrößen. Die genannte Eigenschaft, dass die entsprechenden Heisenberg-Operatoren $\hat{p}^\mu(\tau)$ der

⁴⁵orientiert sich an [1, Kapitel 11.5, 11.6]

Quantentheorie die klassische Symmetrie-Transformation per Kommutation generieren, ist im Rahmen der Lorentz-kovarianten Quantisierung leicht ersichtlich. Da die Lorentz-kovarianten Heisenberg-Orts-Operatoren $\hat{x}^\mu(\tau)$ und -Impuls-Operatoren $\hat{p}^\mu(\tau)$ den Kommutator-Relationen (7.29) genügen, gilt nämlich für den Operator $i\epsilon \cdot \hat{p}(\tau) = i\epsilon_\rho \hat{p}^\rho(\tau)$, angewandt auf $\hat{x}^\mu(\tau)$:

$$[i\epsilon_\rho \hat{p}^\rho(\tau), \hat{x}^\mu(\tau)] = i\epsilon_\rho (-i\eta^{\mu\rho}) = \epsilon^\mu = \delta\hat{x}^\mu(\tau). \quad (7.52)$$

Im Folgenden wird getestet, ob dieses Ergebnis auch für die vollkommen anderen Heisenberg-Impuls-Operatoren \hat{p}^μ aus der Quantisierung in Lichtkegel-Eichung bestehen bleibt. Wie in Kapitel 7.3 ausgeführt sind diese zeitunabhängig, sodass die τ -Abhängigkeit nicht geschrieben wird. Die zugrunde liegenden Kommutator-Relationen sind nun (7.34) und (7.35). Berechnet werden muss

$$\delta\hat{x}^\mu(\tau) = [i\epsilon_\rho \hat{p}^\rho, \hat{x}^\mu(\tau)] = -i\epsilon^+ [\hat{p}^-, \hat{x}^\mu(\tau)] - i\epsilon^- [\hat{p}^+, \hat{x}^\mu(\tau)] + i\epsilon^I [\hat{p}^I, \hat{x}^\mu(\tau)] \quad , \quad \mu = +, -, I. \quad (7.53)$$

Die Beiträge der drei Summanden können separat untersucht werden. Sei dazu als Erstes $\epsilon^+ = \epsilon^- = 0$, $\epsilon^I \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu = + : \delta\hat{x}^+(\tau) &= i\epsilon^I [\hat{p}^I, \hat{x}^+(\tau)] = i\epsilon^I \left[\hat{p}^I, \frac{\hat{p}^+}{m^2}\tau \right] = 0 = \epsilon^+, \\ \mu = - : \delta\hat{x}^-(\tau) &= i\epsilon^I [\hat{p}^I, \hat{x}^-(\tau)] = i\epsilon^I \left[\hat{p}^I, \hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2}\tau \right] = 0 = \epsilon^-, \\ \mu = J : \delta\hat{x}^J(\tau) &= i\epsilon^I [\hat{p}^I, \hat{x}^J(\tau)] = i\epsilon^I (-i\eta^{IJ}) = \epsilon^J. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Der Operator \hat{p}^I generiert somit erwartungsgemäß \hat{x}^I -Translation. Sei als Zweites $\epsilon^+ = \epsilon^I = 0$, $\epsilon^- \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu = + : \delta\hat{x}^+(\tau) &= -i\epsilon^- [\hat{p}^+, \hat{x}^+(\tau)] = -i\epsilon^- \left[\hat{p}^+, \frac{\hat{p}^+}{m^2}\tau \right] = 0 = \epsilon^+, \\ \mu = - : \delta\hat{x}^-(\tau) &= -i\epsilon^- [\hat{p}^+, \hat{x}^-(\tau)] = -i\epsilon^- \left[\hat{p}^+, \hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2}\tau \right] = -i\epsilon^- [\hat{p}^+, \hat{x}_0^-] = -i\epsilon^- i = \epsilon^-, \\ \mu = I : \delta\hat{x}^I(\tau) &= -i\epsilon^- [\hat{p}^+, \hat{x}^I(\tau)] = 0 = \epsilon^I. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Der Operator \hat{p}^+ generiert somit erwartungsgemäß \hat{x}^- -Translation. Sei als Letztes $\epsilon^- = \epsilon^I = 0$, $\epsilon^+ \neq 0$:

$$\begin{aligned} \mu = + : \delta\hat{x}^+(\tau) &= -i\epsilon^+ [\hat{p}^-, \hat{x}^+(\tau)] = -i\epsilon^+ \left[\hat{p}^-, \frac{\hat{p}^+}{m^2}\tau \right] = 0 \neq \epsilon^+, \\ \mu = - : \delta\hat{x}^-(\tau) &= -i\epsilon^+ [\hat{p}^-, \hat{x}^-(\tau)] = -i\epsilon^+ \left[\hat{p}^-, \hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2}\tau \right] \\ &= i\epsilon^+ [\hat{x}_0^-, \hat{p}^-] \stackrel{!}{=} i\epsilon^+ \left(i\frac{\hat{p}^-}{\hat{p}^+} \right) = -\epsilon^+ \frac{\hat{p}^-}{\hat{p}^+} \neq \epsilon^-, \\ \mu = I : \delta\hat{x}^I(\tau) &= -i\epsilon^+ [\hat{p}^-, \hat{x}^I(\tau)] = -i\epsilon^+ \left[\frac{1}{2\hat{p}^+} (\hat{p}^J \hat{p}^J + m^2), \hat{x}^I(\tau) \right] \\ &\stackrel{[\hat{x}^I, \hat{p}^+] = 0}{=} \frac{i\epsilon^+}{2} \frac{1}{\hat{p}^+} [\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J \hat{p}^J] \stackrel{(7.47)}{=} \frac{i\epsilon^+}{2} \frac{1}{\hat{p}^+} 2i\hat{p}^I = -\epsilon^+ \frac{\hat{p}^I}{\hat{p}^+} \neq \epsilon^I. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Das durch das Ausrufezeichen markierte Gleichheitszeichen bedarf einer Begründung:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{x}_0^-, \frac{1}{\hat{p}^+} \right] &= \frac{1}{\hat{p}^+} \hat{p}^+ \hat{x}_0^- \frac{1}{\hat{p}^+} - \frac{1}{\hat{p}^+} \hat{x}_0^- \hat{p}^+ \frac{1}{\hat{p}^+} = \frac{1}{\hat{p}^+} [\hat{p}^+, \hat{x}_0^-] \frac{1}{\hat{p}^+} = \frac{i}{\hat{p}^{+2}}, \\
[\hat{x}_0^-, \hat{p}^-] &= \left[\hat{x}_0^-, \frac{1}{2\hat{p}^+} (\hat{p}^I \hat{p}^I + m^2) \right] = \left[\hat{x}_0^-, \frac{1}{\hat{p}^+} \right] \frac{\hat{p}^I \hat{p}^I}{2} + \left[\hat{x}_0^-, \frac{1}{\hat{p}^+} \right] \frac{m^2}{2} \\
&= \frac{i}{2\hat{p}^{+2}} (\hat{p}^I \hat{p}^I + m^2) = i \frac{\hat{p}^-}{\hat{p}^+}.
\end{aligned} \tag{7.57}$$

Der Operator \hat{p}^- generiert nicht wie erwartet die \hat{x}^+ -Translation. Diese Tatsache resultiert direkt aus der Lichtkegel-Eichbedingung: Eine Translation des \hat{x}^+ -Operators

$$\hat{x}^+(\tau) \rightarrow \hat{x}'^+(\tau) = \hat{x}^+(\tau) + \epsilon^+ = \epsilon^+ + \frac{\hat{p}^+}{m^2} \tau \tag{7.58}$$

würde der Lichtkegel-Eichung $\hat{x}_0^+ \equiv 0$ widersprechen. Um die Eich-Bedingung zu erhalten, generiert der Operator \hat{p}^- zusätzlich zur \hat{x}^+ -Translation

$$\delta_{trans} \hat{x}^+(\tau) = \epsilon^+ \tag{7.59}$$

eine Reparametrisierung

$$\tau \rightarrow \tau' = \tau + \delta\tau = \tau + \lambda(\tau) \tag{7.60}$$

mit einer infinitesimalen Funktion $\lambda(\tau)$, die zu einer kompensierenden Variation

$$\begin{aligned}
\hat{x}^\mu(\tau) \rightarrow \hat{x}'^\mu(\tau) &= \hat{x}^\mu(\tau') = \hat{x}^\mu(\tau + \lambda(\tau)) = \hat{x}^\mu(\tau) + \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{x}^\mu(\tau) + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
\implies \delta_{rep} \hat{x}^\mu(\tau) &= \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{x}^\mu(\tau)
\end{aligned} \tag{7.61}$$

führt⁴⁶. Mit Hilfe der ersten Zeile aus (7.56) lässt sich die Reparametrisierung $\lambda(\tau)$ bestimmen:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta_{tot} \hat{x}^+(\tau) = \delta_{trans} \hat{x}^+(\tau) + \delta_{rep} \hat{x}^+(\tau) = \epsilon^+ + \lambda(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{x}^+(\tau) = \epsilon^+ + \lambda(\tau) \frac{\hat{p}^+}{m^2} \\
\implies \lambda(\tau) &= \lambda = -\epsilon^+ \frac{m^2}{\hat{p}^+}.
\end{aligned} \tag{7.62}$$

Die Reparametrisierung betrifft auch die anderen Operatoren $\hat{x}^-(\tau)$ und $\hat{x}^I(\tau)$, weswegen deren Variationen nicht verschwinden:

$$\begin{aligned}
\delta_{tot} \hat{x}^-(\tau) &= \delta_{trans} \hat{x}^-(\tau) + \delta_{rep} \hat{x}^-(\tau) = \epsilon^- + \lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{x}^-(\tau) = 0 - \epsilon^+ \frac{m^2}{\hat{p}^+} \frac{\hat{p}^-}{m^2} = -\epsilon^+ \frac{\hat{p}^-}{\hat{p}^+}, \\
\delta_{tot} \hat{x}^I(\tau) &= \delta_{trans} \hat{x}^I(\tau) + \delta_{rep} \hat{x}^I(\tau) = \epsilon^I + \lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{x}^I(\tau) = 0 - \epsilon^+ \frac{m^2}{\hat{p}^+} \frac{\hat{p}^I}{m^2} = -\epsilon^+ \frac{\hat{p}^I}{\hat{p}^+},
\end{aligned} \tag{7.63}$$

in Übereinstimmung mit den in (7.56) berechneten Variationen.

⁴⁶Da die Wirkung des Punktteilchens reparametrisierungsinvariant ist, ist die klassische Version dieser Transformation eine Symmetrie-Transformation, mit der Erhaltungsgrößen assoziiert sind.

Die drei Fallunterscheidungen zusammenfassend ergibt (7.53)

$$\begin{aligned}
\mu = + : \delta_{tot}\hat{x}^+(\tau) &= \epsilon^+ - \epsilon^+ = 0, \\
\mu = - : \delta_{tot}\hat{x}^-(\tau) &= \epsilon^- - \epsilon^+\frac{\hat{p}^-}{\hat{p}^+}, \\
\mu = I : \delta_{tot}\hat{x}^I(\tau) &= \epsilon^I - \epsilon^+\frac{\hat{p}^I}{\hat{p}^+},
\end{aligned} \tag{7.64}$$

wobei der erste Summand aus der Raumzeit-Translation und der zweite Summand aus der Reparametrisierung resultiert. Damit ist die Untersuchung der Lichtkegel-Impuls-Operatoren abgeschlossen.

Die Elemente einer Menge von Operatoren, die die Lie-Algebra

$$\left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\rho\sigma} \right] = i\eta^{\mu\rho}\hat{M}^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho}\hat{M}^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma}\hat{M}^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma}\hat{M}^{\rho\mu} \tag{7.65}$$

erfüllen, werden Lorentz-Generatoren genannt, da sie, per Kommutator angewandt auf die Orts-Operatoren $\hat{x}^\mu(\tau)$, Lorentz-Transformationen erzeugen. Das ist z.B. analog zu Drehimpulsen: Ist eine Menge dreier Operatoren $\{\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3\}$ gegeben und erfüllen diese die Lie-Algebra

$$\left[\hat{J}_i, \hat{J}_j \right] = i\epsilon_{ijk}\hat{J}_k, \tag{7.66}$$

so werden diese Operatoren als Drehimpulse bezeichnet, da solche Operatoren Drehungen generieren. Eine Quantentheorie ist nur invariant unter Lorentz-Transformationen, falls Lorentz-Generatoren, d.h. Operatoren, die (7.65) erfüllen, konsistent konstruiert werden können. Lorentz-Invarianz ist eine fundamentale Eigenschaft moderner Theorien und sollte nicht verletzt sein. Daher wird im Rest dieses Abschnitts für das Punktteilchen und in Kapitel 8.4 und 8.5 für den String überprüft, ob die Lorentz-Invarianz nach der Quantisierung der klassischen Theorien noch gültig ist.

Zuerst soll für die Lorentz-kovariante Quantisierung des Punktteilchens überprüft werden, ob Lorentz-Generatoren konsistent definiert werden können. Ein Blick auf die klassisch erhaltenen Lorentz-Ladungen des Punktteilchens, hergeleitet im Anhang auf Seite i, motiviert die Definition

$$\hat{M}^{\mu\nu}(\tau) = \hat{x}^\mu(\tau)\hat{p}^\nu(\tau) - \hat{x}^\nu(\tau)\hat{p}^\mu(\tau), \tag{7.67}$$

wobei die hermiteschen Operatoren $\hat{x}^\mu(\tau)$ und $\hat{p}^\mu(\tau)$ die Kommutator-Relationen (7.29) und (7.30) erfüllen. Die auf diese Weise definierten Lorentz-kovarianten Lorentz-Generatoren sind hermitesch (der Kürze halber wird im Folgenden auf die τ -Abhängigkeit verzichtet):

$$\begin{aligned}
\hat{M}^{\mu\nu\dagger} &= \hat{p}^\nu\hat{x}^\mu - \hat{p}^\mu\hat{x}^\nu \\
&= [\hat{p}^\nu, \hat{x}^\mu] + \hat{x}^\mu\hat{p}^\nu - [\hat{p}^\mu, \hat{x}^\nu] - \hat{x}^\nu\hat{p}^\mu \\
&= \hat{M}^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{7.68}$$

da sich die Kommutatoren $[\hat{p}^\nu, \hat{x}^\mu] = -i\eta^{\mu\nu} = [\hat{p}^\mu, \hat{x}^\nu]$ wegen der Symmetrie des metrischen Tensors gegenseitig aufheben. Weiterhin gelten die folgenden Kommutator-Relationen:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{x}^\rho \right] &= -\{[\hat{x}^\rho, \hat{x}^\mu\hat{p}^\nu] - [\hat{x}^\rho, \hat{x}^\nu\hat{p}^\mu]\} \\
&\stackrel{(7.46)}{=} -\{\hat{x}^\mu[\hat{x}^\rho, \hat{p}^\nu] + 0 - \hat{x}^\nu[\hat{x}^\rho, \hat{p}^\mu] - 0\} \\
&= i\eta^{\mu\rho}\hat{x}^\nu - i\eta^{\nu\rho}\hat{x}^\mu
\end{aligned} \tag{7.69}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{p}^\rho \right] &= - \{ [\hat{p}^\rho, \hat{x}^\mu \hat{p}^\nu] - [\hat{p}^\rho, \hat{x}^\nu \hat{p}^\mu] \} \\
&\stackrel{(7.46)}{=} - \{ 0 + [\hat{p}^\rho, \hat{x}^\mu] \hat{p}^\nu - 0 - [\hat{p}^\rho, \hat{x}^\nu] \hat{p}^\mu \} \\
&= i\eta^{\mu\rho} \hat{p}^\nu - i\eta^{\nu\rho} \hat{p}^\mu.
\end{aligned} \tag{7.70}$$

Mit Hilfe dieser beiden Gleichungen lässt sich bestätigen, dass die in (7.67) definierten Operatoren tatsächlich die Lorentz-Algebra erfüllen (s. Anhang auf Seite i). Daher soll noch explizit gezeigt werden, dass die Operatoren (7.67) Lorentz-Transformationen generieren. Hierzu wird die Wirkung des Operators $-\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu}\hat{M}^{\mu\nu}$ auf die Koordinaten $\hat{x}^\rho(\tau)$ untersucht:

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu} \left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{x}^\rho \right] &\stackrel{(7.69)}{=} -\frac{i}{2}\epsilon_{\mu\nu} \{ i\eta^{\mu\rho} \hat{x}^\nu - i\eta^{\nu\rho} \hat{x}^\mu \} \\
&= \frac{1}{2} \{ \epsilon^{\rho\nu} \hat{x}_\nu - \epsilon^{\mu\rho} \hat{x}_\mu \} = \frac{1}{2} \{ \epsilon^{\rho\mu} \hat{x}_\mu + \epsilon^{\rho\mu} \hat{x}_\mu \} \\
&= \epsilon^{\rho\mu} \hat{x}_\mu = \delta \hat{x}^\rho,
\end{aligned} \tag{7.71}$$

wobei im dritten Schritt die Antisymmetrie des ϵ -Tensors benutzt wurde und $\nu \rightarrow \mu$ umbenannt wurde. Dies ist das erwartete Ergebnis.

Gemäß den Ausführungen des Kapitels 2.2.3 bleibt die Lorentz-Algebra gültig, wenn für die Indizes Lichtkegel-Werte $\mu, \nu, \rho, \sigma = +, -, I$ eingesetzt werden. Wegen der Antisymmetrie der Lorentz-Generatoren sind die Operatoren

$$\hat{M}^{+-}, \hat{M}^{+I}, \hat{M}^{-I}, \hat{M}^{IJ}, \quad I < J \tag{7.72}$$

von Interesse. Hierbei handelt es sich um Lorentz-kovariante Operatoren in Lichtkegel-Koordinaten, *nicht* um Operatoren der Quantisierung in Lichtkegel-Eichung. Die vier Größen lassen sich zu neun verschiedenen Kommutatoren zusammensetzen:

$$\begin{aligned}
&\left[\hat{M}^{+-}, \hat{M}^{+I} \right], \left[\hat{M}^{+-}, \hat{M}^{-I} \right], \left[\hat{M}^{+-}, \hat{M}^{IJ} \right] \\
&\left[\hat{M}^{+I}, \hat{M}^{+J} \right], \left[\hat{M}^{+I}, \hat{M}^{-J} \right], \left[\hat{M}^{+I}, \hat{M}^{JK} \right] \\
&\left[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J} \right], \left[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{JK} \right] \\
&\left[\hat{M}^{IJ}, \hat{M}^{KL} \right].
\end{aligned} \tag{7.73}$$

Der Kommutator

$$\left[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J} \right] = i\eta^{--} \hat{M}^{IJ} - i\eta^{I-} \hat{M}^{-J} + i\eta^{-J} \hat{M}^{-I} - i\eta^{IJ} \hat{M}^{--} = 0 \tag{7.74}$$

wird von besonderem Interesse sein. Er verschwindet, da entweder die entsprechenden Komponenten der Lichtkegel-Metrik oder wegen der Antisymmetrie die Ladung \hat{M}^{--} verschwinden.

Im letzten Teil dieses Abschnitts werden die Lichtkegel-Lorentz-Generatoren konstruiert. Per Definition müssen sie derselben Lie-Algebra (7.65) genügen wie die Lorentz-kovarianten Lorentz-Generatoren. Da sich die Basis-Kommutator-Relationen (7.34) und (7.35) von denen der Lorentz-kovarianten Quantisierung unterscheiden, würde der Ansatz

$$\hat{M}_{lc-gauge}^{\mu\nu} \stackrel{?}{=} \hat{x}^\mu(\tau) \hat{p}^\nu - \hat{x}^\nu(\tau) \hat{p}^\mu, \quad \mu, \nu = +, -, I \tag{7.75}$$

zu einer anderen Lie-Algebra führen, bzw. die so definierten Operatoren erfüllen gar keine Lie-Algebra. Es ist somit *nicht* offensichtlich, dass überhaupt konsistent Lichtkegel-Lorentz-Generatoren aus der im Vergleich zur Lorentz-kovarianten Quantisierung kleineren Menge von Operatoren $\{\hat{x}^I(\tau), \hat{x}_0^-, \hat{p}^I, \hat{p}^+\}$ konstruiert werden können.

Als Beispiel wird \hat{M}^{+-} konstruiert. Beim Ansatz

$$\hat{M}^{+-} \stackrel{?}{=} \hat{x}^+(\tau)\hat{p}^- - \hat{x}^-(\tau)\hat{p}^+ = \frac{\hat{p}^+}{m^2}\tau\hat{p}^- - \left(\hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2}\tau\right)\hat{p}^+ \stackrel{[\hat{p}^+, \hat{p}^-]=0}{=} -\hat{x}_0^-\hat{p}^+ \quad (7.76)$$

verschwindet immerhin die τ -Abhängigkeit, allerdings wäre \hat{M}^{+-} wegen

$$\left(\hat{M}^{+-}\right)^\dagger - \hat{M}^{+-} = -\hat{p}^+\hat{x}_0^- + \hat{x}_0^-\hat{p}^+ = [\hat{x}_0^-, \hat{p}^+] = -i \neq 0 \quad (7.77)$$

nicht mehr hermitesch. An diesem Beispiel sieht man, dass die Lichtkegel-Eich-Bedingung grundlegende Eigenschaften der Operatoren beeinflusst. Um die Hermitizität wieder herzustellen, wird

$$\hat{M}^{+-} \equiv -\frac{1}{2}(\hat{x}_0^-\hat{p}^+ + \hat{p}^+\hat{x}_0^-) \quad (7.78)$$

definiert.

Analog wird der Operator \hat{M}^{-I} konstruiert. Zuerst wird

$$\hat{M}^{-I} \stackrel{?}{=} \hat{x}^-(\tau)\hat{p}^I - \hat{x}^I(\tau)\hat{p}^- = \left(\hat{x}_0^- + \frac{\hat{p}^-}{m^2}\tau\right)\hat{p}^I - \left(\hat{x}_0^I + \frac{\hat{p}^I}{m^2}\tau\right)\hat{p}^- \stackrel{[\hat{p}^I, \hat{p}^-]=0}{=} \hat{x}_0^-\hat{p}^I - \hat{x}_0^I\hat{p}^- \quad (7.79)$$

angesetzt. Die τ -Abhängigkeit hebt sich wieder weg. Die Hermitizität ist wegen

$$\hat{x}_0^-\hat{p}^I - (\hat{x}_0^-\hat{p}^I)^\dagger = \hat{x}_0^-\hat{p}^I - \hat{p}^I\hat{x}_0^- = [\hat{x}_0^-, \hat{p}^I] = 0 \quad (7.80)$$

aber

$$\begin{aligned} \hat{x}_0^I\hat{p}^- - (\hat{x}_0^I\hat{p}^-)^\dagger &= [\hat{x}_0^I, \hat{p}^-] = \left[\hat{x}^I(\tau) - \frac{\hat{p}^I}{m^2}\tau, \frac{1}{2\hat{p}^+}(\hat{p}^J\hat{p}^J + m^2)\right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\hat{x}^I(\tau), \frac{1}{\hat{p}^+}\hat{p}^J\hat{p}^J\right] = \frac{1}{2\hat{p}^+} [\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^J\hat{p}^J] = i\frac{\hat{p}^I}{\hat{p}^+} \neq 0 \end{aligned} \quad (7.81)$$

auch in diesem Fall nicht erfüllt. Für die Rechnung wurden die Kommutatoren $[\hat{x}^I(\tau), \hat{p}^+] = 0$ und $[\hat{p}^I, \hat{p}^-] = 0$ sowie (7.47) verwendet. \hat{M}^{-I} wird daher als

$$\hat{M}^{-I} \equiv \hat{x}_0^-\hat{p}^I - \frac{1}{2}(\hat{x}_0^I\hat{p}^- + \hat{p}^-\hat{x}_0^I) \stackrel{(7.81)}{=} \hat{x}_0^-\hat{p}^I - \hat{x}_0^I\hat{p}^- + \frac{i}{2}\frac{\hat{p}^I}{\hat{p}^+}. \quad (7.82)$$

definiert. Die verbleibenden Operatoren \hat{M}^{+I} und \hat{M}^{IJ} werden auf dieselbe Weise konstruiert.

Die so definierten Lichtkegel-Lorentz-Generatoren erzeugen Lorentz-Transformationen, gegebenenfalls begleitet von Reparametrisierungen $\tau \rightarrow \tau'(\tau)$, um die Eichbedingung $\hat{x}_0^+ \equiv 0$ zu erhalten [1, S. 231, Problem 11.7].

Da $\hat{x}_0^I = \hat{x}^I(\tau) - \frac{\hat{p}^I}{m^2}\tau$ und $\hat{p}^- = \frac{1}{2\hat{p}^+}(\hat{p}^J\hat{p}^J + m^2)$ in der Definition (7.82) enthalten sind, ist \hat{M}^{-I} der komplizierteste der vier Operatoren (7.72), da keiner der drei anderen \hat{p}^- enthält (s. (7.78) bzw. \hat{M}^{+I} und \hat{M}^{IJ} enthalten keinen Minus-Index). Er ist gleichzeitig auch der interessanteste Operator, da er der einfachen Kommutator-Relation (7.74) ge-

nügt. Man prüft nach, dass die so definierten Lichtkegel-Lorentz-Generatoren alle relevanten Kommutatoren (7.73) erfüllen [1, Seite 232]. Die Theorie des quantisierten Punktteilchens in Lichtkegel-Eichung ist somit Lorentz-invariant. Exemplarisch habe ich den Kommutator $[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}]$ mit der Definition (7.82) berechnet⁴⁷. In einer längeren Rechnung ergibt sich in Übereinstimmung mit der Lie-Algebra bzw. Gleichung (7.74) $[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}] = 0$. Dies ist exakt die Rechnung, die in Kapitel 8.5 für die Lichtkegel-Lorentz-Generatoren des offenen Strings durchgeführt werden wird. Während für das Punktteilchen Lorentz-Generatoren konstruiert werden können, für die $[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}] = 0$ immer gilt, ist die rechte Seite dieses Kommutators in der Stringtheorie eine von der Raumzeit-Dimension D abhängige Funktion. Die Forderung, dass diese verschwinde, damit die Theorie Lorentz-invariant sei, fixiert die Raumzeit-Dimensionalität. Quantenmechanische Stringtheorie ist daher nur in einer bestimmten Dimension Lorentz-invariant.

8 Quantisierung des relativistischen, offenen Strings in Lichtkegel-Eichung

Es sind nun alle Grundlagen hergeleitet, um schließlich die Lichtkegel-Quantisierung des relativistischen Strings durchzuführen: In Kapitel 6 wurde eine vollständige, anschauliche Lösung des klassischen, relativistischen Strings in Lichtkegel-Eichung entwickelt und in Kapitel 7 wurde die Lichtkegel-Quantisierung des einfacheren Punktteilchens durchgeführt. In diesem Kapitel werden nur offene Strings ($\beta = 2$) an einer raumfüllenden D-Brane betrachtet, d.h. beide Endpunkte unterliegen freien Randbedingungen entlang jeder Raumzeit-Dimension.

Genau wie beim Punktteilchen werden zunächst die Basis-Operatoren sowie die Kommutator-Relationen, die sie erfüllen, und der Hamilton-Operator postuliert. Anschließend wird die Plausibilität dieser Definitionen getestet. Danach werden viele Kommutatoren der aus den Basis-Operatoren abgeleiteten Größen studiert; insbesondere interessieren die Kommutatoren der mit den klassischen Entwicklungsmoden assoziierten Operatoren $\hat{\alpha}_n^I$ und \hat{L}_n^\perp . Erstere können als Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren interpretiert werden, Letztere erfüllen die sogenannte „Virasoro-Algebra mit zentraler Erweiterung“. Zuletzt wird versucht, konsistent Lichtkegel-Lorentz-Generatoren zu konstruieren, um die Lorentz-Invarianz der quantenmechanischen Stringtheorie zu gewährleisten. Ausgehend von der Definition von \hat{M}^{-I} wird der Kommutator $[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}] \stackrel{!}{=} 0$ explizit berechnet und damit die Raumzeit-Dimensionalität auf den Wert $D = 26$ fixiert. Weiterhin führt die Rechnung zu einer Veränderung der klassischen Massenformel (6.80).

8.1 Basis-Kommutatoren und Lichtkegel-Hamiltonoperator⁴⁸

In Analogie zum Punktteilchen, vgl. (7.32), werden als grundlegende, zeitunabhängige Lichtkegel-Schrödinger-Operatoren des Strings

$$\hat{X}^I(\sigma), \hat{x}_0^-, \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\sigma), \hat{p}^+ \quad (8.1)$$

ausgewählt. Abgesehen von der zusätzlichen σ -Abhängigkeit unterscheidet sich die Wahl vor allem durch die Verwendung von $\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\sigma)$ statt $\hat{p}^I = \int_0^\pi d\sigma \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\sigma)$ vom Punktteilchen. Die

⁴⁷ entspricht [1, Problem 11.6]

⁴⁸ orientiert sich an [1, Kapitel 12.1]

zugehörigen Lichtkegel-Heisenberg-Operatoren

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{x}_0^-(\tau), \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma), \hat{p}^+(\tau) \quad (8.2)$$

sind nur implizit zeitabhängig. Die Kommutator-Relationen für die Schrödinger-Operatoren seien

$$\left[\hat{X}^I(\sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\sigma') \right] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [\hat{x}_0^-, \hat{p}^+] = i\eta^{-+} = -i, \quad (8.3)$$

alle anderen Operatoren kommutieren, z.B.

$$\left[\hat{X}^I(\sigma), \hat{X}^J(\sigma') \right] = 0 = \left[\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\sigma') \right]. \quad (8.4)$$

Die Delta-Distribution ist notwendig, da sich nur Messungen am gleichen Punkt eines Strings beeinflussen sollen und σ ein kontinuierlicher Parameter ist. Weiterhin ergibt sich mit Hilfe der Delta-Distribution der erwartete Kommutator

$$\left[\hat{X}^I(\sigma), \hat{p}^J \right] = \int_0^\pi d\sigma' \left[\hat{X}^I(\sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\sigma') \right] = i\eta^{IJ} \int_0^\pi d\sigma' \delta(\sigma - \sigma') = i\eta^{IJ} \forall \sigma. \quad (8.5)$$

Gemäß Gleichung (7.26) erfüllen die Heisenberg-Operatoren dieselben Kommutator-Relationen; wichtig hierbei ist, dass die Kommutatoren zur selben Zeit τ ausgewertet werden, da Messungen zu verschiedenen Zeitpunkten sich nicht beeinflussen sollen:

$$\left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right] = i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad [\hat{x}_0^-(\tau), \hat{p}^+(\tau)] = i\eta^{-+} = -i, \quad (8.6)$$

usw.

Als nächstes wird der Heisenberg-Hamilton-Operator $\hat{H}(\tau)$ konstruiert, der τ -Translation generieren soll. Wie beim Punktteilchen erzeugt $\hat{p}^- \hat{X}^+$ -Translation. Mit Hilfe der Lichtkegel-Eichbedingung für den explizit zeitabhängigen Heisenberg-Operator $\hat{X}^+(\tau, \sigma)$

$$\hat{X}^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' \hat{p}^+(\tau) \tau \quad (8.7)$$

erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial \hat{X}^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' \hat{p}^+(\tau) \frac{\partial}{\partial X^+} \quad (8.8)$$

und postuliert daher

$$\hat{H}(\tau) = 2\alpha' \hat{p}^+(\tau) \hat{p}^-(\tau) = 2\alpha' \hat{p}^+(\tau) \int_0^\pi d\sigma \hat{\mathcal{P}}^{\tau-}(\tau, \sigma) \stackrel{(6.77)}{=} \hat{L}_0^\perp. \quad (8.9)$$

Wie schon beim Punktteilchen ist $[\hat{H}(\tau)] = 1$. Da $\hat{H}(\tau)$ nicht explizit zeitabhängig ist, ist $\hat{H}(\tau) = \hat{H}$ gemäß Formel (7.22) zeitunabhängig, sodass Energieerhaltung gilt. Für die praktische Benutzung des Hamilton-Operators sollte $\hat{\mathcal{P}}^{\tau-}(\tau, \sigma)$ durch die Basis-Heisenberg-Operatoren (8.2) ausgedrückt werden, für die die Kommutator-Relationen bekannt sind. Aus der klassischen Theorie gilt mit Hilfe der Gleichungen (6.36) und (6.72)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\tau-} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{4\alpha' p^+} \left[\dot{X}^I \dot{X}^I + X'^I X'^I \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{1}{4\alpha' p^+} (2\pi\alpha')^2 \left[\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right] = \frac{\pi}{2p^+} \left[\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X'^I X'^I}{(2\pi\alpha')^2} \right]. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Als Operator-Gleichung eingesetzt in (8.9) folgt die übliche Form des Lichtkegel-Hamilton-

Operators

$$\hat{H} = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left(\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) + \frac{\hat{X}^{II}(\tau, \sigma) \hat{X}^{II}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (8.11)$$

Als Test werden die Zeitentwicklungen der Basis-Heisenberg-Operatoren (8.2) berechnet. Wie beim Punktteilchen wird die bis hierhin aufgestellte Quantentheorie, bestehend aus Basis-Operatoren, Kommutator-Relationen und Hamilton-Operator, als plausibel erachtet, falls die Heisenberg-Operatoren die klassischen Gleichungen erfüllen. Mit Hilfe der Kommutatoren

$$\begin{aligned} [\hat{x}_0^-(\tau), \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)] &= 0 \\ [\hat{p}^+(\tau), \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)] &= 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

und

$$\begin{aligned} [\hat{x}_0^-(\tau), \hat{X}^{II}(\tau, \sigma)] &= \frac{\partial}{\partial \sigma} [\hat{x}_0^-(\tau), \hat{X}^I(\tau, \sigma)] = 0 \\ [\hat{p}^+(\tau), \hat{X}^{II}(\tau, \sigma)] &= \frac{\partial}{\partial \sigma} [\hat{p}^+(\tau), \hat{X}^I(\tau, \sigma)] = 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

lauten die Heisenberg'schen Bewegungsgleichungen für die implizit zeitabhängigen Operatoren \hat{x}_0^- und \hat{p}^+

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{x}_0^-(\tau)}{d\tau} &= [\hat{x}_0^-(\tau), \hat{H}] = 0 \\ i \frac{d\hat{p}^+(\tau)}{d\tau} &= [\hat{p}^+(\tau), \hat{H}] = 0, \end{aligned} \quad (8.14)$$

d.h. die beiden Operatoren sind erwartungsgemäß zeitunabhängig in beiden Bildern: $\hat{x}_0^-(\tau) = \hat{x}_0^-$ und $\hat{p}^+(\tau) = \hat{p}^+$. Der zweite Kommutator in (8.6) reduziert sich somit auf

$$[\hat{x}_0^-, \hat{p}^+] = -i. \quad (8.15)$$

Für die Zeitentwicklung von $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ gilt mit

$$[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^{II}(\tau, \sigma')] = \frac{\partial}{\partial \sigma'} [\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^I(\tau, \sigma')] = 0 \quad (8.16)$$

und der Rechenregel (7.46)

$$\begin{aligned} i \frac{d\hat{X}^I(\tau, \sigma)}{d\tau} &= [\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{H}] = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' [\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma') \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \left\{ \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma') [\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] + [\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma')] \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right\} \\ &= \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' 2i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma') \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma') \\ &= i2\pi\alpha' \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Division durch i führt zum erwarteten Ergebnis

$$\dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma). \quad (8.18)$$

Eine analoge Rechnung ergibt für die Zeitentwicklung von $\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)$

$$\dot{\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \hat{X}'''(\tau, \sigma). \quad (8.19)$$

Wegen der Zeitentwicklungen (8.18) und (8.19) ist die klassische Wellengleichung als Operator-Gleichung in der Quanten-Stringtheorie realisiert:

$$\ddot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \dot{\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}}(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \frac{1}{2\pi\alpha'} \hat{X}'''(\tau, \sigma) = \hat{X}'''(\tau, \sigma), \quad (8.20)$$

d.h.

$$\ddot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma) - \hat{X}'''(\tau, \sigma) = 0. \quad (8.21)$$

Somit erfüllen alle Basis-Operatoren die klassisch erwarteten Gleichungen.

Genau wie die Wellengleichung werden auch die Randbedingungen in der Quanten-Stringtheorie zu Operator-Gleichungen:

$$\hat{X}'^{\mu}(\tau, \sigma_*) = 0, \quad \mu = +, -, I, \quad \sigma_* = 0, \pi. \quad (8.22)$$

Wie in der klassischen Theorie garantieren die freien Randbedingungen die Impulserhaltung:

$$i \frac{d\hat{p}^I(\tau)}{d\tau} = i \int_0^{\pi} d\sigma \frac{d\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)}{d\tau} \stackrel{(8.19)}{=} \frac{i}{2\pi\alpha'} \int_0^{\pi} d\sigma \hat{X}'''(\tau, \sigma) = \frac{i}{2\pi\alpha'} \left[\hat{X}''(\tau, \sigma) \right]_0^{\pi} = 0, \quad (8.23)$$

d.h. $\hat{p}^I(\tau) = \hat{p}^I$, und da auch \hat{p}^+ zeitunabhängig ist, gilt dies ebenfalls für $\hat{p}^- = \frac{1}{2\hat{p}^+} (\hat{p}^I \hat{p}^I + m^2)$.

Da alle klassischen Grund-Gleichungen, d.h. die Wellengleichung, die Randbedingungen und die Zwangsbedingungen⁴⁹, als Operator-Gleichungen in der Quanten-Stringtheorie gültig bleiben, lassen sich die klassisch ermittelten Lösungen, die in Form von Moden-Expansionen gegeben waren, als Operator-Gleichungen in die Quanten-Stringtheorie übertragen. Insbesondere sind (6.65), (6.67), (6.68) und (6.62) weiterhin gültig. Die Entwicklungsmoden werden dabei zu Operatoren mit nicht-trivialen Kommutator-Relationen.

8.2 Quantisierung der transversalen String-Koordinaten $X^I(\tau, \sigma)$ ⁵⁰

In diesem Abschnitt werden im Detail die transversalen Koordinaten

$$\hat{X}^I(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (8.24)$$

$\hat{\alpha}_0^I = \sqrt{2\alpha'} \hat{p}^I$, untersucht, bevor im nächsten Abschnitt die Lichtkegel-Koordinaten \hat{X}^{\pm} studiert werden. Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung der Kommutator-Relationen, denen die hiermit neu eingeführten Operatoren \hat{x}_0^I und $\hat{\alpha}_n^I$ ($n \in \mathbb{Z}$) untereinander genügen.

Begonnen wird mit der Herleitung der Kommutator-Relation $[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J]$ zwischen zwei Oszillatoren. Hierzu kann nicht einfach die Reihen-Entwicklung (8.24) in den bekannten Kommutator $[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma')] = 0$ eingesetzt werden und nach $[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J]$ aufgelöst werden, da bislang unbekannt ist, wie \hat{x}_0^I mit sich selbst und den Oszillatoren $\hat{\alpha}_n^I$ vertauscht. Außerdem müssten $\hat{\alpha}_0^I$ und $\hat{\alpha}_n^I$ mit $n \neq 0$ separat behandelt werden, was umständlich wäre. Stattdessen werden die τ - und σ -Ableitungen von \hat{X}^I betrachtet, die \hat{x}_0^I nicht enthalten und bei denen

⁴⁹Die Zwangsbedingungen gehen über Gleichung (6.72) in die Definition des Hamilton-Operators mit ein.

⁵⁰orientiert sich an [1, Kapitel 12.1, 12.2]

die Summe über alle ganzen Zahlen inklusive der Null läuft, s. Gleichungen (6.62). In leicht abgewandelter Form lauten diese Gleichungen für $\mu = I$

$$\begin{aligned} \left(\dot{\hat{X}}^I + \hat{X}'^I \right) (\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [0, \pi], \\ \left(\dot{\hat{X}}^I - \hat{X}'^I \right) (\tau, -\sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \sigma \in [-\pi, 0], \end{aligned} \quad (8.25)$$

sodass sich der Operator

$$\hat{A}^I(\tau, \sigma) \equiv \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in(\tau+\sigma)} \stackrel{\text{!}}{=} \begin{cases} \left(\dot{\hat{X}}^I + \hat{X}'^I \right) (\tau, \sigma), & \sigma \in [0, \pi] \\ \left(\dot{\hat{X}}^I - \hat{X}'^I \right) (\tau, -\sigma), & \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad (8.26)$$

für das 2π lange Intervall $\sigma \in [-\pi, \pi]$ definieren lässt⁵¹.

Um $[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J]$ zu berechnen, ist der Kommutator

$$\left[\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\alpha' \sum_{n, m \in \mathbb{Z}} e^{-i(n+m)\tau} e^{-in\sigma} e^{-im\sigma'} [\hat{\alpha}_n^I, \hat{\alpha}_m^J], \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi] \quad (8.27)$$

von Interesse. Wird dieser Kommutator durch die Ableitungen der transversalen String-Koordinaten ausgedrückt, müssen vier Fälle unterschieden werden, je nach dem, ob $\sigma, \sigma' \in [0, \pi]$, $\sigma \in [0, \pi]$ und $\sigma' \in [-\pi, 0]$, $\sigma \in [-\pi, 0]$ und $\sigma' \in [0, \pi]$ oder $\sigma, \sigma' \in [-\pi, 0]$ sind:

$$\left[\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma') \right] = \begin{cases} \left[\left(\dot{\hat{X}}^I + \hat{X}'^I \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J + \hat{X}'^J \right) (\tau, \sigma') \right], & \sigma, \sigma' \in [0, \pi] \\ \left[\left(\dot{\hat{X}}^I + \hat{X}'^I \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J - \hat{X}'^J \right) (\tau, -\sigma') \right], & \sigma \in [0, \pi], \sigma' \in [-\pi, 0], \\ \left[\left(\dot{\hat{X}}^I - \hat{X}'^I \right) (\tau, -\sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J + \hat{X}'^J \right) (\tau, \sigma') \right], & \sigma \in [-\pi, 0], \sigma' \in [0, \pi], \\ \left[\left(\dot{\hat{X}}^I - \hat{X}'^I \right) (\tau, -\sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J - \hat{X}'^J \right) (\tau, -\sigma') \right], & \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad (8.28)$$

Zur Berechnung werden die Kommutatoren von Linearkombinationen von τ - und σ -Ableitungen von $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ benötigt. Es gelten zunächst:

$$\begin{aligned} \left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma') \right] &= 2\pi\alpha' \left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}'^J(\tau, \sigma') \right] &= \frac{\partial}{\partial \sigma'} \left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 0, \\ \left[\hat{X}'^I(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma') \right] &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma') \right] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \left[\dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma') \right] &= (2\pi\alpha')^2 \left[\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma), \hat{\mathcal{P}}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right] = 0, \\ \left[\hat{X}''^I(\tau, \sigma), \hat{X}'^J(\tau, \sigma') \right] &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma'} \left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma') \right] = 0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Anhand der letzten drei Zeilen ist zu sehen, dass gleichartige Ableitungen kommutieren, verschiedenartige Ableitungen jedoch einen recht komplizierten Kommutator bilden, der die σ -Ableitung einer Delta-Distribution enthält. Aus diesen drei Kommutatoren lassen sich mit Hilfe der Rechenregeln $\delta(x) = \delta(-x)$ und $\frac{d}{dy} f(x-y) = -\frac{d}{dx} f(x-y)$ die gesuchten

⁵¹Da der Operator $\hat{A}^I(\tau, \sigma)$ per Definition 2π -periodisch ist, $\hat{A}^I(\tau, \sigma + 2\pi) = \hat{A}^I(\tau, \sigma)$, ist die Definition sogar auf $\sigma \in \mathbb{R}$ erweiterbar.

Kommutatoren von Linearkombinationen von τ - und σ -Ableitungen von $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ bilden:

$$\begin{aligned} \left[\left(\dot{\hat{X}}^I \pm \dot{\hat{X}}'^I \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J \pm \dot{\hat{X}}'^J \right) (\tau, \sigma') \right] &= \pm 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \\ \left[\left(\dot{\hat{X}}^I \pm \dot{\hat{X}}'^I \right) (\tau, \sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J \mp \dot{\hat{X}}'^J \right) (\tau, \sigma') \right] &= 0, \end{aligned} \quad (8.30)$$

für $\sigma, \sigma' \in [0, \pi]$. Die erste Zeile in (8.28) lässt sich direkt aus der oberen Zeile von (8.30) (Fall „+“) ablesen, sie ergibt $4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma')$. Die vierte Zeile ergibt sich aus dem Fall „-“:

$$\begin{aligned} \left[\left(\dot{\hat{X}}^I - \dot{\hat{X}}'^I \right) (\tau, -\sigma), \left(\dot{\hat{X}}^J - \dot{\hat{X}}'^J \right) (\tau, -\sigma') \right] &= -4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d(-\sigma)} \delta(-\sigma + \sigma') \\ &= 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (8.31)$$

Die zweite und dritte Zeile entsprechen dem unteren Fall in (8.30) und ergeben 0. Da $\sigma \neq \sigma'$ gilt, gibt $\delta(\sigma - \sigma') = 0$. Alle vier Fälle ergeben somit dasselbe Ergebnis und können zusammengefasst werden:

$$\left[\hat{A}^I(\tau, \sigma), \hat{A}^J(\tau, \sigma') \right] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (8.32)$$

für $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$. Gleichsetzen mit (8.27) führt nach einer Umbenennung $n \rightarrow n'$ und $m \rightarrow m'$ zu

$$2\alpha' \sum_{n', m' \in \mathbb{Z}} e^{-i(n'+m')\tau} e^{-in'\sigma} e^{-im'\sigma'} [\hat{\alpha}_{n'}^I, \hat{\alpha}_{m'}^J] = 4\pi\alpha' i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (8.33)$$

für $\sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi]$. Die gesuchte Kommutator-Relation kann freigelegt werden, indem das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{in\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{im\sigma'} \quad (8.34)$$

auf beide Seiten der Gleichung angewendet wird. Die rechte Seite ergibt

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\alpha' i\eta^{IJ}}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{in\sigma} \frac{d}{d\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{im\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') &= \frac{\alpha' i\eta^{IJ}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{in\sigma} \frac{d}{d\sigma} e^{im\sigma} \\ &= -\frac{m\alpha' \eta^{IJ}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(n+m)\sigma}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Das Integral ergibt

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(n+m)\sigma} = 2\pi\delta_{n+m,0}. \quad (8.36)$$

Somit ist das Endergebnis für die rechte Seite

$$\text{RHS} = -2m\alpha' \eta^{IJ} \delta_{n+m,0}. \quad (8.37)$$

Auf der linken Seite

$$\frac{2\alpha'}{(2\pi)^2} \sum_{n', m' \in \mathbb{Z}} [\hat{\alpha}_{n'}^I, \hat{\alpha}_{m'}^J] e^{-i(n'+m')\tau} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma e^{i(n-n')\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma' e^{i(m-m')\sigma'} \quad (8.38)$$

wählt das Integral wegen (8.36) gerade den Summanden mit $m' = m$ und $n' = n$ aus:

$$\text{LHS} = \frac{2\alpha'}{(2\pi)^2} \sum_{n', m' \in \mathbb{Z}} [\hat{\alpha}_{n'}^I, \hat{\alpha}_{m'}^J] e^{-i(n'+m')\tau} 2\pi\delta_{n, n'} 2\pi\delta_{m, m'} = 2\alpha' [\hat{\alpha}_n^I, \hat{\alpha}_m^J] e^{-i(n+m)\tau}. \quad (8.39)$$

Gleichsetzen von (8.37) und (8.39) ergibt

$$[\hat{\alpha}_n^I, \hat{\alpha}_m^J] = -m\eta^{IJ} \delta_{n+m, 0} e^{i(n+m)\tau}. \quad (8.40)$$

Wegen des Kronecker-Deltas verschwindet der Kommutator nur dann nicht, wenn $n + m = 0$ ist, in welchem Fall $-m = n$ und $e^{i(n+m)\tau} = 1$ ist. Die endgültige Form des Kommutators zweier transversaler Oszillatoren ist damit gefunden:

$$[\hat{\alpha}_n^I, \hat{\alpha}_m^J] = n\eta^{IJ} \delta_{n+m, 0}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \quad (8.41)$$

Im Gegensatz zu den Basis-Kommutatoren (8.6) ist dies eine diskrete, abzählbare Menge an Kommutatoren. Für $n = 0$ ergibt sich

$$[\hat{\alpha}_0^I, \hat{\alpha}_m^J] = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad (8.42)$$

d.h. die transversalen Impulse \hat{p}^I bzw. $\hat{\alpha}_0^I$ kommutieren untereinander ($m = 0$),

$$[\hat{p}^I, \hat{p}^J] = 0, \quad (8.43)$$

und mit allen anderen Oszillatoren ($m \neq 0$). Die Antisymmetrie des Kommutators ist erfüllt:

$$[\hat{\alpha}_m^J, \hat{\alpha}_n^I] = m\eta^{JI} \delta_{m+n, 0} = -n\eta^{IJ} \delta_{n+m, 0} = -[\hat{\alpha}_n^I, \hat{\alpha}_m^J]. \quad (8.44)$$

Zu der Herleitung des Kommutators (8.41) sei noch angemerkt, dass die Konstruktion des Operators \hat{A}^I notwendig war, um die komplexen Exponentialfunktionen über ein 2π langes Intervall integrieren zu können und somit Kronecker-Deltas zu erhalten, die die unendlichen Summen auf einen einzelnen Summanden reduzieren. Die Integrale geben nur Kronecker-Deltas bei Integrationsintervallen, die ein Vielfaches von 2π lang sind. Die Operatoren in (8.25) hingegen sind nur für ein σ -Intervall der Länge π definiert.

Die Kommutatoren (8.41) entsprechen denen einer unendlichen Menge von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren. Dies sieht man folgendermaßen: Da die klassischen String-Koordinaten $X^I(\tau, \sigma)$ reell sind, ist es sinnvoll, die assoziierten Feldoperatoren $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ als Observablen anzusehen, d.h. ihre Hermitizität zu fordern. Setzt man die Reihenentwicklung (8.24) ein,

$$\begin{aligned} \hat{X}^{I\dagger}(\tau, \sigma) &= \hat{X}^I(\tau, \sigma) \\ \implies \hat{x}_0^{I\dagger} + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^{I\dagger} \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^{I\dagger} e^{+in\tau} \cos(n\sigma) &= \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \end{aligned} \quad (8.45)$$

ergibt sich, dass für die Null-Moden

$$\hat{x}_0^{I\dagger} = \hat{x}_0^I, \quad \hat{p}^{I\dagger} = \hat{p}^I \quad (8.46)$$

gelten muss, d.h. diese sind ebenfalls observabel, und dass für die Oszillatoren

$$\hat{\alpha}_n^{I\dagger} = \hat{\alpha}_{-n}^I, \quad n \neq 0 \quad (8.47)$$

gelten muss, wie man nach einer Umbenennung $n \rightarrow -n$ feststellt. Es bietet sich daher an, Operator-Versionen der klassischen Koeffizienten a_n^I , $n \geq 1$, einzuführen, vgl. (6.57),

$$\hat{\alpha}_n^I \equiv \hat{a}_n^I \sqrt{n}, \quad \hat{\alpha}_{-n}^I \equiv \hat{a}_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad n \geq 1, \quad (8.48)$$

denn mit dieser Definition folgt⁵²

$$\hat{\alpha}_{-n}^I = \hat{\alpha}_n^{I\dagger}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.49)$$

Wertet man die Kommutator-Relation (8.41) für die Fälle $n, m > 0$, $n, m < 0$ und $n > 0$, $m < 0$ aus und ersetzt die entsprechenden \hat{a} -Operatoren durch \hat{a} - bzw. \hat{a}^\dagger -Operatoren, folgt

$$[\hat{a}_n^I, \hat{a}_m^J] = 0, \quad [\hat{a}_n^{I\dagger}, \hat{a}_m^{J\dagger}] = 0, \quad [\hat{a}_n^I, \hat{a}_m^{J\dagger}] = \eta^{IJ} \delta_{n,m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (8.50)$$

Dies sind die kanonischen Kommutator-Relationen für Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren des harmonischen Oszillators. Somit haben alle $\hat{\alpha}_n^I$ -Operatoren eine anschauliche Bedeutung:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_n^I & \quad \text{Vernichtungsoperator, } n \geq 1, \\ \hat{\alpha}_{-n}^I & \quad \text{Erzeugungsoperator, } n \geq 1, \\ \hat{\alpha}_0^I & \quad \text{Impulsoperator.} \end{aligned}$$

Im Folgenden werden die Kommutatoren, die die Null-Mode \hat{x}_0^I betreffen, hergeleitet: $[\hat{x}_0^I, \hat{x}_0^J]$, $[\hat{x}_0^I, \hat{p}^J]$ und $[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J]$ ($n \neq 0$). Setzt man die Moden-Expansion (8.24) in den Kommutator $[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{p}^J] = i\eta^{IJ}$ (vgl. (8.5) mit Heisenberg-Operatoren) ein, so folgt wegen (8.42) direkt

$$[\hat{x}_0^I, \hat{p}^J] = i\eta^{IJ}, \quad (8.51)$$

da alle anderen Kommutatoren verschwinden.

Zur Bestimmung von $[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J]$ ($n \neq 0$) wird auf den aus der ersten Zeile von (8.29) bekannte Kommutator $[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma')] = 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma')$ das Integral $\int_0^\pi d\sigma$ angewendet. Mit Hilfe der Reihenentwicklungen (8.24) und (6.60) sowie dem Integral (6.55) folgt

$$\begin{aligned} 2\pi\alpha' i\eta^{IJ} &= \left[\int_0^\pi d\sigma \left(\hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right), \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma') \right] \\ &= \pi \left[\hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau, \dot{\hat{X}}^J(\tau, \sigma') \right] = \pi \left[\hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau, \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^J e^{-in\tau} \cos(n\sigma') \right] \\ &= \pi \left[\hat{x}_0^I, \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^J e^{-in\tau} \cos(n\sigma') \right], \end{aligned} \quad (8.52)$$

wobei im letzten Schritt der Kommutator (8.42) benutzt wurde. Der Term mit $n = 0$ wird aus der Summe herausgezogen:

$$2\pi\alpha' i\eta^{IJ} = \sqrt{2\alpha'} \pi [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_0^J] + \sqrt{2\alpha'} \pi \sum_{n \neq 0} e^{-in\tau} \cos(n\sigma') [\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J]. \quad (8.53)$$

Der Kommutator $[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_0^J] = \sqrt{2\alpha'} i\eta^{IJ}$ ist bereits aus (8.51) bekannt. Zusammen mit dem

⁵²Da die Null-Mode $\hat{\alpha}_0^I$ hermitesch ist, gilt dies sogar für $n = 0$.

Vorfaktor ergibt der erste Term der rechten Seite somit bereits die linke Seite, sodass die Summe verschwinden muss. Da dies für beliebige Werte von τ und σ' gelten muss, müssen die Summanden einzeln verschwinden, woraus

$$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J] = 0, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (8.54)$$

folgt. Die Gleichungen (8.51) und (8.54) lassen sich zusammenführen:

$$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J] = \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \delta_{n,0} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (8.55)$$

Da nun alle möglichen Kommutatoren der Größen \hat{x}_0^I , \hat{p}^I und $\hat{\alpha}_n^I$ untereinander bis auf $[\hat{x}_0^I, \hat{x}_0^J]$ hergeleitet sind, kann schließlich die Reihenentwicklungen (8.24) in den Kommutator $[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma')] = 0$ eingesetzt werden, um nach $[\hat{x}_0^I, \hat{x}_0^J]$ aufzulösen:

$$\begin{aligned} 0 &= [\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{X}^J(\tau, \sigma')] \\ &= \left[\hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \right. \\ &\quad \left. \hat{x}_0^J + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^J \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \hat{\alpha}_m^J e^{-im\tau} \cos(m\sigma') \right] \\ &= [\hat{x}_0^I, \hat{x}_0^J] + i2\alpha' \eta^{IJ} \tau - i2\alpha' \eta^{JI} \tau - 2\alpha' \sum_{n, m \neq 0} \frac{1}{nm} e^{-i(n+m)\tau} \cos(n\sigma) \cos(m\sigma') [\hat{\alpha}_n^I, \hat{\alpha}_m^J] \\ &= [\hat{x}_0^I, \hat{x}_0^J] - 2\alpha' \eta^{IJ} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \cos(m\sigma) \cos(m\sigma'), \end{aligned} \quad (8.56)$$

wobei im letzten Schritt mit Hilfe des Kronecker-Deltas aus dem Kommutator $[\hat{\alpha}_n^I, \hat{\alpha}_m^J]$ die Summe vereinfacht wurde. Wendet man auf diese Gleichung das Integral $\int_0^\pi d\sigma \int_0^\pi d\sigma'$ an, so folgt wegen (6.55)

$$[\hat{x}_0^I, \hat{x}_0^J] = 0. \quad (8.57)$$

Somit sind alle Kommutatoren, die die Größen \hat{x}_0^I , \hat{p}^I und $\hat{\alpha}_n^I$ untereinander betreffen, bekannt. Natürlich sind prinzipiell auch die Kommutatoren dieser Größen mit den Basis-Kommutatoren $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ und $\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)$, die einen transversalen Index tragen, bzw. mit deren τ - und σ -Ableitungen von Interesse. Die Herleitungen sind nicht mehr schwierig, da bereits viele Kommutatoren bekannt sind. Sie sollen dennoch nicht mehr hergeleitet werden, da sie für die abschließende Rechnung in Kapitel 8.5 nicht mehr gebraucht werden. Damit ist die Untersuchung der transversalen Feldoperatoren $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ beendet.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts zeigen: Der offene, freie, quantenmechanische, relativistische String wird von einer Menge an Operatoren beschrieben, in der einige Null-Moden und unendlich viele Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren enthalten sind. Die Null-Moden sind \hat{x}_0^I , \hat{p}^I , \hat{x}_0^- und \hat{p}^+ , die Leiteroperatoren sind $\hat{\alpha}_n^I$ und $\hat{\alpha}_n^{I\dagger}$ ($n \in \mathbb{N}$) bzw. $\hat{\alpha}_n^I$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Die beiden Basis-Operatoren $\hat{X}^I(\tau, \sigma)$ und $\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)$ können durch diese Operatoren ausgedrückt werden, vgl. (8.24) und (6.60):

$$\hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma) = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma). \quad (8.58)$$

8.3 Quantisierung der Lichtkegel-String-Koordinaten $X^\pm(\tau, \sigma)$ ⁵³

In diesem Abschnitt werden die Feldoperatoren $\hat{X}^\pm(\tau, \sigma)$ studiert. Wegen der Lichtkegel-Eichung (6.64) nimmt der +-Operator eine einfache Form an:

$$\hat{X}^+(\tau, \sigma) = 2\alpha' \hat{p}^+ \tau = \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^+ \tau. \quad (8.59)$$

Wie im klassischen Fall zeigt ein Vergleich mit der Moden-Expansion (6.65), dass die Eichbedingung

$$\hat{x}_0^+ \equiv 0, \quad \hat{\alpha}_n^+ \equiv 0 \quad \forall n \neq 0 \quad (8.60)$$

entspricht. Zusammen mit der σ -Lichtkegel-Eichbedingung $\hat{p}^+ = \pi \hat{\mathcal{P}}^{\tau+} = \text{const}$ gilt

$$\hat{X}^+(\tau, \sigma) = \hat{X}^+(\tau) \propto \hat{p}^+ \propto \hat{\mathcal{P}}^{\tau+} = \text{const}. \quad (8.61)$$

Die Diskussion des wegen den Zwangsbedingungen vollständig von den transversalen Feldoperatoren (und den beiden Null-Moden \hat{x}_0^- sowie \hat{p}^+) abhängenden negativen Feldoperators $\hat{X}^-(\tau, \sigma)$ ist komplexer. Es gilt (vgl. (6.68))

$$\hat{X}^-(\tau, \sigma) = \hat{x}_0^- + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^- e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (8.62)$$

mit (vgl. (6.76))

$$\sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_n^- = \frac{1}{\hat{p}^+} \hat{L}_n^\perp \quad (8.63)$$

und (vgl. (6.75))

$$\hat{L}_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{n-p}^I \hat{\alpha}_p^I, \quad (8.64)$$

wobei über I summiert wird. Die transversalen Virasoro-Moden werden zu transversalen Virasoro-Operatoren. Insbesondere gilt

$$\hat{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I = 2\alpha' \hat{p}^+ \hat{p}^-. \quad (8.65)$$

All diese Gleichungen können aus der klassischen Theorie übernommen werden, da die Wellengleichung sowie die Zwangs- und Randbedingungen als Operator-Gleichungen in der Quanten-Stringtheorie gültig bleiben. Das einzige Problem ist, dass in der klassischen Theorie die $\hat{\alpha}_n^I$ -Moden als kommutierende, komplexe Zahlen behandelt wurden, sie in der Quantentheorie aber die nicht-triviale Kommutator-Relation (8.41) erfüllen. Ziel ist eine wohldefinierte Version von (8.64), in der die Operatoren \hat{L}_n^\perp „normal geordnet“ sind. Ein Operator, bestehend aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, wird als normal geordnet bezeichnet, falls kein Vernichtungsoperator links von einem Erzeugungsoperator auftaucht, die nicht kommutieren. Z.B. sind die Operatoren $\hat{a}_n \hat{a}_m$, $\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger$ und $\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $\hat{a}_n \hat{a}_m^\dagger$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$, solange $n \neq m$ ist, normal geordnet, wohingegen der Operator $\hat{a}_n \hat{a}_n^\dagger$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nicht normal geordnet ist. Die richtige Ordnung der Operatoren ist wichtig, da sie dann in einfacher Weise auf den Vakuumzustand $|0\rangle$ wirken:

$$\hat{a}_n |0\rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (8.66)$$

Da zwei $\hat{\alpha}_n^I$ -Operatoren nur dann nicht kommutieren, wenn sich ihre Moden-Nummern zu

⁵³orientiert sich an [1, Kapitel 12.4]

null addieren, s. (8.41), ist der einzige transversale Virasoro-Operator, der nicht wohldefiniert ist, \hat{L}_0^\perp . Gleichung (8.65) wird genauer untersucht, indem die Summe in Terme mit $p = 0$, $p > 0$ und $p < 0$ zerlegt wird und für die Terme mit $p < 0$ $p \rightarrow -p$ umbenannt wird:

$$\hat{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{-p}^I. \quad (8.67)$$

Da $\hat{\alpha}_p^I$ -Operatoren mit $p > 0$ Vernichtungs- und solche mit $p < 0$ Erzeugungsoperatoren entsprechen, ist der dritte Term nicht normal geordnet. Seine Ordnung ergibt

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{-p}^I = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \{ [\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_{-p}^I] + \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I \} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \{ p \eta^{II} + \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I \}, \quad (8.68)$$

wobei $\eta^{II} = \text{tr } \eta^{IJ} = D - 2$. Zusammenfassend ergibt sich der normal geordnete \hat{L}_0^\perp -Operator zu

$$\hat{L}_0^\perp = \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{D-2}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p. \quad (8.69)$$

Der dritte Term wird als Ordnungskonstante a bezeichnet. Dass er divergiert ist insofern problematisch, als dass \hat{L}_0^\perp über $\hat{H} = \hat{L}_0^\perp$ (s. (8.9)) und $\hat{M}^2 = \frac{1}{\alpha'} \hat{L}_0^\perp - \hat{p}^I \hat{p}^I$ (vgl. Kapitel 6.4) direkt in die Berechnung von Energien und Massen eingeht, die nicht unendlich sein sollten.

Als „pragmatische“ Lösung des Problems wird \hat{L}_0^\perp zunächst als normal geordneter Operator ohne Ordnungskonstante neu definiert:

$$\hat{L}_0^\perp \equiv \frac{1}{2} \hat{\alpha}_0^I \hat{\alpha}_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I = \alpha' \hat{p}^I \hat{p}^I + \sum_{p=1}^{\infty} p \hat{\alpha}_p^{I\dagger} \hat{\alpha}_p^I. \quad (8.70)$$

In dieser Form ist er manifest normal geordnet und hermitesch,

$$\left(\hat{L}_0^\perp \right)^\dagger = \hat{L}_0^\perp, \quad (8.71)$$

d.h. eine Observable. Somit lassen sich die Definitionen von \hat{L}_0^\perp und \hat{L}_m^\perp ($m \neq 0$) zusammenfassend in der normal geordneten Form

$$\hat{L}_m^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{m-p}^I \hat{\alpha}_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=-1}^{-\infty} \hat{\alpha}_p^I \hat{\alpha}_{m-p}^I \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (8.72)$$

schreiben. Anschließend wird eine Ordnungskonstante $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eingeführt, die zum Rechnen verwendet werden kann. Der neu definierte Operator \hat{L}_0^\perp ergibt sich somit aus dem alten durch $\hat{L}_0^\perp \rightarrow \hat{L}_0^\perp + a$, wodurch der Hamilton-Operator, die Massenformel und der Impuls \hat{p}^- die neuen Formen

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{L}_0^\perp + a \\ \hat{M}^2 &= \frac{1}{\alpha'} \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) - \hat{p}^I \hat{p}^I \stackrel{(8.70)}{=} \frac{1}{\alpha'} \left(a + \sum_{p=1}^{\infty} p \hat{\alpha}_p^{I\dagger} \hat{\alpha}_p^I \right) \\ \hat{p}^- &= \frac{1}{2\alpha' \hat{p}^+} \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) \end{aligned} \quad (8.73)$$

annehmen.

Das beschriebene Vorgehen kann folgendermaßen gerechtfertigt werden: Um die Quanten-Stringtheorie zu konstruieren, muss der Operator \hat{L}_0^\perp physikalisch sinnvoll definiert werden. Jede korrekt funktionierende Definition ist zunächst erlaubt. Den von der klassischen Physik vorgeschlagenen Operator zu ordnen führt zu unphysikalischen Unendlichkeiten, weswegen kein Grund dazu besteht anzunehmen, dass die Quantentheorie vollständig durch Analogieschluss aus der klassischen Theorie hervorgeht, bzw. dass tatsächlich

$$a \stackrel{?}{=} \frac{D-2}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \quad (8.74)$$

gilt. Da es dennoch sicherlich sinnvoll ist, prinzipiell die erhaltene Intuition über den klassischen String auszunutzen, wird für die Definition von \hat{L}_0^\perp die grundsätzliche Form der klassischen Virasoro-Mode L_0^\perp übernommen. Die sich ergebenden Definitionsmöglichkeiten unterscheiden sich dann nur durch eine (evtl. unendliche) Konstante a . Dieser Eigenschaft Rechnung tragend wird \hat{L}_0^\perp als normal geordneter Operator definiert und die un spezifizierte Konstante a dazu addiert. Ihr Wert muss im Folgenden durch physikalische Eigenschaften (konkret der Lorentz-Invarianz der Theorie) fixiert werden.

Nimmt man den Ordnungsversuch (8.74) dennoch ernst, so kann mit Hilfe der Zeta-Funktion

$$\zeta(s) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } s > 1 \quad (8.75)$$

versucht werden, die divergierende Summe des Ordnungsversuchs (8.74) zu „berechnen“. Das Einsetzen des (verbotenen) Wertes $s = -1$ ergibt

$$\zeta(s = -1) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (8.76)$$

Analytische Fortsetzung erlaubt die Definition von $\zeta(s)$ in Form einer Integraldarstellung für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, wobei sich für $s = 1$ in der Darstellung (8.75) die divergierende harmonische Reihe ergäbe. Aus der Integraldarstellung berechnet sich $\zeta(s = -1) = -\frac{1}{12}$, woraus

$$a \stackrel{?}{=} \frac{D-2}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \stackrel{?}{=} \frac{D-2}{2} \zeta(-1) = -\frac{D-2}{2} \frac{1}{12} = -\frac{D-2}{24} \quad (8.77)$$

folgt, was das physikalisch korrekte Ergebnis ist, wie in Kapitel 8.5 gezeigt wird. Die beiden Fragezeichen scheinen sich gegenseitig aufzuheben.

Nachdem \hat{L}_0^\perp ausführlich diskutiert wurde, werden nun die anderen transversalen Virasoro-Operatoren untersucht. Zunächst wird ihre Hermitizitätsrelation ermittelt. Für $n \neq 0$ gilt unter Verwendung von (8.49):

$$\begin{aligned} (\hat{L}_n^\perp)^\dagger &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\hat{\alpha}_{n-p}^I \hat{\alpha}_p^I)^\dagger = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_p^{I\dagger} \hat{\alpha}_{n-p}^{I\dagger} = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_{-n+p}^I \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-n+p}^I \hat{\alpha}_{-p}^I = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-n-p}^I \hat{\alpha}_p^I = \hat{L}_{-n}^\perp, \end{aligned} \quad (8.78)$$

wobei im im vorletzten Schritt $p \rightarrow -p$ umbenannt wurde. Zusammen mit Gleichung (8.71)

gilt deswegen

$$\left(\hat{L}_n^\perp\right)^\dagger = \hat{L}_{-n}^\perp \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (8.79)$$

Daraus folgt weiterhin wegen der Hermitizität des Impulses \hat{p}^+ für die Minus-Oszillatoren

$$\left(\hat{\alpha}_n^-\right)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \left(\frac{1}{\hat{p}^+} \hat{L}_n^\perp\right)^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \hat{L}_{-n}^\perp \frac{1}{\hat{p}^+} \stackrel{!}{=} \frac{1}{\sqrt{2\alpha'}} \frac{1}{\hat{p}^+} \hat{L}_{-n}^\perp = \hat{\alpha}_{-n}^- \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (8.80)$$

Der Fall $n = 0$ ist enthalten, da die Ordnungskonstante a reell ist und mit \hat{p}^+ kommutiert. Das durch das Ausrufungszeichen markierte Gleichheitszeichen muss noch bewiesen werden. Dazu wird der folgende Kommutator betrachtet:

$$\left[\hat{p}^+, \dot{X}^I(\tau, \sigma)\right] = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \left[\hat{p}^+, \hat{\alpha}_n^I\right] \stackrel{!}{=} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\hat{p}^+, X^I(\tau, \sigma)\right] = 0, \quad (8.81)$$

wobei die Reihenentwicklung von $\dot{X}^I(\tau, \sigma)$ benutzt wurde. Da der Kommutator für alle τ und σ verschwinden muss, müssen die einzelnen Summanden der unendlichen Summe verschwinden und es gilt

$$\left[\hat{p}^+, \hat{\alpha}_n^I\right] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (8.82)$$

Daraus folgt

$$\left[\hat{p}^+, \hat{L}_n^\perp\right] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[\hat{p}^+, \hat{\alpha}_{n-p}^I \hat{\alpha}_p^I\right] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (8.83)$$

wobei der Fall $n = 0$ enthalten ist, da \hat{p}^+ mit der Ordnungskonstante a kommutiert. Somit sind die beiden obigen Hermitizitätsrelationen (8.79) und (8.80) vollständig bewiesen.

Ziel des folgenden Abschnitts ist die Berechnung des Kommutators $\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{L}_n^\perp\right]$. Als Vorüberlegung wird zunächst der Kommutator

$$\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{\alpha}_n^J\right] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[\hat{\alpha}_{m-p}^I \hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_n^J\right] \quad (8.84)$$

berechnet. Diese Gleichung bleibt selbst im Fall $m = 0$ wegen

$$\left[\hat{L}_0^\perp, \hat{\alpha}_n^J\right] = \left[-a + \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_n^J\right] = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[\hat{\alpha}_{-p}^I \hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_n^J\right] \quad (8.85)$$

gültig: Die Konstante a kommutiert mit jedem Operator⁵⁴. Mit Hilfe der Rechenregel (7.46) folgt

$$\begin{aligned} \left[\hat{L}_m^\perp, \hat{\alpha}_n^J\right] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{\alpha}_{m-p}^I \left[\hat{\alpha}_p^I, \hat{\alpha}_n^J\right] + \left[\hat{\alpha}_{m-p}^I, \hat{\alpha}_n^J\right] \hat{\alpha}_p^I \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ p \eta^{IJ} \delta_{p+n,0} \hat{\alpha}_{m-p}^I + (m-p) \eta^{IJ} \delta_{m+n-p} \hat{\alpha}_p^I \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -n \hat{\alpha}_{m+n}^J - n \hat{\alpha}_{m+n}^J \right\}, \end{aligned} \quad (8.86)$$

⁵⁴Dies ist auch der Grund, weswegen die in Kapitel 8.1 berechneten Zeitentwicklungen gültig bleiben, da $\left[\hat{\xi}(\tau), \hat{H}\right] = \left[\hat{\xi}(\tau), \hat{L}_0^\perp + a\right] = \left[\hat{\xi}(\tau), \hat{L}_0^\perp\right]$ gilt.

d.h.

$$\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{\alpha}_n^I \right] = -n \hat{\alpha}_{m+n}^I \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (8.87)$$

Die Moden-Nummern sowie der transversale Index sind „erhalten“. Mit $n = 0$ folgt

$$\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{p}^I \right] = 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (8.88)$$

Die vollständige Herleitung des Kommutators zweier Virasoro-Operatoren $\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{L}_n^\perp \right]$ soll hier nicht durchgeführt werden, da sie recht länglich und technisch ist, jedoch nur das Ergebnis interessiert. Sie umfasst das Einsetzen des normal geordneten Ausdrucks (8.72) für \hat{L}_n^\perp und das mehrfache Anwenden der Kommutator-Relation (8.87). Anschließend müssen die Fälle $m+n \neq 0$ und $m+n = 0$ separat betrachtet werden, um stets die normale Ordnung der Terme zu garantieren. Das Endergebnis ist die sogenannte Virasoro-Algebra mit zentraler Erweiterung und lautet [1, S. 254 ff.]

$$\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{L}_n^\perp \right] = (m-n) \hat{L}_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (8.89)$$

Die in der Herleitung gemachte Fallunterscheidung zwischen $m+n \neq 0$ und $m+n = 0$ spiegelt sich am Kronecker-Delta $\delta_{m+n,0}$ wider. Die Konstante $\frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m+n,0}$, die von der Raumzeit-Dimension D abhängt, wird als zentrale Erweiterung bezeichnet. Ist $m+n \neq 0$, reduziert sich die Algebra zur sogenannten Witt-Algebra

$$\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{L}_n^\perp \right] = (m-n) \hat{L}_{m+n}^\perp, \quad m+n \neq 0. \quad (8.90)$$

Im Gegensatz zu den Oszillatoren $\hat{\alpha}_n^I$, die immer kommutieren, es sei denn $m+n = 0$, kommutieren zwei transversale Virasoro-Operatoren nie (es sei denn im trivialen Fall $m=n$). Die zentrale Erweiterung hat Nullstellen bei $m=0$ und $m=\pm 1$.

Es soll noch der Kommutator $\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{x}_0^J \right]$ berechnet werden. Mit Hilfe von Gleichung (8.55) und der Rechenregel (7.46) ergibt dieser

$$\begin{aligned} \left[\hat{L}_m^\perp, \hat{x}_0^J \right] &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left[\hat{\alpha}_{m-p}^I \hat{\alpha}_p^I, \hat{x}_0^J \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ \hat{\alpha}_{m-p}^I \left[\hat{\alpha}_p^I, \hat{x}_0^J \right] + \left[\hat{\alpha}_{m-p}^I, \hat{x}_0^J \right] \hat{\alpha}_p^I \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left\{ -\sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \delta_{p,0} \hat{\alpha}_{m-p}^I - \sqrt{2\alpha'} i \eta^{IJ} \delta_{m-p,0} \hat{\alpha}_p^I \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{2\alpha'} i \left\{ \hat{\alpha}_m^J + \hat{\alpha}_m^J \right\}, \end{aligned} \quad (8.91)$$

d.h.

$$\left[\hat{L}_m^\perp, \hat{x}_0^I \right] = -\sqrt{2\alpha'} i \hat{\alpha}_m^I \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (8.92)$$

Die Rechnung gilt wiederum für $m=0$, da die Konstante a mit \hat{x}_0^J kommutiert, vgl. die Diskussion unterhalb von (8.84).

Damit ist die Quantisierung der Feldoperatoren $\hat{X}^\pm(\tau, \sigma)$ beendet.

8.4 Konstruktion des Lichtkegel-Lorentz-Generators⁵⁵ \hat{M}^{-I}

In diesem Abschnitt wird der Lichtkegel-Lorentz-Generator \hat{M}^{-I} konstruiert. Es wird ein Operator gesucht, der sich durch die Null-Moden sowie durch die Oszillatoren und Virasoro-Operatoren ausdrücken lässt und der die Lorentz-Algebra, insbesondere $[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}] = 0$, erfüllt. Ob der in diesem Abschnitt konstruierte Operator dies tut, wird explizit im nächsten Abschnitt 8.5 überprüft. Es ist nicht ohne Weiteres klar, ob solche Operatoren überhaupt konsistent definiert werden können. Selbst wenn die Konstruktion gelingt, ist dies noch kein vollständiger Beweis der Lorentz-Invarianz der Theorie, da die verbleibenden Operatoren \hat{M}^{+-} , \hat{M}^{+I} und \hat{M}^{IJ} vernachlässigt werden. Da jedoch von den vier Generatoren \hat{M}^{-I} der komplizierteste ist, da die Minus-Oszillatoren komplizierte Funktionen der transversalen Oszillatoren sind, ist seine erfolgreiche Konstruktion ein großer Schritt, die Lorentz-Invarianz bosonischer Stringtheorie in Lichtkegel-Eichung zu beweisen.

Da in Lichtkegel-Eichung die Impulsdichten einfache Ableitungen der Koordinaten sind, vereinfachen sich die klassischen Lorentz-Ladungen (5.56) unter Anwendung von (6.36) zu

$$M_{\mu\nu} = \int_0^\pi \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau d\sigma = \int_0^\pi (X_\mu \mathcal{P}_\nu^\tau - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\tau) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi (X_\mu \dot{X}_\nu - X_\nu \dot{X}_\mu) d\sigma. \quad (8.93)$$

Mit Hilfe der Reihenentwicklungen (s. (6.59) und (6.60))

$$\begin{aligned} X^\mu(\tau, \sigma) &= x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \\ \dot{X}^\nu(\tau, \sigma) &= \sqrt{2\alpha'} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \alpha_m^\nu e^{-im\tau} \cos(m\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\nu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{m \neq 0} \alpha_m^\nu e^{-im\tau} \cos(m\sigma) \end{aligned} \quad (8.94)$$

kann das Integral ausgerechnet werden. Dazu wird zunächst $X^\mu \dot{X}^\nu$ ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} X^\mu \dot{X}^\nu &= \sqrt{2\alpha'} x_0^\mu \alpha_0^\nu + \sqrt{2\alpha'} x_0^\mu \sum_{m \neq 0} \alpha_m^\nu e^{-im\tau} \cos(m\sigma) \\ &\quad + 2\alpha' \alpha_0^\mu \alpha_0^\nu \tau + 2\alpha' \alpha_0^\mu \tau \sum_{m \neq 0} \alpha_m^\nu e^{-im\tau} \cos(m\sigma) \\ &\quad + i2\alpha' \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_0^\nu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) + i2\alpha' \sum_{n, m \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu \alpha_m^\nu e^{-i(n+m)\tau} \cos(n\sigma) \cos(m\sigma). \end{aligned} \quad (8.95)$$

In Kapitel 5.3 wurde bewiesen, dass $M_{\mu\nu}$ eine Erhaltungsgröße ist, weswegen keine τ -abhängigen Terme zum Integral in (8.93) beitragen können. Tatsächlich sieht man, dass wegen (6.55) der zweite, vierte und fünfte Term bei der Integration wegfallen werden. Der dritte Term ist symmetrisch unter Austausch von μ und ν und trägt ebenfalls nicht zur antisymmetrischen Lorentz-Ladung bei. Da die Menge $\{\cos(n\sigma)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ein vollständiges Funktionensystem bildet, wählt das Integral über den sechsten Term gerade solche Terme aus, in denen $n = m$ bzw. wegen der Symmetrie des Kosinus $n = -m$ ist, denn es gilt

$$\int_0^\pi d\sigma \cos(n\sigma) \cos(m\sigma) = \frac{\pi}{2} (\delta_{n,m} + \delta_{n,-m}). \quad (8.96)$$

Im Fall $n = -m$ verschwindet die τ -Abhängigkeit und die Summanden tragen bei; im Fall $n = m$ verschwindet die Zeitabhängigkeit nicht, aber wegen der Symmetrie der Summanden

⁵⁵orientiert sich an [1, Kapitel 12.5]

können sie nicht zur Lorentz-Ladungen beitragen. Somit verschwindet erwartungsgemäß die gesamte Zeitabhängigkeit der Lorentz-Ladung. Nur der erste Term und die Summanden des sechsten Terms mit $n = -m$ tragen bei. Somit gilt

$$\begin{aligned}
M^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma \left(\sqrt{2\alpha'} x_0^\mu \alpha_0^\nu - \sqrt{2\alpha'} x_0^\nu \alpha_0^\mu \right. \\
&\quad \left. - i2\alpha' \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu \cos^2(m\sigma) + i2\alpha' \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} \alpha_{-m}^\nu \alpha_m^\mu \cos^2(m\sigma) \right) \\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - \frac{i}{2} \sum_{m \neq 0} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu - \alpha_{-m}^\nu \alpha_m^\mu) \\
&= x_0^\mu p^\nu - x_0^\nu p^\mu - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\alpha_{-m}^\mu \alpha_m^\nu - \alpha_{-m}^\nu \alpha_m^\mu).
\end{aligned} \tag{8.97}$$

Im dritten Schritt wurde das Integral $\int_0^\pi \cos^2(n\sigma) d\sigma = \frac{\pi}{2}$ benutzt und im letzten Schritt wurde die Summe in positive und negative Summanden gespalten und $m \rightarrow -m$ umbenannt. Somit sind die klassischen Lorentz-Ladungen gefunden.

Erhebt man (8.97) zu einer Operator-Gleichung, erhält man einen ersten Ansatz für den Lichtkegel-Lorentz-Generator \hat{M}^{-I} :

$$\hat{M}^{-I} \stackrel{?}{=} \hat{x}_0^- \hat{p}^I - \hat{x}_0^I \hat{p}^- - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\hat{\alpha}_{-m}^- \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^-). \tag{8.98}$$

Der Operator sollte die folgenden fünf Eigenschaften besitzen: Er sollte erstens zeitunabhängig, zweitens antisymmetrisch, drittens hermitesch, viertens normal geordnet sein und fünftens Lorentz-Transformationen generieren (evtl. kombiniert mit Reparametrisierungen), d.h. er sollte die Lorentz-Algebra erfüllen. Wie beschrieben sind beim Integrieren der klassischen Lorentz-Ladungen alle explizit zeitabhängigen Terme herausgefallen. Weiterhin sind die Null-Moden sowie die Oszillatoren zeitunabhängige Heisenberg-Operatoren, sodass \hat{M}^{-I} auch nicht implizit zeitabhängig ist. Die erste Eigenschaft ist somit erfüllt. Auch die Antisymmetrie ist offensichtlich erfüllt.

Als nächstes soll die Hermitizität überprüft werden. Da die Null-Moden hermitesch sind und kommutieren, ist der erste Term hermitesch:

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_0^-, \hat{p}^I] &= \int_0^\pi d\sigma [\hat{x}_0^-, \hat{\mathcal{P}}^{\tau I}(\tau, \sigma)] = 0 \\
\Rightarrow \hat{x}_0^- \hat{p}^I - (\hat{x}_0^- \hat{p}^I)^\dagger &= [\hat{x}_0^-, \hat{p}^I] = 0.
\end{aligned} \tag{8.99}$$

Wegen der Gleichungen (8.49) und (8.80) ist auch der letzte Term hermitesch:

$$\begin{aligned}
\left(-i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\hat{\alpha}_{-m}^- \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^-) \right)^\dagger &= +i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left((\hat{\alpha}_{-m}^- \hat{\alpha}_m^I)^\dagger - (\hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^-)^\dagger \right) \\
&= +i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^- - \hat{\alpha}_{-m}^- \hat{\alpha}_m^I) \\
&= -i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (\hat{\alpha}_{-m}^- \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^-).
\end{aligned} \tag{8.100}$$

Der zweite Term ist nicht hermitesch, da \hat{x}_0^I und \hat{p}^- nicht kommutieren. Dies sieht man wie folgt: Zunächst wird

$$0 = \left[\hat{X}^I(\tau, \sigma), \hat{p}^+ \right] = \left[\hat{x}_0^I, \hat{p}^+ \right] + \sqrt{2\alpha'} \left[\hat{\alpha}_0^I, \hat{p}^+ \right] \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left[\hat{\alpha}_n^I, \hat{p}^+ \right] e^{-in\tau} \cos(n\sigma)$$

$$\stackrel{(8.82)}{\implies} \left[\hat{x}_0^I, \hat{p}^+ \right] = 0 \quad (8.101)$$

benötigt. Das Verschwindens dieses Kommutators sowie die Gleichungen (8.73) und (8.92) führen dann zu

$$\left[\hat{x}_0^I, \hat{p}^- \right] = \frac{1}{2\alpha'} \left[\hat{x}_0^I, \frac{1}{\hat{p}^+} \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) \right] = \frac{1}{2\alpha' \hat{p}^+} \left[\hat{x}_0^I, \hat{L}_0^\perp \right] = i \frac{\hat{p}^I}{\hat{p}^+} \neq 0. \quad (8.102)$$

Daraus folgt

$$\hat{x}_0^I \hat{p}^- - \left(\hat{x}_0^I \hat{p}^- \right)^\dagger = \left[\hat{x}_0^I, \hat{p}^- \right] \neq 0. \quad (8.103)$$

Genau wie beim Punktteilchen in Gleichung (7.81) und (7.82) wird der zweite Term daher symmetrisiert und der neue Lorentz-Generator hat die Form

$$\hat{M}^{-I} \stackrel{?}{=} \hat{x}_0^- \hat{p}^I - \frac{1}{2} \left(\hat{x}_0^I \hat{p}^- + \hat{p}^- \hat{x}_0^I \right) - i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\hat{\alpha}_{-m}^- \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^- \right). \quad (8.104)$$

Dieser ist zeitunabhängig, antisymmetrisch und hermitesch. Da die Vernichtungsoperatoren $\hat{\alpha}_m^I$ im ersten Summanden in der Klammer hinter dem Summenzeichen ganz rechts stehen und die Erzeugungsoperatoren $\hat{\alpha}_{-m}^I$ im zweiten Term ganz links auftauchen, und da weiterhin die Minus-Oszillatoren proportional zu den normal geordneten, transversalen Virasoro-Operatoren sind, d.h. in sich normal geordnet sind, ist der Lorentz-Generator insgesamt normal geordnet und erfüllt somit auch die vierte Eigenschaft. Es sind damit alle Voraussetzungen erfüllt und es kann getestet werden, ob \hat{M}^{-I} tatsächlich die Lorentz-Algebra erfüllt. Davor sollen noch die bislang weniger ausführlich behandelten Operatoren \hat{p}^- und $\hat{\alpha}_m^-$ durch bekanntere ersetzt werden, wozu die Gleichungen (8.73) und (8.63) verwendet werden. Die endgültige Form des Lorentz-Generator ergibt sich noch die Benutzung der Kommutatoren (8.101) und (8.82), um den Ausdruck eleganter schreiben zu können:

$$\hat{M}^{-I} = \hat{x}_0^- \hat{p}^I - \frac{1}{4\alpha' \hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^I \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) + \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) \hat{x}_0^I \right\} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' \hat{p}^+}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\hat{L}_{-m}^\perp \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{L}_m^\perp \right). \quad (8.105)$$

Damit ist die Konstruktion des Lichtkegel-Lorentz-Generators \hat{M}^{-I} abgeschlossen.

8.5 Berechnung der Raumzeit-Dimensionalität

In diesem Abschnitt wird der Kommutator $\left[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J} \right]$ berechnet, wobei \hat{M}^{-I} durch Gleichung (8.105) definiert ist. Teilt man \hat{M}^{-I} gedanklich in drei Teile, bestehend aus den Null-Moden $\hat{x}_0^- \hat{p}^I$, der geschweiften Klammer (inklusive Vorfaktor) und der unendlichen Summe (inklusive Vorfaktor), so führt die Bilinearität des Kommutators zu neun Unter-

$$\begin{aligned}
& \text{Kommutatoren: } [\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}] = \\
& = \left[\hat{x}_0^- \hat{p}^I - \frac{1}{4\alpha' \hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^I (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^I \right\} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' \hat{p}^+}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\hat{L}_{-m}^\perp \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{L}_m^\perp \right), \right. \\
& \quad \left. \hat{x}_0^- \hat{p}^J - \frac{1}{4\alpha' \hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^J (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^J \right\} - \frac{i}{\sqrt{2\alpha' \hat{p}^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{L}_n^\perp \right) \right] \\
& = [\hat{x}_0^- \hat{p}^I, \hat{x}_0^- \hat{p}^J] - \frac{1}{4\alpha'} \left[\hat{x}_0^- \hat{p}^I, \frac{1}{\hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^J (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^J \right\} \right] \\
& \quad - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\hat{x}_0^- \hat{p}^I, \frac{1}{\hat{p}^+} \left(\hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{L}_n^\perp \right) \right] - \frac{1}{4\alpha'} \left[\frac{1}{\hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^I (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^I \right\}, \hat{x}_0^- \hat{p}^J \right] \\
& \quad + \frac{1}{16\alpha'^2} \left[\frac{1}{\hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^I (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^I \right\}, \frac{1}{\hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^J (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^J \right\} \right] \\
& \quad + \frac{i}{4\alpha' \sqrt{2\alpha'}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{\hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^I (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^I \right\}, \frac{1}{\hat{p}^+} \left(\hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{L}_n^\perp \right) \right] \\
& \quad - \frac{i}{\sqrt{2\alpha'}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{1}{\hat{p}^+} \left(\hat{L}_{-m}^\perp \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{L}_m^\perp \right), \hat{x}_0^- \hat{p}^J \right] \\
& \quad + \frac{i}{4\alpha' \sqrt{2\alpha'}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left[\frac{1}{\hat{p}^+} \left(\hat{L}_{-m}^\perp \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{L}_m^\perp \right), \frac{1}{\hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^J (\hat{L}_0^\perp + a) + (\hat{L}_0^\perp + a) \hat{x}_0^J \right\} \right] \\
& \quad - \frac{1}{2\alpha'} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{1}{mn} \left[\frac{1}{\hat{p}^+} \left(\hat{L}_{-m}^\perp \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{L}_m^\perp \right), \frac{1}{\hat{p}^+} \left(\hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{L}_n^\perp \right) \right]
\end{aligned} \tag{8.106}$$

Alle Terme sind normal geordnet. Es ist zu erkennen, dass der vierte Term gerade das Negative des zweiten Terms ist, wenn I und J vertauscht werden. Analoges gilt für die Terme sieben und drei sowie acht und sechs. Es müssen daher nur der erste, zweite, dritte, fünfte, sechste und neunte Kommutator berechnet werden. Der Lorentz-Generator \hat{M}^{-I} besteht, von links nach rechts, aus den Operatoren \hat{x}_0^- , \hat{p}^I , $\frac{1}{\hat{p}^+}$, \hat{x}_0^I , \hat{L}_0^\perp , \hat{L}_n^\perp ($n \neq 0$) und $\hat{\alpha}_n^I$ ($n \neq 0$). Aus diesen sieben Operatoren lassen sich 25 Kommutatoren bilden, auf die sich die Berechnung des gesamten Kommutators $[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}]$ zurückführen lässt. Diese 25 Kommutatoren lauten:

#	Kommutator	Beweis
1)	$[\hat{x}_0^-, \hat{p}^I] = 0$	(8.99)
2)	$[\hat{x}_0^-, \frac{1}{\hat{p}^+}] = \frac{i}{\hat{p}^{+2}}$	(7.57)
3)	$[\hat{x}_0^-, \hat{x}_0^I] = 0$	(9.11)
4), 5)	$[\hat{x}_0^-, \hat{L}_n^\perp] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(9.12)
6)	$[\hat{x}_0^-, \hat{\alpha}_n^I] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(9.10)
7)	$[\hat{p}^I, \hat{p}^J] = 0$	(8.43)
8)	$[\hat{p}^I, \frac{1}{\hat{p}^+}] = 0$, da alle Impulse kommutieren	
9)	$[\hat{p}^I, \hat{x}_0^J] = -i\eta^{IJ}$	(8.51)
10), 11)	$[\hat{p}^I, \hat{L}_n^\perp] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(8.88)
12)	$[\hat{p}^I, \hat{\alpha}_n^J] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(8.41)
13)	$[\frac{1}{\hat{p}^+}, \hat{x}_0^I] = 0$	(8.101)
14, 15)	$[\frac{1}{\hat{p}^+}, \hat{L}_n^\perp] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(8.83)
16)	$[\frac{1}{\hat{p}^+}, \hat{\alpha}_n^I] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(8.82)
17)	$[\hat{x}_0^I, \hat{x}_0^J] = 0$	(8.57)
18, 19)	$[\hat{x}_0^I, \hat{L}_n^\perp] = i\sqrt{2\alpha'}\hat{\alpha}_n^I \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(8.92)
20)	$[\hat{x}_0^I, \hat{\alpha}_n^J] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$	(8.54)
21)	$[\hat{L}_0^\perp, \hat{L}_n^\perp] = -n\hat{L}_n^\perp \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(8.89)
22)	$[\hat{L}_0^\perp, \hat{\alpha}_n^I] = -n\hat{\alpha}_n^I \quad \forall n \in \mathbb{Z}$	(8.87)
23)	$[\hat{L}_m^\perp, \hat{L}_n^\perp] = (m-n)\hat{L}_{m+n}^\perp + \frac{D-2}{12}(m^3-m)\delta_{m+n,0} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$	(8.89)
24)	$[\hat{L}_m^\perp, \hat{\alpha}_n^I] = -n\hat{\alpha}_{m+n}^I \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$	(8.87)
25)	$[\hat{\alpha}_m^I, \hat{\alpha}_n^J] = m\eta^{IJ}\delta_{m+n,0} \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$	(8.41)

Weiterhin werden die Rechenregeln (7.46) benötigt, aus denen sich noch eine Rechenregel zur Zerlegung von Kommutatoren der Form $[AB, CD]$, die in der Rechnung häufig auftreten, herleiten lässt:

$$\begin{aligned}
[A, BC] &= B[A, C] + [A, B]C, \\
[AB, C] &= A[B, C] + [A, C]B, \\
[AB, CD] &= CA[B, D] + C[A, D]B + A[B, C]D + [A, C]BD.
\end{aligned} \tag{8.107}$$

Somit sind alle Grundlagen gelegt. Die Rechnung selbst ist sehr lang und soll nicht in Gänze vorgestellt werden. Sie beruht ausschließlich auf den dargestellten Grundlagen; es gehen keine weiteren besonderen Rechentricks mit ein. Ich habe für die neun Terme im Einzelnen heraus⁵⁶:

1. Der erste Term verschwindet.

⁵⁶Die Vorfaktoren, inklusive eventueller Summen, sind hier noch nicht einbezogen.

2. Der zweite Term ergibt

$$2i \left(\frac{\hat{x}_0^J \hat{p}^I}{\hat{p}^+} - \eta^{IJ} \hat{x}_0^- \right) \frac{\hat{L}_0^\perp + a}{\hat{p}^+} + 2\alpha' \frac{\hat{p}^I \hat{p}^J}{\hat{p}^{+2}}. \quad (8.108)$$

3. Der dritte Term ergibt

$$i \frac{\hat{p}^I}{\hat{p}^{+2}} \left(\hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{L}_n^\perp \right). \quad (8.109)$$

Er ist normal geordnet.

4. Der vierte Term ist das Negative des zweiten Terms mit $I \leftrightarrow J$.

5. Der fünfte Term ergibt

$$\frac{i8\alpha'}{\hat{p}^{+2}} \{ \hat{x}_0^J \hat{p}^I - \hat{x}_0^I \hat{p}^J \} \left(\hat{L}_0^\perp + a \right). \quad (8.110)$$

6. Der sechste Term ergibt

$$2i\sqrt{2\alpha'} \frac{1}{\hat{p}^{+2}} \{ \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_n^I \} \left(\hat{L}_0^\perp + a \right). \quad (8.111)$$

Er ist normal geordnet.

7. Der siebte Term ist das Negative des dritten Terms mit $I \leftrightarrow J$.

8. Der achte Term ist das Negative des sechsten Terms mit $I \leftrightarrow J$.

9. Der neunte Term ergibt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\hat{p}^{+2}} \left\{ \frac{D-2}{12} (m^3 - m) \delta_{m,n} (\hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_n^J) + m\eta^{IJ} \delta_{m,n} \left(\hat{L}_{-n}^\perp \hat{L}_m^\perp - \hat{L}_{-m}^\perp \hat{L}_n^\perp \right) \right. \\ & + n \left(-\hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_{-m+n}^J \hat{\alpha}_m^I + \hat{L}_{-m-n}^\perp \hat{\alpha}_m^I \hat{\alpha}_n^J + \hat{L}_{-m+n}^\perp \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_m^I - \hat{L}_n^\perp \hat{\alpha}_{-m-n}^J \hat{\alpha}_m^I \right. \\ & \quad \left. + \hat{L}_{-n}^\perp \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_{m+n}^J - \hat{L}_{m-n}^\perp \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_n^J - \hat{L}_{m+n}^\perp \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_{-m}^I + \hat{L}_n^\perp \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_{m-n}^J \right) \\ & + m \left(\hat{L}_{-m}^\perp \hat{\alpha}_{m-n}^I \hat{\alpha}_n^J - \hat{L}_{-m-n}^\perp \hat{\alpha}_m^I \hat{\alpha}_n^J - \hat{L}_{-m}^\perp \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_{m+n}^I + \hat{L}_{-m+n}^\perp \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_m^I \right. \\ & \quad \left. - \hat{L}_{m-n}^\perp \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_n^J + \hat{L}_m^\perp \hat{\alpha}_{-m-n}^I \hat{\alpha}_n^J + \hat{L}_{m+n}^\perp \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_{-m}^I - \hat{L}_m^\perp \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_{-m+n}^I \right) \left. \right\}. \quad (8.112) \end{aligned}$$

Er ist normal geordnet, da $m, n \in \mathbb{N}$.

Laut [2, S. 98] muss aus gruppentheoretischen Betrachtungen der folgende Teil-Kommutator von $[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J}]$ verschwinden:

$$\left[\hat{x}_0^- \hat{p}^I - \frac{1}{4\alpha' \hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^I \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) + \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) \hat{x}_0^I \right\}, \hat{x}_0^- \hat{p}^J - \frac{1}{4\alpha' \hat{p}^+} \left\{ \hat{x}_0^J \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) + \left(\hat{L}_0^\perp + a \right) \hat{x}_0^J \right\} \right] \stackrel{!}{=} 0. \quad (8.113)$$

Dies entspricht den Termen 1, 2, 4, 5. Inklusive der Vorfaktoren ergibt sich mit meinen Ergebnissen tatsächlich

$$1) - \frac{1}{4\alpha'} 2) - \frac{1}{4\alpha'} 4) + \frac{1}{16\alpha'^2} 5) = 0 \quad (8.114)$$

in Übereinstimmung mit der Literatur. Laut [2, S. 98] muss ebenfalls der Teil-Kommutator

$$\left[-\frac{i}{\sqrt{2\alpha'\hat{p}^+}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(\hat{L}_{-m}^{\perp} \hat{\alpha}_m^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{L}_m^{\perp} \right), -\frac{i}{\sqrt{2\alpha'\hat{p}^+}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\hat{L}_{-n}^{\perp} \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{L}_n^{\perp} \right) \right] \stackrel{!}{=} 0 \quad (8.115)$$

verschwinden, da dieser Term ebenfalls in der klassischen Theorie auftauche, die frei von Anomalien sei. Dies explizit nachzuprüfen sei nicht so schwierig. An dieser Stelle weicht mein Ergebnis von der Literatur ab. Ich habe es nicht geschafft, den neunten Term samt Vorfaktoren und Summenzeichen zum Verschwinden zu bringen.

Mein Endergebnis lautet

$$\begin{aligned} \left[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J} \right] &\stackrel{?}{=} -\frac{1}{\alpha'\hat{p}^+2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^J - \hat{\alpha}_{-m}^J \hat{\alpha}_m^I \right) \left\{ -m \frac{D-2}{24} + \frac{1}{m} \left[\frac{D-2}{24} + a \right] \right\} \\ &- \frac{1}{2\alpha'\hat{p}^+2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left\{ \hat{L}_m^{\perp} \left(\hat{\alpha}_{-2m}^I \hat{\alpha}_m^J - \hat{\alpha}_{-2m}^J \hat{\alpha}_m^I \right) + \hat{L}_{-m}^{\perp} \left(\hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_{2m}^J - \hat{\alpha}_{-m}^J \hat{\alpha}_{2m}^I \right) \right\} \\ &- \frac{1}{2\alpha'\hat{p}^+2} \sum_{m,n=1, m \neq n}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \left\{ \hat{L}_{-m}^{\perp} \left(\hat{\alpha}_{m-n}^I \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{m-n}^J \hat{\alpha}_n^I + \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_{m+n}^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_{m+n}^I \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \hat{L}_m^{\perp} \left(\hat{\alpha}_{-m-n}^I \hat{\alpha}_n^J - \hat{\alpha}_{-m-n}^J \hat{\alpha}_n^I + \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_{-m+n}^J - \hat{\alpha}_{-n}^J \hat{\alpha}_{-m+n}^I \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right) \hat{L}_{m-n}^{\perp} \left(\hat{\alpha}_{-m}^J \hat{\alpha}_n^I - \hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_n^J \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n} \hat{L}_{m+n}^{\perp} \hat{\alpha}_{-n}^I \hat{\alpha}_{-m}^J + \frac{1}{m} \hat{L}_{m+n}^{\perp} \hat{\alpha}_{-m}^J \hat{\alpha}_{-n}^I - \frac{1}{n} \hat{L}_{-m-n}^{\perp} \hat{\alpha}_m^I \hat{\alpha}_n^J + \frac{1}{m} \hat{L}_{-m-n}^{\perp} \hat{\alpha}_n^J \hat{\alpha}_m^I \right]. \end{aligned} \quad (8.116)$$

Das in der Literatur zu findende Ergebnis ist [1, S. 261], [2, ?, ?, S. 98 ff.]

$$\left[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J} \right] = -\frac{1}{\alpha'\hat{p}^+2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\hat{\alpha}_{-m}^I \hat{\alpha}_m^J - \hat{\alpha}_{-m}^J \hat{\alpha}_m^I \right) \left\{ m \left[1 - \frac{D-2}{24} \right] + \frac{1}{m} \left[\frac{D-2}{24} + a \right] \right\} \stackrel{!}{=} 0. \quad (8.117)$$

Wie man sieht stimmt die erste Zeile meines Endergebnisse bis auf eine additive 1 mit der Literatur überein. Es ist möglich, dass die übrigen Terme gerade zu dieser 1 führen oder dass die Terme unter Verwendung weiteren Wissens, dass in [1] nicht entwickelt wurde, tatsächlich wegfallen und die fehlende 1 ein Rechenfehler ist.

Die $\hat{\alpha}_m^I$ -Oszillatoren in der runden Klammer in (8.117) können sich nicht gegenseitig aufheben, sodass für jedes m die geschweifte Klammer verschwinden muss, damit $\left[\hat{M}^{-I}, \hat{M}^{-J} \right] = 0$ gilt, d.h.

$$m^2 \left[1 - \frac{D-2}{24} \right] = - \left[\frac{D-2}{24} + a \right] \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (8.118)$$

Das ist nur zu erfüllen, wenn die eckigen Klammern separat verschwinden, woraus

$$D = 26 \wedge a = -1 \quad (8.119)$$

folgt. Bosonische Stringtheorie ist somit nur in 26 Raumzeit-Dimensionen Lorentz-invariant. Sieht man dies als Grundvoraussetzung einer korrekten Theorie über die Natur an, so sagt

Stringtheorie die Raumzeit-Dimension voraus. Die Gleichungen (8.73) werden damit zu

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \hat{L}_0^\perp - 1, \\
 \hat{M}^2 &= \frac{1}{\alpha'} \left(-1 + \sum_{p=1}^{\infty} p \hat{a}_p^{I\dagger} \hat{a}_p^I \right), \\
 \hat{p}^- &= \frac{1}{2\alpha' \hat{p}^+} (\hat{L}_0^\perp - 1) = \frac{1}{2\alpha' \hat{p}^+} \hat{H}.
 \end{aligned} \tag{8.120}$$

Eine ähnliche Rechnung in der Super-Stringtheorie fixiert die Raumzeit auf den Wert [1, S. 262]

$$D_{SUSY} = 10. \tag{8.121}$$

9 Zusammenfassung und Ausblick

Wie bereits in der Zielsetzung erläutert, wurde in dieser Bachelor-Arbeit sukzessive die Theorie des quantenmechanischen, relativistischen, offenen, bosonischen, freien Strings mit freien Randbedingungen und in Lichtkegel-Eichung aufgestellt. Beginnend beim klassischen, nicht-relativistischen String wurde schrittweise, jeweils motiviert durch vorherige Analyse des einfacheren Punktteilchens, der klassische, relativistische String und schließlich der quantenmechanische, relativistische String studiert. Die Lichtkegel-Eichung erlaubte die Konstruktion einer vollständigen Lösung der Wellengleichung, Zwangs- und Randbedingungen. Diese bestand aus einigen Null-Moden-Operatoren und einer abzählbar unendlichen Menge von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die nicht-triviale Kommutator-Relationen erfüllen. Zur Überprüfung der Lorentz-Invarianz der Quanten-Stringtheorie in Lichtkegel-Eichung wurden Lorentz-Generatoren konstruiert. Entgegen den Angaben der Literatur misslang es jedoch, durch explizite Rechnung den Nachweis zu erbringen, dass die Lorentz-Ladungen tatsächlich die Lorentz-Algebra erfüllen.

Wie u.a. an den Adjektiven „offen“, „bosonisch“ und „frei“ zu erkennen ist, besitzt die in dieser Arbeit untersuchte Stringtheorie sehr konkrete Eigenschaften. Der weitere Einblick in die Stringtheorie umfasst daher erstens das Studium geschlossener und supersymmetrischer Strings. Das Zustandsspektrum bosonischer, offener Strings enthält neben den erwünschten, masselosen Photon-Zuständen einen Tachyon-Zustand negativer Masse, der für die Instabilität der D25-Brane verantwortlich ist. Das Zustandsspektrum bosonischer, geschlossener Strings enthält neben dem masselosen Dilaton-Zustand und den masselosen Kalb-Ramond-Zuständen masselose Graviton-Zustände, die Stringtheorie zu einer Quantengravitationstheorie machen. Während alle genannten Zustände bosonischer Natur sind, enthält das Zustandsspektrum von Super-Stringtheorien gleichermaßen bosonische und fermionische Zustände.

Zweitens wurden bislang nur freie Strings untersucht. Durch zusätzliche Terme in der Lagrange-Dichte der Nambu-Goto-Wirkung lassen sich auch Strings betrachten, die Wechselwirkungen unterliegen.

Letztens wurde in dieser Arbeit zumindest die Quanten-Stringtheorie betreffend von einer raumfüllenden D-Brane ausgegangen. Ein vollständiges Studium der Stringtheorie umfasst Strings an beliebigen D-Brane-Konfigurationen und schließt somit die Lösung der Bewegungsgleichung, Zwangsbedingungen und Dirichlet-Randbedingungen mit ein. Außerdem ist klar, dass die zusätzlichen Raumdimensionen, da sie nicht beobachtet werden, nicht makroskopisch sind, wie in dieser Arbeit angenommen wurde, sondern aufgerollt sein müssen. Die verschiedenen Möglichkeiten der Aufwicklung führen zur „landscape“ der Stringtheorie. Die „Welten“, die von Stringtheorien beschrieben werden, sind nicht die flache Raumzeit, sondern gekrümmte Mannigfaltigkeiten, genannt Orbifolds, in denen bestimmte Raumzeit-Punkte miteinander identifiziert sind.

Anhang

Lorentz-Ladungen des relativistischen Punktteilchens⁵⁷

Da alle Lorentz-Indizes kontrahiert werden, ist die Lagrange-Funktion (7.1) des klassischen, relativistischen Punktteilchens ein Lorentz-Skalar und somit invariant unter Lorentz-Transformationen

$$\delta x^\mu(\tau) = \epsilon^{\mu\nu} x_\nu(\tau), \quad \epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}. \quad (9.1)$$

Gemäß Formel (5.13) sind die zugehörigen Noether-Ladungen

$$\epsilon^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \delta x^\mu = \epsilon^{\mu\nu} p_\mu x_\nu. \quad (9.2)$$

Wegen der Antisymmetrie von $\epsilon^{\mu\nu}$ gilt $\epsilon^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\epsilon^{\mu\nu} - \epsilon^{\nu\mu})$ und somit

$$\epsilon^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\mu} Q_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu} \frac{1}{2}(Q_{\mu\nu} - Q_{\nu\mu}) \equiv \epsilon^{\mu\nu} Q_{\mu\nu}^{asym} \quad (9.3)$$

mit einer Umbenennung $\mu \leftrightarrow \nu$ im zweiten Schritt, d.h. jeglicher symmetrische Teil der Noether-Ladungen ist vernachlässigbar. Dieses Wissen wäre in einer Definition $Q_{\mu\nu} = p_\mu x_\nu$, wie Gleichung (9.2) suggeriert, noch nicht enthalten. Man wendet daher die gleichen Rechenschritte auch auf die rechte Seite von Gleichung (9.2) an und findet

$$\epsilon^{\mu\nu} Q_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu} Q_{\mu\nu}^{asym} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu} p_\mu x_\nu - \frac{1}{2}\epsilon^{\nu\mu} p_\mu x_\nu = -\epsilon^{\mu\nu} \frac{1}{2}(x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu). \quad (9.4)$$

Der Term in Klammern ist antisymmetrisch, und da die Normierung der Ladung unabhängig von ihrer Erhaltung und somit frei wählbar ist, werden die Lorentz-Ladungen als

$$M_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu \quad (9.5)$$

definiert. Diese erfüllen

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}, \quad \frac{d}{d\tau} M_{\mu\nu} = 0. \quad (9.6)$$

Lorentz-Algebra in Lorentz-kovarianter Quantisierung des Punktteilchens⁵⁸

$$\left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\rho\sigma} \right] = \left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{x}^\rho \hat{p}^\sigma \right] - \left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{x}^\sigma \hat{p}^\rho \right], \quad (9.7)$$

d.h. der zweite Term ergibt sich aus dem ersten durch Vertauschung von ρ und σ . Betrachte daher nur den ersten Term unter Verwendung von (7.46), (7.69) und (7.70):

$$\begin{aligned} \left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{x}^\rho \hat{p}^\sigma \right] &= \hat{x}^\rho \left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{p}^\sigma \right] + \left[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{x}^\rho \right] \hat{p}^\sigma \\ &= i\eta^{\mu\sigma} \hat{x}^\rho \hat{p}^\nu - i\eta^{\nu\sigma} \hat{x}^\rho \hat{p}^\mu + i\eta^{\mu\rho} \hat{x}^\nu \hat{p}^\sigma - i\eta^{\nu\rho} \hat{x}^\mu \hat{p}^\sigma. \end{aligned} \quad (9.8)$$

⁵⁷ entspricht [1, Problem 8.5c]

⁵⁸ entspricht [1, Problem 11.5]

Beide Terme zusammen ergeben

$$\begin{aligned}
[\hat{M}^{\mu\nu}, \hat{M}^{\rho\sigma}] &= i\eta^{\mu\sigma} \hat{x}^\rho \hat{p}^\nu - i\eta^{\nu\sigma} \hat{x}^\rho \hat{p}^\mu + i\eta^{\mu\rho} \hat{x}^\nu \hat{p}^\sigma - i\eta^{\nu\rho} \hat{x}^\mu \hat{p}^\sigma \\
&\quad - i\eta^{\mu\rho} \hat{x}^\sigma \hat{p}^\nu + i\eta^{\nu\rho} \hat{x}^\sigma \hat{p}^\mu - i\eta^{\mu\sigma} \hat{x}^\nu \hat{p}^\rho + i\eta^{\nu\sigma} \hat{x}^\mu \hat{p}^\rho. \\
&= i\eta^{\mu\rho} (\hat{x}^\nu \hat{p}^\sigma - \hat{x}^\sigma \hat{p}^\nu) - i\eta^{\nu\rho} (\hat{x}^\mu \hat{p}^\sigma - \hat{x}^\sigma \hat{p}^\mu) + i\eta^{\mu\sigma} (\hat{x}^\rho \hat{p}^\nu - \hat{x}^\nu \hat{p}^\rho) - i\eta^{\nu\sigma} (\hat{x}^\rho \hat{p}^\mu - \hat{x}^\mu \hat{p}^\rho) \\
&= i\eta^{\mu\rho} \hat{M}^{\nu\sigma} - i\eta^{\nu\rho} \hat{M}^{\mu\sigma} + i\eta^{\mu\sigma} \hat{M}^{\rho\nu} - i\eta^{\nu\sigma} \hat{M}^{\rho\mu}.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

Somit erfüllen die in (7.67) definierten Lorentz-Generatoren tatsächlich die Lorentz-Algebra.

Kommutator-Beweise

Es gilt

$$\begin{aligned}
[\hat{x}_0^-, \dot{\hat{X}}^I(\tau, \sigma)] &= \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{x}_0^-, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] = 0 \stackrel{!}{=} \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\hat{x}_0^-, \hat{\alpha}_n^I] e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad \forall \tau, \sigma \\
\implies [\hat{x}_0^-, \hat{\alpha}_n^I] &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{9.10}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
0 &= [\hat{x}_0^-, \hat{X}^I(\tau, \sigma)] = \left[\hat{x}_0^-, \hat{x}_0^I + \sqrt{2\alpha'} \hat{\alpha}_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \hat{\alpha}_n^I e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \right] \\
\stackrel{(9.10)}{\implies} [\hat{x}_0^-, \hat{x}_0^I] &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned} \tag{9.11}$$

Zuletzt gilt wegen (9.10) und weil die transversalen Virasoro-Operatoren nur aus $\hat{\alpha}_n^I$ -Operatoren bestehen

$$[\hat{x}_0^-, \hat{L}_n^\perp] = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{9.12}$$

Quellenverzeichnis

Literatur

- [1] Zwiebach, B. (2009). *A First Course in String Theory* (2nd Edition). Cambridge: Cambridge University Press
- [2] Green, M. B., Schwarz, J. H. und Witten, E. (1987). *Superstring Theory. Vol. 1: Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press
- [3] Kiritsis, E. (2007). *String Theory in a Nutshell*. Princeton: Princeton University Press
- [4] Mandelstam, S. (1974). Lorentz Properties of the Three-String Vertex, *Nuclear Physics B* **83**, 413
- [5] <http://ocw.mit.edu/courses/physics/8-251-string-theory-for-undergraduates-spring-2007/index.htm>, zuletzt verwendet: 16.09.13
- [6] <https://icast.zew.uni-hannover.de/feed-186613.xml>, zuletzt verwendet: 16.09.13
- [7] <http://www.youtube.com/watch?v=25haxRuZQUk>, zuletzt verwendet: 16.09.13

Danksagung

Ich möchte mich herzlich und aufrichtig bei Herrn Prof. York Schröder bedanken, dass er mir mit dieser Bachelor-Arbeit bereits sehr früh im Studium die Möglichkeit gegeben hat, auf dem Gebiet der Quantengravitation Fuß zu fassen, dass er weiterhin in Form von wöchentlichen Treffen, tiefgründigen Diskussionen sowie seiner ständigen Verfügbarkeit eine ausgezeichnete Betreuung angeboten und dass er mir einiges an Geduld entgegengebracht hat.

Außerdem bedanke ich mich bei MSc Marc Sangel für die Übernahme des Zweitgutachtens.

Schließlich möchte ich meinen Eltern danken, die mich insbesondere während der Endphase durch vielfaches Mutzusprechen einerseits moralisch, andererseits durch das Übernehmen vieler bürokratischer sowie organisatorischer Aufgaben, was wegen meiner Aufenthalte in Peru und London notwendig geworden war, aber auch ganz praktisch unterstützt haben.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, den
