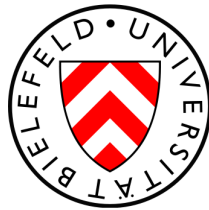


Anomales magnetisches Moment des Myons:
Berechnung der elektroschwachen 1-Loop Korrekturen

Bachelorarbeit

zur Erlangung des Grades eines Bachelor of Science
der Fakultät für Physik
der Universität Bielefeld



vorgelegt von

Johanna Albrecht

Betreuer & 1. Gutachter: Prof. Dr. York Schröder
2. Gutachter: Ioan Ghişoiu

Bielefeld, den 28. August 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	2
2.1	Das anomale magnetische Moment von Leptonen	2
2.2	Experimentelle Bestimmung von a_μ	2
2.3	Anomales magnetisches Moment in der QED	5
2.3.1	Die Lagrange-Dichte	6
2.3.2	Die Vertexfunktion	7
2.3.3	Zusammenhang zwischen Formfaktoren und a_μ	8
2.4	Schwache Wechselwirkung	10
3	Beiträge zu a_μ	13
3.1	QED-Beiträge	13
3.1.1	Beitrag 1. Ordnung, Berechnung des Schwinger-Terms	13
3.1.2	Höhere Ordnungen	18
3.1.3	Gesamter QED-Beitrag	19
3.2	Hadronische Beiträge	19
3.2.1	Hadronische Vakuumpolarisation	19
3.2.2	Hadronisches „Light-by-Light scattering“	20
3.3	Elektroschwache Beiträge	21
3.3.1	Beiträge 1. Ordnung	21
3.3.2	Beiträge höherer Ordnungen	21
3.4	Gesamter theoretischer Wert für a_μ	22
4	Berechnung der elektroschwachen Beiträge 1. Ordnung	23
4.1	Z-Beitrag	23
4.2	Higgs-Beitrag	27
4.3	W-Beitrag	30
4.4	Gesamter elektroschwacher Beitrag 1. Ordnung	34
5	Abweichung zwischen Theorie und Experiment	35
6	Zusammenfassung	37
A	Feynman-Regeln	38
A.1	Externe Linien	38
A.2	Vertexfaktoren	38
A.3	Propagatoren	40
A.4	Weitere Regeln	40
B	Benötigte Formeln	41
B.1	Gamma-Relationen	41
B.2	Feynman-Parametrisierung	41
B.3	„Diracologie“	41
B.4	Wick-Rotation	42
B.5	1-Schleifen Tadpole Integral	42
C	Werte	43

1 Einleitung

Ende des 20. Jahrhunderts führten Entdeckungen in der Teilchenphysik zu einer Theorie, die die fundamentalen Wechselwirkungen der Elementarteilchen beschreibt: das Standardmodell der Teilchenphysik (SM). Es beschreibt die elektromagnetische, die starke und die schwache Wechselwirkung. Im Standardmodell gibt es drei Generationen von Leptonen und Quarks, sowie vier elektroschwach und acht stark wechselwirkenden Eichbosonen und ein skalares Teilchen, das Higgs-Boson.

Die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Leptonen und dem Photon wird mittels der Quantenelektrodynamik (QED) beschrieben. Die Theorie der starken Wechselwirkung ist die Quantenchromodynamik (QCD). Die Teilchen, die die starke Wechselwirkung vermitteln, sind die acht Gluonen. Diese koppeln an die Farbladung (rot, grün, blau), die von den Quarks getragen wird. Die schwache Wechselwirkung wird mittels der W- und Z-Bosonen vermittelt. Das Standardmodell ist eine Quantenfeldtheorie (QFT): Teilchen und Felder sind quantisiert und werden einheitlich und relativistisch beschrieben. In sehr vielen Bereichen gibt das Standardmodell die Natur sehr gut wieder, jedoch es gibt auch Effekte, die sich damit noch nicht erklären lassen können.

Das anomale magnetische Moment a_μ des Myons ist, sowohl theoretisch als auch experimentell, eine der am präzisesten bestimmten Größen der Physik. Daher ist dieser Wert sehr interessant, um Theorien, vor allem das Standardmodell, zu testen. Ebenfalls können mit der Bestimmung von a_μ die Grenzen des heutigen Wissens ausgetestet werden und möglicherweise Effekte gefunden werden, die sich mit bestehenden Theorien nicht erklären lassen. Das $g - 2$ Experiment E821 am Brookhaven National Laboratory (BNL) konnte 2004 den Wert für a_μ mit einer Unsicherheit von nur $6,3 \times 10^{-10}$ bestimmen. Man erkannte eine Diskrepanz von etwa drei Standardabweichungen (3σ) zur Vorhersage des Standardmodells.

Da der Wert des anomalen magnetischen Moments so genau gemessen und berechnet werden kann, könnte diese Abweichung ein Hinweis auf „neue Physik“ sein, wie zum Beispiel noch unentdeckte Teilchen und Supersymmetrie (SUSY). Außerdem wird versucht, auch theoretisch immer höhere Korrekturen bestimmen zu können, um die Unsicherheiten des vorhergesagten Wertes zu verringern.

In dieser Arbeit werden zunächst einige Grundlagen zur experimentellen und theoretischen Bestimmung des anomalen magnetischen Moments erläutert. Danach ist dargestellt, wie sich die einzelnen Beiträge zu a_μ theoretisch zusammensetzen. Außerdem wird der führende Beitrag, den Julian Schwinger 1949 als Erster bestimmt hat, explizit berechnet. Im vierten Kapitel werden die elektroschwachen Beiträge genauer betrachtet und die Diagramme erster Ordnung berechnet. Zum Schluss wird noch einmal auf den Unterschied zwischen dem experimentellen und theoretischen Wert für a_μ eingegangen und es werden mögliche Lösungen dieses Problems mit dem Beispiel der Supersymmetrie genannt.

2 Grundlagen

2.1 Das anomale magnetische Moment von Leptonen

Ein Teilchen mit einem (Bahn-)Drehimpuls $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ erzeugt ein magnetisches Moment $\boldsymbol{\mu}$ [1, §1.1]:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2m} \mathbf{L} , \quad (2.1)$$

wobei e die Ladung und m die Masse des Teilchens sind. Quantenmechanisch ist der Drehimpuls ein Operator $\mathbf{L} = -i\hbar \mathbf{r} \times \nabla$, dessen Eigenwerte $|\mathbf{L}| = \hbar l$ in Einheiten des Planck'schen Wirkungsquantums \hbar quantisiert sind. Das magnetische Moment ist dadurch ebenfalls quantisiert.

Teilchen haben einen Eigendrehimpuls, den Spin $\mathbf{S} = \hbar \mathbf{s}$. Mit Hilfe des Spins kann man verschiedene Arten von Teilchen unterscheiden: Fermionen haben immer einen halbzahligen, Bosonen haben immer einen ganzzahligen Spin. Der Spin eines Elementarteilchens erzeugt ebenfalls ein magnetisches Moment [1, §1.1]:

$$\boldsymbol{\mu}_s = g \frac{e\hbar}{2m} \mathbf{s} . \quad (2.2)$$

Dabei ist g der sogenannte gyromagnetische Faktor (g-Faktor). Die Dirac-Gleichung (s. Kapitel 2.3.1, Formel (2.11)) sagt für ein geladenes Fermion mit dem Spin $s = \frac{1}{2}$ einen Wert von $g = 2$ voraus. Der wirkliche Wert weicht jedoch von dieser Vorhersage ab. Der Grund hierfür sind die sogenannten Strahlungskorrekturen. Für diese Abweichung wird das anomale magnetische Moment von Leptonen a_l definiert [1, §1.1]:

$$a_l = \frac{g - 2}{2} , \quad l \in \{e, \mu, \tau\} . \quad (2.3)$$

Der Wert für a_l setzt sich im wesentlichen aus QED-, hadronischen und elektroschwachen Beiträgen zusammen. In der QED und der schwachen Wechselwirkung können die Beiträge störungstheoretisch berechnet werden. Der Beitrag der ersten Ordnung (= eine Schleife im Feynman-Diagramm, z.B. in Abb. 8) in der QED ist $a_l^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi}$, dabei ist $\alpha \cong \frac{1}{137}$ die Feinstrukturkonstante. Er ist identisch für Elektron, Myon und Tauon, vgl. [1, §1.1]. Dies ist einer der universellen, massenunabhängigen Beiträge. Daneben gibt es noch die Beiträge, die von den Massen m_e , m_μ und m_τ abhängen. Diese Beiträge treten jedoch erst ab 2-Schleifen Korrekturen auf. Eine genauere Beschreibung folgt in Kapitel 3.

2.2 Experimentelle Bestimmung von a_μ

Nun wird erklärt, wie das anomale magnetische Moment des Myons im Brookhaven $g - 2$ Experiment bestimmt wurde, vgl. [2, §2.1]. In Abb. 2.1 ist der schematische Aufbau des Experiments zu sehen. Zunächst müssen Myonen produziert werden. Dazu werden Protonen mit einer Energie von etwa 24 GeV auf ein Ziel geschossen, wodurch Pionen entstehen. Diese sind instabil mit einer mittleren Lebensdauer von $\tau_\pi \simeq 2,6 \times 10^{-8} s$ und zerfallen wiederum in Myonen und Neutrinos, $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ ($\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$), s. Abb. 2.2. Dieser Zerfall ist paritätsverletzend (s. Kapitel 2.4): Im Ruhesystem des Pions werden das Myon und das Neutrino in entgegengesetzte Richtungen emittiert. Die Spins müssen ebenfalls in entgegengesetzte Richtung gerichtet sein, um den Drehimpuls zu erhalten, vgl. [3, §XI.1]. Die emittierten Teilchen haben dann die gleiche Helizität (s. Kapitel 2.3.1), wobei das μ^-

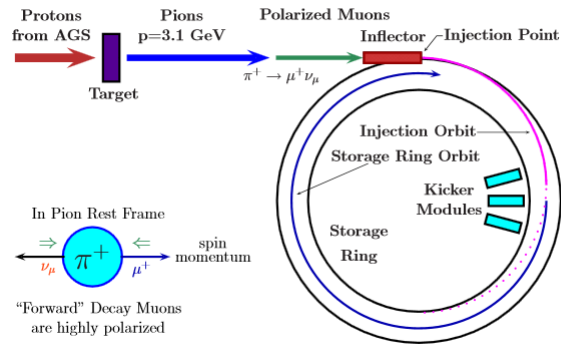


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung des experimentellen Aufbaus zur Bestimmung von a_μ [2, S. 12]

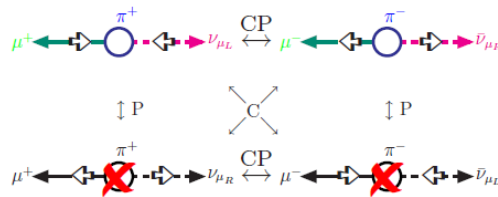


Abbildung 2.2: Paritätsverletzender Pion-Zerfall [2, S. 8]

immer positive und das μ^+ immer negative Helizität hat. Wäre die Parität erhalten, wäre die Wahrscheinlichkeit für die positive (negative) Helizität immer 50%.

Über den Pionzerfall erzeugt man somit immer polarisierte Myonen. Der Spin und das magnetische Moment dieser Myonen sind zu Beginn noch gleich und in Flugrichtung gerichtet. Die Myonen fliegen in einen Speicherring, wo sie sich in einem Magnetfeld \mathbf{B} auf einer Kreisbahn weiter bewegen. Die Teilchen führen eine relativistische Zyklotronbewegung mit Kreisfrequenz ω_c aus [2, §2.1]:

$$\omega_c = \frac{e\mathbf{B}}{m_\mu \gamma}, \quad (2.4)$$

wobei $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ der relativistische Lorentz-Faktor, v die Myon-Geschwindigkeit und m_μ die Masse des Myons ist. Die Spin-Achse verändert sich dabei auf eine bestimmte Weise, die mit der Lamor-Präzession beschrieben werden kann. Der Spin präzediert mit der Kreisfrequenz

$$\omega_s = \frac{e\mathbf{B}}{m_\mu \gamma} + a_\mu \frac{e\mathbf{B}}{m_\mu} \geq \omega_c. \quad (2.5)$$

Nach jeder Umrundung hat sich die Spin-Richtung um 12° gegenüber dem magnetischen Moment gedreht, vgl. Abb. 2.3. Wäre der g-Faktor genau 2, würde der Spin in die selbe Richtung gerichtet sein. Der Unterschied zwischen den beiden Frequenzen wird durch

$$\omega_a = \omega_s - \omega_c = a_\mu \frac{e\mathbf{B}}{m_\mu} \quad (2.6)$$

beschrieben, welche im Experiment bestimmt werden muss, um a_μ zu erhalten. Den Wert der Masse erhält man aus anderen Experimenten und den Wert des Magnetfeldes bestimmt man über eine weitere Messung.

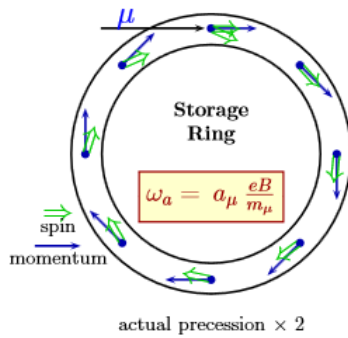


Abbildung 2.3: Spin-Präzession im Myon-Speicherring [2, S. 11]



Abbildung 2.4: Myonzerfall [2, S. 9]

Zur Bestimmung der Frequenz ω_a betrachtet man nun den Myonzerfall. Die Myonen bewegen sich nahe der Lichtgeschwindigkeit c (in natürlichen Einheiten wird $c = 1$ gesetzt). Aufgrund der Zeitdilatation ($t = \gamma\tau$) verlängert sich ihre mittlere Lebensdauer von etwa $2\mu s$ auf $64\mu s$. Die positiv (negativ) geladenen Myonen zerfallen in ein Positron (Elektron) und zwei Neutrinos, $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ ($\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$). Dieser Zerfall ist paritätsverletzend, was zur Folge hat, dass das Positron (Elektron) mit großer Wahrscheinlichkeit in (entgegengesetzt zur) Richtung des Myonspins emittiert wird, s. Abb. 2.4. Mit Hilfe von 24 Kalorimetern wird der Zeitpunkt der Detektion bestimmt und die Energie der Positronen gemessen, woraus sich der Myonspin bestimmen lässt, s. Abb. 2.5.

Die Messrate der detektierten Positronen (Elektronen) hängt von ω_a ab [2, §2.1]:

$$N(t) = N_0(E) \exp\left(\frac{-t}{\gamma\tau_\mu}\right) \left[1 + A(E) \sin(\omega_a t + \phi(E))\right]. \quad (2.7)$$

Hierbei sind der Normierungsfaktor $N_0(E)$, die Myon-Lebensdauer τ_μ , und der Asymmetrie-Faktor $A(E)$ bekannte Größen. Man kann in Abb. 2.6 erkennen, dass der exponentielle Zerfall der Myonen durch die Kreisfrequenz ω_a moduliert ist, wodurch sich ω_a präzise bestimmen lässt.

Um nun aus Formel (2.6) a_μ bestimmen zu können, benötigt man noch den Betrag des Magnetfeldes. Dieser wird mit Hilfe des magnetischen Moments des Protons über Nuclear Magnetic Resonance (NMR) bestimmt, vgl. [2, §2.1]: $\mathbf{B} = \frac{\omega_p}{2\mu_p}$, wobei ω_p die Lamor-Präzession des Protons in Wasser ist. Mit den Frequenzen ω_p und ω_a kann man jetzt a_μ ermitteln:

$$a_\mu = \frac{R}{\lambda - R}, \quad \text{wobei } R = \frac{\omega_a}{\omega_p} \text{ und } \lambda = \frac{\mu_\mu}{\mu_p}. \quad (2.8)$$

Wichtig für die präzise Bestimmung von a_μ ist eine genaue Messung des B -Feldes und dass es konstant und homogen gehalten wird. Da das schwer zu realisieren ist, verursacht dies den größten experimentellen Fehler.

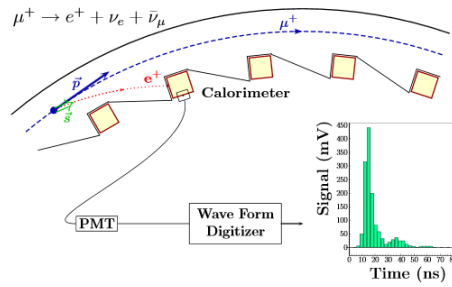


Abbildung 2.5: Kalorimeter im Versuchsaufbau, [2, S. 13]

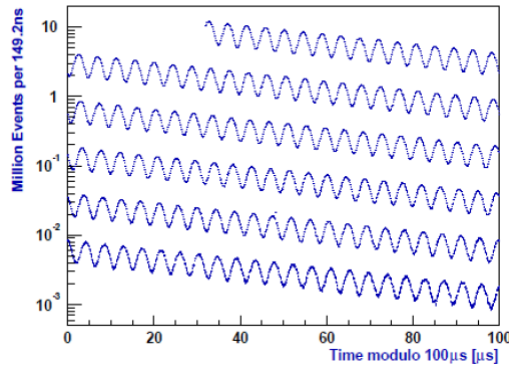


Abbildung 2.6: Zerfälle pro Zeit für die 3,6 Milliarden Zerfälle negativer Myonen 2001 [2, S. 13]

30 Jahre vor dem E821 Experiment am BNL wurde der bis dahin genaueste Wert am CERN gemessen, vgl. [4]. Dieser stimmte noch sehr gut mit dem damals theoretisch berechneten Wert überein. Das $g - 2$ Experiment in Brookhaven perfektionierte die Messmethoden vom CERN und war um einiges präziser. Es zeigt auch eine unerwartet hohe Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment auf. Die Messungen ergaben die folgenden Werte für positiv und negativ geladene Myonen [5]:

$$\begin{aligned} a_{\mu^-} &= 11659214(8)(3) \times 10^{-10}, \\ a_{\mu^+} &= 11659203(8) \times 10^{-10}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Insgesamt ist daher der Mittelwert des anomalen magnetischen Moment des Myons [2, §2.1]

$$a_{\mu}^{exp} = 11659208(63) \times 10^{-10}. \quad (2.10)$$

2.3 Anomales magnetisches Moment in der QED

Um nun das anomale magnetische Moment des Myons auch theoretisch zu bestimmen, wird die Quantenelektrodynamik (QED) benötigt. Die QED ist das quantenmechanische Gegenstück zum Elektromagnetismus und die am genauesten verifizierte Theorie der Physik, vgl. [3, §IX].

2.3.1 Die Lagrange-Dichte

Fermionen werden durch Dirac-Spinoren $\psi(x)$ dargestellt und können über die Dirac-Gleichung beschrieben werden [6, §3.2]:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0. \quad (2.11)$$

Dabei ist γ^μ eine Gamma- oder Dirac-Matrix, s. (2.28). Zur Lösung der Dirac-Gleichung wird der Ansatz ebener Wellen gewählt [6, §3.3]:

$$\psi(x) = u_p e^{-ipx}, \quad (2.12)$$

wobei $p^2 = m^2$ ist. Der Spinor u_p muss einer weiteren Einschränkung unterliegen, die man durch Einsetzen in die Dirac-Gleichung erhält:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u_p = 0. \quad (2.13)$$

Eine Lösung ist in (2.29) gegeben.

Der Spin einer Lösung der freien Dirac-Gleichung ist keine Erhaltungsgröße, aber der Spin entlang des Impulses p ist erhalten. Man kann den Helizitätsoperator

$$h(p) = \frac{p}{|p|} \Sigma \quad (2.14)$$

definieren, wobei $\Sigma = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$ mit $\boldsymbol{\sigma}$ den Pauli-Matrizen (2.25) ist, vgl. [3, §IV.3].

Die Eigenwerte des Operators sind $+1$ und -1 . Ist ein Dirac-Spinor ein Eigenvektor von $h(p)$, so sind die entsprechenden Eigenwerte als Helizität bezeichnet. Ein Spinor mit Helizität $+1$ (-1) hat eine Spinkomponente $+\frac{\hbar}{2}$, kurz: \uparrow ($-\frac{\hbar}{2}$, kurz: \downarrow), entlang seines Impulses.

Mit der Lagrange-Dichte lässt sich die ganze Physik der QED komplett beschreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QED} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{Maxwell} + \mathcal{L}_{int} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Der erste Term \mathcal{L}_{Dirac} beschreibt ein freies Fermion und der zweite Term $\mathcal{L}_{Maxwell}$ ein freies elektromagnetisches Feld mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Im letzten Term \mathcal{L}_{int} steht die Wechselwirkung eines Teilchens mit dem Vektorpotential A_μ , vgl. [6, §4.1], wobei e die Elementarladung und gleichzeitig die Kopplungskonstante ist und $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = J^\mu$ ist der elektrische Strom. Der Wechselwirkungsterm entspricht einem Drei-Teilchen-Vertex, wo eine Spin-1 und zwei Spin- $\frac{1}{2}$ Linien sich treffen, s. Abb. 2.7. Eine wichtige Eigenschaft der Lagrange-Dichte ist, dass sie invariant unter Eichtransformationen ist. Die Transformationen ändern die Physik dabei nicht und sehen wie folgt aus:

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi(x), \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \quad (2.16)$$

wobei $\alpha(x)$ reell ist.

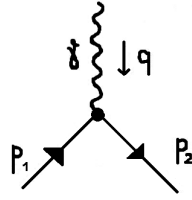


Abbildung 2.7: Wechselwirkung des Myons mit dem äußeren elektromagnetischen Feld

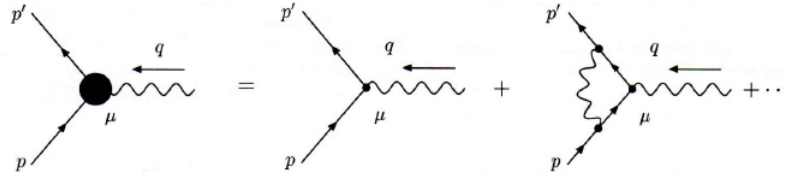


Abbildung 2.8: Summe der Strahlungskorrekturen [7, S. 238]

Ein Prozess in der QED wird über die Streuamplitude \mathcal{M} ausgedrückt. Beispielsweise läuft ein Myon mit dem Viererimpuls p_1 ein, streut am elektromagnetischen Potential A_μ mit Impuls q und läuft mit dem Impuls p_2 wieder aus. Diesen und andere Prozesse kann man grafisch über die Feynman-Diagramme darstellen, s. Abb. 2.7. Aus diesen kann man mit den dazugehörigen Regeln (s. Anhang A) \mathcal{M} bestimmen. Die Amplitude hat die Form

$$\mathcal{M} = -ie \langle \mu_{p_2} | J^\mu(0) | \mu_{p_1} \rangle A_\mu(q) = -ie \bar{u}_{p_2} \gamma^\mu u_{p_1} A_\mu(q), \quad (2.17)$$

wobei $q = p_2 - p_1$ ist und $-ie\gamma^\mu$ der Vertexfaktor, vgl. [1, §2.1]. Das erste Gleichheitszeichen gilt allgemein und das zweite gilt nur ohne Strahlungskorrekturen.

2.3.2 Die Vertexfunktion

Die Amplitude kann auch für die Summe aller möglichen Strahlungskorrekturen (schwarzer Kreis in Abb. 2.8) aufgeschrieben werden. Der Vertexfaktor kann nun nicht mehr allein mit γ^μ beschrieben werden, sondern wird komplizierter. Man verwendet zur Beschreibung die Vertexfunktion $\Gamma^\mu(p_2, p_1)$. Das Matrixelement in (2.17) kann damit folgendermaßen umgeschrieben werden [1, §2.1]:

$$\langle \mu_{p_2} | J^\mu(0) | \mu_{p_1} \rangle = \bar{u}_{p_2} \Gamma^\mu(p_2, p_1) u_{p_1}. \quad (2.18)$$

Da Γ^μ zwischen den Dirac-Spinoren steht, entspricht die Funktion dem sogenannten „amputierten Vertexgraphen“ (s. Abb. 2.9), vgl. [7, §8.1].

Die Vertexfunktion transformiert sich wie ein Vektor und lässt sich somit als Linearkombination von γ^μ , p_1^μ und p_2^μ schreiben [6, §6.2]:

$$\Gamma^\mu(p_2, p_1) = \gamma^\mu A + (p_1^\mu + p_2^\mu)B + (p_2^\mu - p_1^\mu)C. \quad (2.19)$$

Die Variablen A , B und C können Dirac-Matrizen enthalten und sind Funktionen von q^2 und Konstanten wie m . Mit Hilfe der Ward-Identität, $q_\mu \Gamma^\mu = 0$ [6, §6.2], kann man (2.19) vereinfachen. Dadurch fällt direkt der mittlere Term weg. Da $q = p_2 - p_1$

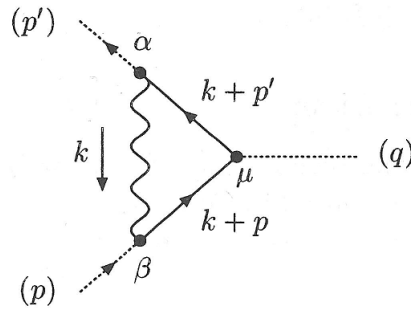


Abbildung 2.9: „Amputierter Vertexgraph“ mit einer internen Schleife [7, S. 239]

ist und rechts und links der Vertexfunktion die Dirac-Spinoren \bar{u}_{p_2} und u_{p_1} stehen, kann die Dirac-Gleichung (vgl. (2.13)) angewendet werden:

$$\bar{u}_{p_2}(\not{p}_2 - m) = 0, \quad (\not{p}_1 - m)u_{p_1} = 0, \quad (2.20)$$

mit der Slash-Notation $\not{p} = p_\alpha \gamma^\alpha$. Dadurch verschwindet auch der erste Term. Da der dritte Term nicht automatisch verschwindet, muss $C = 0$ sein, damit die Ward-Identität erfüllt ist. Es ist üblich, das Matrixelement aus (2.17) mit der Gordon-Identität [6, §3] umzuschreiben:

$$\bar{u}_{p_2} \gamma^\mu u_{p_1} = \bar{u}_{p_2} \left[\frac{p_2^\mu + p_1^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u_{p_1}, \quad (2.21)$$

wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ ist. Die Identität erlaubt, $(p_2^\mu + p_1^\mu)$ durch ein $i\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ zu ersetzen. Das Ergebnis für die Vertexfunktion ist somit

$$\Gamma^\mu(p_1, p_2) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2), \quad (2.22)$$

vgl. [6, §6.2]. Die Faktoren F_1 und F_2 sind die Formfaktoren, auch Dirac- und Pauli-Formfaktor genannt. Bis jetzt wurde davon ausgegangen, dass keine paritätsverletzenden Prozesse auftreten. Ist dies doch der Fall, lässt sich Γ^μ allgemeiner mit einem weiteren Faktor ausdrücken, vgl. [8]:

$$\Gamma^\mu(p_1, p_2) = \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5}{2m} F_3(q^2). \quad (2.23)$$

Der Formfaktor $F_3(0)$ entspricht dem elektrischen Dipolmoment. In der QED ist dieser Faktor gleich Null, da es eine paritätserhaltende Theorie ist. Auf die Bedeutung der γ^5 -Matrix wird in Kapitel 2.4 genauer eingegangen.

2.3.3 Zusammenhang zwischen Formfaktoren und a_μ

Nun wird der Zusammenhang zwischen der Vertexfunktion, den Formfaktoren und dem anomalen magnetischen Moment untersucht. Dafür betrachtet man den nicht-relativistischen Limes, vgl. [1, §2.1]. Ein Myon im elektromagnetischen Feld wird in nichtrelativistischer Quantenmechanik mit der Hamilton-Funktion

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{B} + e\varphi \quad (2.24)$$

beschrieben, wobei $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ das externe magnetische Feld und $\boldsymbol{\mu}$ der Operator $\boldsymbol{\mu} = \mu \boldsymbol{\sigma}$ ist, mit μ dem magnetischen Moment des Myons und $\boldsymbol{\sigma}$ den Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Die Streuamplitude in der Born-Näherung [1, §2.1] ist über (2.24) gegeben mit

$$\lim_{|\mathbf{p}| \ll m} \mathcal{M} = 4\pi i f, \quad (2.26)$$

$$f = -\frac{m}{2\pi} \chi_2^\dagger \left(-\frac{e}{2m} \mathbf{A}_q(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1) + e\varphi_a - i\mu \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{q} \times \mathbf{A}_q] \right) \chi_1. \quad (2.27)$$

Hier sind φ_q und \mathbf{A}_q die Fourier-Komponenten des elektrischen Potentials φ und des Vektorpotentials \mathbf{A} und $\chi_1 = (1, 0)^T$, $\chi_2 = (0, 1)^T$ sind Pauli-Spinoren. Nun benutzt man die expliziten Ausdrücke für die Dirac-Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

und die Dirac-Spinoren

$$u_p = \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{E+m}\chi \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

mit $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Werden diese Ausdrücke in (2.17) eingesetzt, ist die Amplitude \mathcal{M} in erster Ordnung in $\frac{|\mathbf{p}_{1,2}|}{m}$

$$\mathcal{M} = -2iem\chi_2^\dagger \left[F_1(0) \left(\varphi_q - \frac{\mathbf{A}_q(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1)}{2m} \right) - i \frac{F_1(0) + F_2(0)}{2m} \boldsymbol{\sigma} [\mathbf{q} \times \mathbf{A}_q] \right] \chi_1. \quad (2.30)$$

Verwendet man (2.26), (2.27) und (2.30), ergibt sich

$$F_1(0) = 0, \quad \mu = \frac{e}{2m} (F_1(0) + F_2(0)). \quad (2.31)$$

Da $\boldsymbol{\mu}_s = g \frac{e\hbar}{2m} \mathbf{s}$ ist, (vgl. (2.2)), kann man sehen, dass

$$g = 2(1 + F_2(0)) \quad (2.32)$$

ist. Gäbe es nur die 0. Ordnung, wo $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$ ist (vgl. Abb. 2.7), würde $F_2 = 0$ sein und der gyromagnetische Faktor wäre $g = 2$. Aufgrund der Strahlungskorrekturen verschwindet der Pauli-Formfaktor für $q = 0$ jedoch nicht, was eine Abweichung von $g = 2$ zur Folge hat. Mit $a_\mu = \frac{g-2}{2}$ erhält man den Zusammenhang zwischen dem Formfaktor F_2 und dem anomalen magnetischen Moment:

$$a_\mu = F_2(0). \quad (2.33)$$

Es trägt also nur der Pauli-Formfaktor zu a_μ bei. Das bedeutet, dass man die Terme nur proportional zu γ^μ und γ^5 bei der Berechnung des anomalen magnetischen Moments vernachlässigen darf, da diese nur zu F_1 bzw. F_3 beitragen.

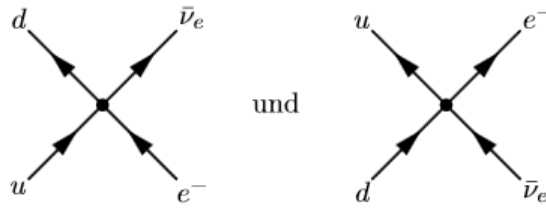


Abbildung 2.10: Vier-Fermionen-Vertices im Fermi-Modell [3, S. 106]

2.4 Schwache Wechselwirkung

Da in Kapitel 4 die elektroschwachen Beiträge zum anomalen magnetischen Moment untersucht werden, wird in diesem Kapitel die schwache Wechselwirkung im Allgemeinen beschrieben. Wie aus dem Namen hervorgeht, ist die schwache Wechselwirkung in niederenergetischen Phänomenen geringer als die elektromagnetische und starke Wechselwirkung. Eine Besonderheit ist hier, dass sie Symmetrien der QED verletzt, wodurch eigentlich verbotene Prozesse stattfinden können.

Fermi entwickelte 1934 eine erste Theorie, um den β -Zerfall $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ zu erklären, vgl. [9, §21.1]. Sein Modell war der QED ähnlich mit der Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_I^{Fermi} = -G_F (\bar{\psi}_n \gamma^\mu \psi_p \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu \psi_e + h.c.) , \quad (2.34)$$

dabei steht h.c. für die hermitesch konjugierten Terme und $G_F \simeq 1,166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ ist die Fermi-Kopplungskonstante, vgl. [3, §XI.2]. Da sich Nukleonen (Protonen und Neutronen) aus Up- und Down-Quarks zusammensetzen, kann man auch

$$\mathcal{L}_I^{Fermi} = -G_F (\bar{\psi}_d \gamma^\mu \psi_u \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu \psi_e + h.c.) \quad (2.35)$$

schreiben. Dieser Wechselwirkungsterm beschreibt Vier-Fermionen-Vertices, s. Abb. 2.10, und ist eine Theorie geladener vektorieller Ströme. Es wird die Kopplung von Viererströmen der Form $j_{ki}^\mu \equiv \bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_i$ beschrieben, die an einem Vertex ihre elektrische Ladung ändern. Das Fermi-Modell sagte den β^+ -Zerfall ($p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$) und den Elektroneneinfang ($p + e^- \rightarrow n + \nu_e$) voraus, die kurz darauf nachgewiesen wurden [3, §XI.2].

1956 postulierten Lee und Yang, dass in der schwachen Wechselwirkung die Parität nicht erhalten ist. Dies wurde bis dahin nie geprüft. Mit dem Zerfall von Kobalt bestätigte Wu 1957 experimentell die Paritätsverletzung, vgl. [10, §4.II]. Kobalt zerfällt in Nickel, ein Elektron und ein Antineutrino: ${}^{60}\text{Co} \rightarrow {}^{60}\text{Ni} + e^- + \bar{\nu}_e$. Die Elektronen werden dabei bevorzugt entgegen der Richtung des Co-Kernspins emittiert. Diesen und den raumgespiegelten Prozess sieht man in Abb. 2.11. Die Impulsrichtung des Elektrons ist invertiert, da der Impuls ein Vektor ist. Der Kernspin ist ein Axialvektor und verändert sich bei einer Raumspiegelung nicht, vgl. [3, §XI.1]. Daher müsste das Elektron nun in gleicher Richtung wie der Kernspin emittiert werden. Dieser Prozess wird in der Natur jedoch nie beobachtet, das heißt die Parität ist maximal verletzt, vgl. [11, §4.4].

Da im Fermi-Modell die Parität erhalten bleibt, musste das Modell überarbeitet werden. Der Faktor γ^μ wird durch $\gamma^\mu (1 - \gamma^5)$ ersetzt. Eine Mischung aus γ^μ und $\gamma^\mu \gamma^5$ verletzt automatisch die Paritätserhaltung, vgl. [12, §12.1], wodurch die Lagrange-Dichte wie folgt aussieht:

$$\mathcal{L}_I^{V-A} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_d \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_u \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_e + h.c.) , \quad (2.36)$$

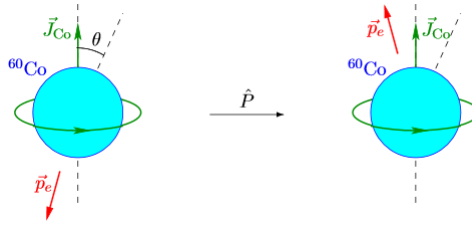


Abbildung 2.11: Emissionsrichtung des Elektrons im Wu-Experiment (links) und im raumgespiegelten Prozess (rechts) [3, S. 104]

dabei ist der Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ reine Konvention. Dieses Modell heißt V–A-Modell, da man einen Vektor (V) minus einen Axialvektor (A) in der Lagrange-Dichte hat. Auch hier werden wieder Vier-Fermionen-Vertices beschrieben. Anstatt die Lagrange-Dichte wie in (2.36) zu schreiben, kann man sie auch über linkshändige Spinoren definieren. Dabei ist $\psi_{i,L} \equiv \mathcal{P}_L \psi_i$ der linkshändige Anteil des Dirac-Spinors mit dem linkshändigen Projektionsoperator $\mathcal{P}_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$. Dies führt zu

$$\mathcal{L}_I^{V-A} = -2\sqrt{2}G_F (\bar{\psi}_{d,L} \gamma^\mu \psi_{u,L} \bar{\psi}_{\nu_e,L} \gamma_\mu \psi_{e,L} + h.c.) , \quad (2.37)$$

vgl. [3, §XI.2]. Das kann so interpretiert werden, als ob die schwache Wechselwirkung nur an linkshändige Anteile von Teilchen und rechtshändige Anteile von Antiteilchen koppelt. Da Neutrinos nur schwach wechselwirken, kann man sagen, dass Neutrinos immer linkshändig und Antineutrinos immer rechtshändig sind [3, §XI.2]. Die Beiträge der Vorfaktoren im V- und A-Term in der Lagrange-Dichte sind gleich groß, woran man die maximale Verletzung der Parität erkennt, vgl. [11, §9.1]. Außerdem werden noch weitere Symmetrien in der schwachen Wechselwirkung verletzt, wie zum Beispiel die Ladungskonjugation und die Flavour-Quantenzahlen, vgl. [3, §XI.1].

Die schwache Wechselwirkung beinhaltet auch neutrale Ströme, die über Linearkombinationen von $\bar{\psi}_k \gamma^\mu \psi_i$ und $\bar{\psi}_k \gamma^\mu \gamma^5 \psi_i$ dargestellt werden können. Diese haben jedoch die Form

$$\bar{\psi}_i \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \psi_i , \quad (2.38)$$

wobei die Koeffizienten c_V und c_A nur von der Ladung des Teilchens abhängen.

Das V–A-Modell hat jedoch immer noch Schwachstellen. Die Kopplungskonstante G_F ist nicht, wie zum Beispiel in der QED, dimensionslos. Dies hat zur Folge, dass der Wirkungsquerschnitt σ eines Prozesses in der niedrigsten Ordnung in Störungsrechnung proportional zu G_F^2 wächst, vgl. [3, §XI.3]. Damit σ die passende Dimension hat, soll G_F^2 noch mit dem Quadrat einer Energie multipliziert werden. So kann σ im Limes unendlich hoher Energien ebenfalls unendlich groß werden. Da der Wirkungsquerschnitt mit der Streuamplitude verknüpft ist, würde dies zu Wahrscheinlichkeiten größer als 1 führen, was unmöglich ist.

Um eine dimensionslose Kopplungskonstante zu erhalten, werden drei Eichbosonen, W^+ , W^- und Z eingeführt. Diese haben einen Spin 1 und, im Gegensatz zum Photon und Gluon, eine Masse. Unter Verwendung dieser Teilchen werden aus einem Vier-Fermionen-Vertex zwei Vertices mit jeweils zwei Fermionen und einem Boson, s. Abb. 2.12. Die geladenen Ströme wechselwirken nun nicht mehr direkt miteinander, sondern über den Austausch eines W-Bosons. Analog dazu wird bei neutralen Strömen ein Z-Boson ausgetauscht. Die Kopplungskonstante ist nun g_w . Über die

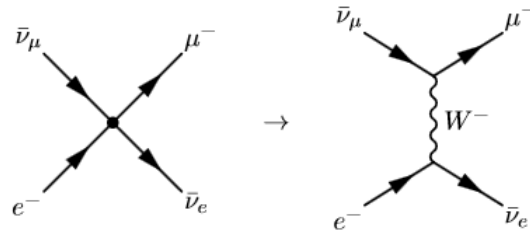


Abbildung 2.12: Einführung des W^- -Bosons am Beispiel der Elektron-Myon-Streuung, [3, S. 112]

Verknüpfung

$$g_w^2 = 4\sqrt{2}G_F m_W^2 \quad (2.39)$$

ist die Kopplungskonstante g_w dimensionslos. Die Masse der W-Bosonen ist $m_W = 80,385 \text{ GeV}$ [13]. Analog wird die schwache Wechselwirkung bei neutralen Strömen über das Z-Boson mit $m_Z = 91,1876 \text{ GeV}$ vermittelt [13].

Die Beschreibung der schwachen Wechselwirkung über den Austausch von W- und Z-Bosonen sieht der QED sehr ähnlich. Dabei ist der größte Unterschied, dass die drei Bosonen massiv sind und das Photon masselos. Beide Wechselwirkungen können zur elektroschwachen Wechselwirkung zusammengefasst werden, vgl. [9, §21.4].

3 Beiträge zu a_μ

Das anomale magnetische Moment von Leptonen erhält Beiträge von allen existierenden Teilchen. Daher ist es nützlich zu wissen, wie der jeweilige Beitrag eines Teilchens zu a_l von dessen Masse m_p abhängt, vgl. [1, §2.2].

Im Fall $m_p \geq m_l$ ist

$$\delta a_l^p \propto \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n_p} \frac{m_l^2}{m_p^2} \ln^{k_p} \frac{m_p}{m_l}. \quad (3.1)$$

Wenn $m_p \ll m_l$ ist, dann ist

$$\delta a_l^p \propto \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{n_p} \ln^{k_p} \frac{m_l}{m_p}. \quad (3.2)$$

Die Werte n_p und k_p hängen dabei von der Ordnung in der Störungsrechnung ab, in welcher der Beitrag auftaucht. Es ist auch ohne genaue Kenntnis von n_p und k_p zu sehen, dass leichte virtuelle Teilchen einen viel größeren Beitrag zu a_l liefern, als schwere virtuelle Teilchen.

Da das Elektron das leichteste geladene Teilchen ist, sind die Beiträge zum anomalen magnetischen Moment des Elektrons durch schwerere Teilchen mit mindestens $m_e^2/m_\mu^2 \propto 10^{-4}$ unterdrückt. Besonders hadronische Beiträge (s. Kapitel 3.2), die ansonsten große Unsicherheiten liefern, tragen daher kaum bei. Aus diesem Grund kann a_e am präzisesten bestimmt werden und wird zur Bestimmung der Feinstrukturkonstante verwendet: man erhält den Wert $\alpha^{-1} = 137,03599917436$, vgl. [14]. Die Empfindlichkeit auf mögliche „neue Physik“ ist beim anomalen magnetischen Moment des Elektrons ebenfalls sehr gering. Daher ist das Myon ein besserer „Monitor für neue Physik“, vgl. [2, §1]: die Werte der massenabhängigen Beiträge tragen stärker zu a_μ bei. Das Tauon würde noch bessere Erkenntnisse liefern, jedoch hat es eine zu kurze Lebensdauer ($\tau_\tau = 2,906 \times 10^{-13}$), um experimentell untersucht zu werden, vgl. [2, §1]. Auf mögliche Beiträge neuer Physik zu a_μ wird in Kapitel 5 noch einmal eingegangen.

3.1 QED-Beiträge

Den größten Anteil zum anomalen magnetischen Moment bilden die Beiträge aus der reinen QED, wo nur Leptonen und Photonen auftreten. Die beitragenden Diagramme lassen sich unterteilen in universelle und massenabhängige Beiträge. Die universellen Beiträge beinhalten Diagramme, in denen nur interne Photonen auftreten oder das externe Lepton und das in den inneren Schleifen identisch sind. Diese Beiträge liefern für Elektron, Myon und Tauon denselben Wert. Massenabhängige Terme treten erst ab der zweiten Ordnung (2-Schleifen) auf. Ab der dritten Ordnung (3-Schleifen) können sowohl leichte, als auch schwere interne Schleifen auftreten.

In der Störungstheorie lässt sich a_μ in Potenzen der Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ schreiben [1, §2.1]:

$$a_\mu = \sum_{i=1}^{\infty} a_\mu^i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^i, \quad (3.3)$$

wobei i für die Ordnung steht.

3.1.1 Beitrag 1. Ordnung, Berechnung des Schwinger-Terms

In der ersten Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ existiert ein einziges Diagramm, s. Abb. 3.1. Es liefert den ersten universellen Beitrag. Wenn man die Feynman-Regeln der QED (s. Anhang

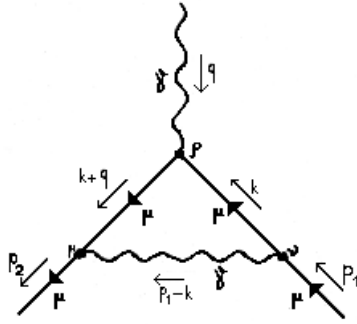


Abbildung 3.1: Diagramm erster Ordnung QED

A) hier anwendet, erhält man für die Amplitude:

$$\mathcal{M} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_{p_2} i e \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} i e \gamma^\rho \varepsilon(q) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} i e \gamma^\nu \frac{-i \eta_{\mu\nu}}{(p_1 - k)^2} u_{p_1}. \quad (3.4)$$

Nun kann man daraus direkt $\Gamma^\mu(p_1, p_2)$ ablesen (vgl. Kapitel 2.3.2), indem man den „amputierten Vertexgraphen“ (Abb. 2.9) betrachtet. Die Vertexfunktion ist nun

$$\Gamma^\mu = -i e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\not{k} + \not{q} + m) \gamma^\rho (\not{k} + m) \gamma_\mu}{((k+q)^2 - m^2) (k^2 - m^2) (p_1 - k)^2}. \quad (3.5)$$

Nachdem man den Zähler ausmultipliziert und die Gamma-Relationen (s. B.1) angewendet hat, wird die Feynman-Parametrisierung (s. B.2) benutzt. Dadurch wird aus dem Produkt im Nenner eine Summe, was die Integration vereinfacht. Man erhält:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= 4i e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \frac{\not{k} \gamma^\rho \not{k} - 2m(2k+q)^\rho + \not{k} \gamma^\rho \not{q} + m^2 \gamma^\rho}{\left[x \left((k+q)^2 - m^2 \right) + y \left(k^2 - m^2 \right) + z \left(p_1 - k \right)^2 \right]^3}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Wenn der Nenner ausmultipliziert wird, würde man Terme erhalten, die linear in k sind. Damit diese wegfallen, verschiebt man $k \rightarrow k - a$ mit $a = xq - zp_1$ und erhält

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= 4i e^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \frac{(\not{k} - \not{a}) \gamma^\rho (\not{k} - \not{a} + \not{q}) - 2m(2k - 2a + q)^\rho + m^2 \gamma^\rho}{\left[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x+y)m^2 \right]^3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nun wird der Zähler betrachtet. Der Term nur proportional zu γ^ρ kann vernachlässigt werden, da dieser nicht zum anomalen magnetischen Moment beiträgt, vgl. Kapitel 2.3.3. Ebenso fallen die Terme linear in k aus Symmetriegründen weg.

Nun untersucht man den in k quadratischen Term:

$$\begin{aligned} k_\alpha k_\beta \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta &= k_\alpha k_\beta [2\eta^{\rho\alpha} - \gamma^\rho \gamma^\alpha] \gamma^\beta \\ &= 2k_\alpha k_\beta \eta^{\rho\alpha} \gamma^\beta - k_\alpha k_\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Dabei wurde die Antikommutator-Relation ($\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$) verwendet. Der erste Term ist nur proportional zu γ^ρ und trägt somit nicht zu a_μ bei, was man folgendermaßen sieht:

$$\begin{aligned} 2k_\alpha k_\beta \eta^{\rho\alpha} \gamma^\beta &= 2\eta^{\rho\alpha} \cdot \frac{1}{4} \eta^{\beta\alpha} \eta_{\beta\alpha} \gamma^\beta k_\alpha k_\beta \\ &= \frac{1}{2} \eta^{\rho\beta} \eta_{\beta\alpha} \gamma^\alpha k^2 \\ &\propto \gamma^\rho . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Hier wurde zur Umformung in der ersten Zeile $\frac{1}{4} \eta^{\beta\alpha} \eta_{\beta\alpha} = \mathbb{I}$ benutzt. Der zweite Term in (3.8) ist proportional zu $\gamma^\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta = \gamma^\rho \gamma^\alpha \eta^{\alpha\beta} \gamma_\alpha$. Wenn $\alpha = \beta$, dann ist dieser Term ebenfalls nur proportional zu γ^ρ (s. Gamma-Relationen aus B.1) und trägt nicht zu a_μ bei. Wenn $\alpha \neq \beta$, verschwindet der Term, da dann $\eta^{\alpha\beta} = 0$ ist. Es bleibt dann noch

$$(z\not{p}_1 - x\not{q}) \gamma^\rho (z\not{p}_1 + (1-x)\not{q}) - 2m(2zp_1 + (1-2x)q)^\rho , \tag{3.10}$$

wobei $a = xq - zp_1$ eingesetzt wurde. Dann wird $q = p_2 - p_1$ eingesetzt. Der γ^ρ -Term lautet jetzt

$$\not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_1 A + \not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_2 B + \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_1 C + \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_2 D , \tag{3.11}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= z^2 - z + 2xz - x + x^2 , \\ B &= z - xz + x - x^2 , \\ C &= -xz + x - x^2 , \\ D &= -x + x^2 , \end{aligned}$$

und der $2m$ -Term ist

$$-2m(p_1 V + p_2 W)^\rho , \tag{3.12}$$

mit

$$\begin{aligned} V &= 2x + 2z - 1 , \\ W &= -2x + 1 . \end{aligned}$$

Jetzt erinnert man sich daran, dass links und rechts des Zählers in der Amplitude die Dirac-Spinoren stehen. In den Termen mit γ^ρ kann die Dirac-Gleichung (2.20) angewendet werden. Die Terme mit A und D werden wie folgt umgeformt:

$$\begin{aligned} &\not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_1 A - \not{p}_1 \gamma^\rho m A + \not{p}_1 \gamma^\rho m A + \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_2 D - m \gamma^\rho \not{p}_2 D + m \gamma^\rho \not{p}_2 D \\ = &\not{p}_1 \gamma^\rho (\not{p}_1 - m) A + m \not{p}_1 \gamma^\rho A + (\not{p}_2 - m) \gamma^\rho \not{p}_2 D + m \gamma^\rho \not{p}_2 D \\ = &m (\not{p}_1 \gamma^\rho A + \gamma^\rho \not{p}_2 D) . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Der Term mit C ist

$$\begin{aligned} &\not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_1 C - m \gamma^\rho \not{p}_1 C + m \gamma^\rho \not{p}_1 C \\ = &(\not{p}_2 - m) \gamma^\rho \not{p}_1 C + m \gamma^\rho \not{p}_1 C \\ = &m \gamma^\rho (\not{p}_1 - m) C + m^2 \gamma^\rho C \\ = &m^2 \gamma^\rho C . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Da dieser Term nur noch von γ^ρ abhängt, trägt er nicht zu a_μ bei.

Um diese Rechnung auch im B -Term machen zu können, muss man die Gamma-Matrizen erst vertauschen, bis sie an den richtigen Stellen stehen. Dazu verwendet man die Antikommutator-Relation

$$\gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu . \quad (3.15)$$

Danach wird wieder die Dirac-Gleichung angewendet und die Terme proportional zu γ^ρ werden weggelassen:

$$\begin{aligned} p_{1\alpha} p_{2\beta} \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta &= p_{1\alpha} p_{2\beta} (2\eta^{\rho\alpha} - \gamma^\rho \gamma^\alpha) \gamma^\beta \\ &= 2p_1^\rho \not{p}_2 - p_{1\alpha} p_{2\beta} \gamma^\rho (2\eta^{\beta\alpha} - \gamma^\beta \gamma^\alpha) \\ &\Rightarrow 2p_1^\rho \not{p}_2 + \gamma^\rho \not{p}_2 \not{p}_1 \\ &\Rightarrow 2mp_1^\rho + m\gamma^\rho \not{p}_2 . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Der gesamte Zähler lautet

$$mA\not{p}_1\gamma^\rho + 2mBp_1^\rho + mB\gamma^\rho\not{p}_2 + mD\gamma^\rho\not{p}_2 - 2m(p_1V + p_2W)^\rho . \quad (3.17)$$

Im nächsten Schritt werden die Diracologie-Relationen (s. B.3) eingesetzt. Damit wird der Zähler zu

$$\begin{aligned} &2mi\sigma^{\rho i} p_{1i} (A + B - V) + 2mi\sigma^{\rho i} p_{2i} (-B - D + W) \\ = &2mi\sigma^{\rho i} p_{1i} (z^2 - 2z + xz - 2x + 1) + 2mi\sigma^{\rho i} p_{2i} (-z + xz - 2x + 1) . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Jetzt wird der Nenner betrachtet:

$$\left[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x + y)m^2 \right]^3 . \quad (3.19)$$

Setzt man nun die Kinematik und die on-shell Bedingungen (die Teilchen erfüllen die Energie-Impuls-Beziehung)

$$q^2 = 0, \quad q \cdot p_1 = 0, \quad p_2 \cdot p_1 = m^2 \quad \text{und} \quad p_1^2 = p_2^2 = m^2 \quad (3.20)$$

ein, erhält man:

$$\left[k^2 - (x + y - z + z^2)m^2 \right]^3 = \left[k^2 - m^2(1 - z)^2 \right]^3 = \left[k^2 - \Delta \right]^3 \quad (3.21)$$

mit

$$\Delta = m^2(1 - z)^2 .$$

Als nächstes wird $k \rightarrow \sqrt{\Delta}k$ transformiert. Der Nenner wird dadurch zu $\Delta^3 [k^2 - 1]^3$ und die k -Integration wird zu $\int \Delta^2 d^4k$.

Das gesamte Integral ist somit:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu &= 4ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \Delta^2 \\
 &\quad \times \frac{2mi\sigma^{\rho i} [p_{1i}(z^2 - 2z + xz - 2x + 1) + p_{2i}(-z + xz - 2x + 1)]}{\Delta^3 [k^2 - 1]^3} \\
 &= 4ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - 1]^3} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\
 &\quad \times \frac{2mi\sigma^{\rho i} [p_{1i}(z^2 - 2z + xz - 2x + 1) + p_{2i}(-z + xz - 2x + 1)]}{m^2(1-z)^2} \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Um das Integral über k zu lösen, muss man zunächst eine Wick-Rotation durchführen (s. B.4). Diese dient dem Zweck, die Integration aus dem Minkowski-Raum in den euklidischen Raum zu überführen, in dem man das Integral einfacher lösen kann. Es wird $k^0 \rightarrow ik_E^0$ transformiert, wodurch die Integration zu $\int d^4k \rightarrow i \int d^4k_E$ geändert wird.

Das k -Integral hat die Form wie in B.5. Die Lösung eines Integrals dieser Form ist bekannt und ist in diesem Fall:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - 1]^3} = \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{i}{(-1)^3 [k_E^2 + 1]^3} = \frac{-i}{32\pi^2}. \quad (3.23)$$

Man erhält insgesamt:

$$\Gamma^\mu = 4e^2 \frac{2mi\sigma^{\rho i}}{32\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{p_{1i}(z^2 - 2z + xz - 2x + 1) + p_{2i}(-z + xz - 2x + 1)}{m^2(1-z)^2}. \quad (3.24)$$

Die Integration über x und z kann mit Mathematica gelöst werden. Das ergibt dann mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu &= \frac{mi\sigma^{\rho i} e^2}{4\pi^2} \left(\frac{p_{2i} - p_{1i}}{4m^2} \right) \\
 &= \frac{\alpha}{2\pi} \frac{i\sigma^{\rho i} q_i}{2m}. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Wie man auch in Gleichung (2.22) sehen kann, folgt daraus, dass der Beitrag zum anomalen magnetischen Moment

$$a_\mu^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi} \quad (3.26)$$

ist. Dieses Ergebnis wurde schon von Julian Schwinger 1949 berechnet, vgl. [15]. Er führte die Rechnung für das Elektron durch, aber da dieser Beitrag unabhängig von der Masse ist, gilt das Ergebnis ebenfalls für das Myon und das Tauon.

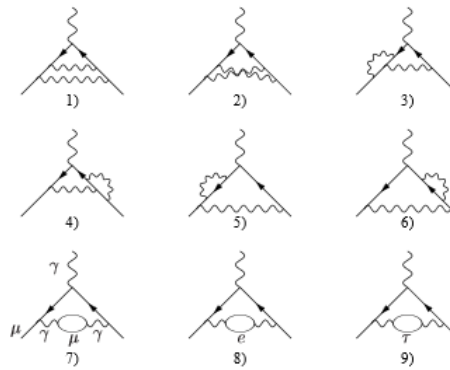


Abbildung 3.2: Diagramme 2. Ordnung QED zu a_μ [2, S. 18]

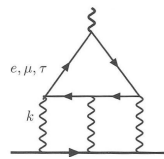


Abbildung 3.3: Diagramm 3. Ordnung QED mit „Light-by-Light scattering“ [1, S. 25]

3.1.2 Höhere Ordnungen

Beiträge 2. Ordnung

Es gibt insgesamt neun Diagramme, die zur zweiten Ordnung beitragen, s. Abb. 3.2. Davon sind sechs universell mit zwei internen Photonen. Die Diagramme (7) bis (9) stellen die Vakuumpolarisation (VP) dar. Im Fall des Myons zählt Diagramm (7) zu den universellen Beiträgen, die anderen beiden liefern die „leichte“ und „schwere“ massenabhängige Korrektur [2, §3.1]. Diese Beiträge wurden zuerst 1957 von Petermann [16] und Sommerfeld [17] bestimmt. Der Wert des 2-Loop (=2-Schleifen) Beitrages ist $a_\mu^{(2)} \simeq 413217,628 \times 10^{-11}$, vgl. [14].

Beiträge 3. Ordnung

Zur dritten Ordnung zählen 72 universelle Diagramme, wobei hier zum ersten Mal „Light-by-Light scattering“ (LbL) auftritt. Das heißt, dass es geschlossene Fermion-Schleifen gibt, an die vier Photonen koppeln. Ein typisches Diagramm ist in Abb. 3.3 zu sehen. Die massenabhängigen Terme erhält man, wenn die Leptonen in den internen Schleifen der Diagramme ausgetauscht werden. Analytisch wurde der gesamte Beitrag von Laporta und Remiddi 1996 berechnet [18]. Der Wert für die QED-Beiträge dritter Ordnung ist $a_\mu^{(3)} \simeq 30141,9024 \times 10^{-11}$, vgl. [14].

Beiträge 4. und 5. Ordnung

Je höher die Ordnung wird, desto kleiner werden die Beiträge und es wird schwieriger sie zu berechnen. Die Beiträge vierter und fünfter Ordnung sind die letzten, die noch komplett bekannt sind. Es tragen 891 universelle Diagramme zur vierten Ordnung bei, wovon 373 geschlossene Fermion-Schleifen beinhalten. Da die Diagramme sehr kompliziert sind, sind nur sehr wenige analytisch bekannt. Jedoch wurden alle, auch die massenabhängigen, von Aoyama, Hayakawa, Kinoshita und Nio numerisch

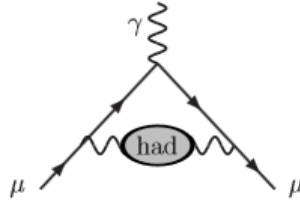


Abbildung 3.4: Hadronische Vakuumpolarisation [2, S. 32]

bestimmt [14]. Das Ergebnis des 4-Loop Beitrags ist $a_\mu^{(4)} \simeq 381,0077287 \times 10^{-11}$.

In der fünften Ordnung liefern die führenden Beiträge vor allem die Diagramme mit internen Elektronschleifen, wovon es 9080 gibt [2, §3.3]. Der gesamte Beitrag der fünften Ordnung wurde ebenfalls von Aoyama, Hayakawa, Kinoshita und Nio numerisch berechnet und ist $a_\mu^{(5)} \simeq 5,093771804 \times 10^{-11}$, vgl. [14].

3.1.3 Gesamter QED-Beitrag

Berücksichtigt man nun alle Diagramme einschließlich bis zur fünften Ordnung, erhält man für den gesamten reinen QED-Beitrag [14]:

$$a_\mu^{QED} = 116584718845(9)(19)(7)(30) \times 10^{-14}. \quad (3.27)$$

Die Fehler ergeben sich dabei aus den Unsicherheiten im Wert der Feinstrukturkonstante α , den Massenverhältnissen und in den Beiträgen vierter und fünfter Ordnung.

3.2 Hadronische Beiträge

Neben den Diagrammen aus der QED gibt es auch hadronische Beiträge zum anomalen magnetischen Moment, also Beiträge der Quantenchromodynamik (QCD). Hadronen setzen sich entweder aus Quark-Antiquark-Paaren zusammen (Mesonen) oder aus drei Quarks (Baryonen). Hadronische Beiträge treten erst ab der zweiten Ordnung auf, wo Leptonen in internen Schleifen durch Quarks ersetzt werden, welche wiederum Hadronen bilden. Da die Quarks in Hadronen eingeschlossen sind, kann man ihre Masse nicht direkt bestimmen. Dies macht unter anderem die Berechnung der hadronischen Beiträge extrem schwer. Ein anderes Problem ist, dass die starke Kopplungskonstante α_s nicht fest ist, so dass sie bei kleinen Energien groß wird. Daher kann man störungstheoretische QCD (pQCD) nicht unterhalb von 2 GeV anwenden, vgl. [2, §4]. Bei höheren Energien kann pQCD wieder eingesetzt werden, da α_s dort kleiner ist (Asymptotische Freiheit). Die hadronischen Beiträge lassen sich im Wesentlichen in zwei Bereiche unterteilen, die Vakuumpolarisation und hadronisches „Light-by-Light scattering“ (LbL).

3.2.1 Hadronische Vakuumpolarisation

Die Vakuumpolarisation, s. Abb. 3.4, ist der größte hadronische Effekt. Dessen möglichst genaue Bestimmung ist für den Vergleich zwischen dem theoretischen und experimentellen Wert von besonderer Bedeutung. Zur Berechnung wird eine semi-phänomenologische Näherung verwendet. Der Beitrag einer Schleife kann über die

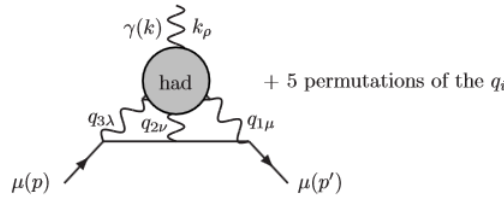


Abbildung 3.5: Hadronisches „Light-by-Light scattering“ [2, S. 47]

Selbstenergie-Funktion Π beschrieben werden, vgl. [2, §4]. Über die Dispersionsrelation kann man diese Funktion mit dem Wirkungsquerschnitt $\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})$ für die Elektron-Positron-Paarvernichtung in Verbindung setzen, vgl. [1, §3.1]. Der Wert für $\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})$ kann experimentell bestimmt werden. Den hadronischen VP-Beitrag kann man dann in Termen des Wirkungsquerschnitts ausdrücken. Alternativ kann man auch den Wirkungsquerschnitt für $\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{Hadronen}$ verwenden, jedoch erhält man hierfür andere Werte. Warum man zu verschiedenen Ergebnissen gelangt, konnte bisher nicht eindeutig geklärt werden. Man verwendet meist den Wert aus den e^+e^- -Daten, da dieser näher am erwünschten Wert liegt, vgl. [2, §4.1]. Mit diesen Verfahren ist der Beitrag der hadronischen Vakuumpolarisation zum anomalen magnetischen Moment etwa $a_\mu^{VP, had} = (6802,7 \pm 52,6) \times 10^{-11}$, vgl. [2, §7.1].

Dieser Wert kann nicht sehr präzise bestimmt werden, weil er von experimentellen Daten abhängt und weil die beiden Wirkungsquerschnitte $\sigma(e^- + e^+ \rightarrow \text{Hadronen})$ und $\sigma(\tau \rightarrow \nu_\tau + \text{Hadronen})$ zu verschiedenen Ergebnissen führen. Dieser Umstand limitiert die theoretische Genauigkeit für a_μ , weshalb man daran interessiert ist, die Unsicherheiten möglichst verschwinden zu lassen. Dies soll zum Beispiel durch neue e^+e^- -Paarvernichtungsexperimente geschehen, mit denen man gegebenenfalls auch die τ -Daten besser einbeziehen kann und so den Fehler minimieren würde, vgl. [2, §8.2].

3.2.2 Hadronisches „Light-by-Light scattering“

Ab der dritten Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^3)$ treten auch hadronische „Light-by-Light scattering“ Beiträge auf, s. Abb. 3.5. Der Wert ist aus zwei Gründen der am schwierigsten zu berechnende: zum einen muss LbL hauptsächlich durch störungsfreie QCD berechnet werden und zum anderen ist es sehr schwer, den Beitrag mit experimentellen Daten zu verbinden, vgl. [1, §6], da drei der vier Photonen virtuell sind. Daher muss man zur Berechnung auf verschiedene Modelle zurückgreifen. Es gibt nur wenig Funktionen der hadronischen LbL, die modellunabhängig erklärt werden können. Meist sind die Werte zu den Diagrammen abhängig von dem Modell, mit dem sie berechnet werden. Die verschiedenen Modelle liefern zwar nicht dieselben, aber ähnliche Werte. Eine genauere Beschreibung der modellabhängigen Berechnungen ist in [1, §6] zu finden. Insgesamt kann man für den hadronischen „Light-by-Light scattering“-Beitrag $a_\mu^{LbL, had} = (116 \pm 39) \times 10^{-11}$ annehmen, vgl. [2, §5.2].

Um die Genauigkeit des gesamten anomalen magnetischen Moments zu verbessern, sollte auch dieser Beitrag in Zukunft noch exakter bestimmt werden. Dabei ist es wichtig, ein konsistentes Modell für alle LbL-Beiträge zu finden, vgl. [2, §8.2].

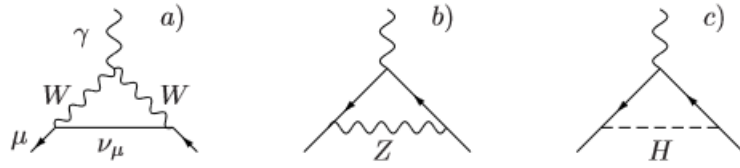


Abbildung 3.6: Elektroschwache Beiträge 1. Ordnung [2, S. 65]

3.3 Elektroschwache Beiträge

Neben QED und QCD gibt es auch Diagramme, die über die schwache Wechselwirkung zu a_μ beitragen. Hier tauchen in den Feynman-Diagrammen die schwachen Eichbosonen W^\pm und Z und das Higgs-Boson auf.

3.3.1 Beiträge 1. Ordnung

Der elektroschwache Beitrag erster Ordnung setzt sich aus drei Diagrammen zusammen, s. Abb. 3.6. Die genaue Berechnung erfolgt in Kapitel 4. Da die Massen der Eichbosonen sehr groß gegenüber der Masse des Myons sind, können Terme $\mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{M_{W,Z}^2}\right)$ vernachlässigt werden. Der Beitrag des W-Diagramms a) ist

$$a_\mu^{EW(1)}(W) = \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{10}{3} \quad (3.28)$$

und der des Z-Diagramms b)

$$a_\mu^{EW(1)}(Z) = \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{(-1 + 4 \sin^2 \theta_W)^2 - 5}{3}, \quad (3.29)$$

wobei $\sin^2 \theta_W = 1 - M_W^2/M_Z^2$ der schwache Mischungswinkel ist, vgl. [2, §6.1]. Zusammen ist der numerische Wert für die beiden Diagramme [19]

$$a_\mu^{EW(1)}(W, Z) = (194, 81 \pm 0, 01) \times 10^{-11}. \quad (3.30)$$

Die Korrektur durch das Higgs-Diagramm c) ist mit

$$a_\mu^{EW(1)}(H) = \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{4\pi^2} \int_0^1 dy \frac{(2-y)y^2}{y^2 + (1-y)(M_H/m_\mu)^2} \leq 5 \times 10^{-14}, \quad (3.31)$$

vgl. [2, §6.1], vernachlässigbar klein. Deshalb kann für den gesamten Beitrag erster Ordnung der Wert aus (3.30) gewählt werden.

3.3.2 Beiträge höherer Ordnungen

Bei den elektroschwachen Beiträgen zweiter Ordnung handelt es sich meist um elektromagnetische Korrekturen der 1-Loop Diagramme oder eingefügte Fermion-Schleifen, s. Abb. 3.7. Alle Korrekturen sind proportional zum Wert $\mathcal{K}_2 = \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{\alpha}{\pi}$ [2, §6.2]. Auch hier treten hadronische Effekte auf, die problematisch sind, vgl. [2, §6.2]. Außerdem existieren auch bosonische Beiträge: es gibt 1678 Diagramme, welche aufgrund der vielen verschiedenen Massenskalen kompliziert zu berechnen sind. Der gesamte 2-Loop Beitrag ist $a_\mu^{EW(2)} \simeq 42.08 \times 10^{-11}$ [2, §6.2].

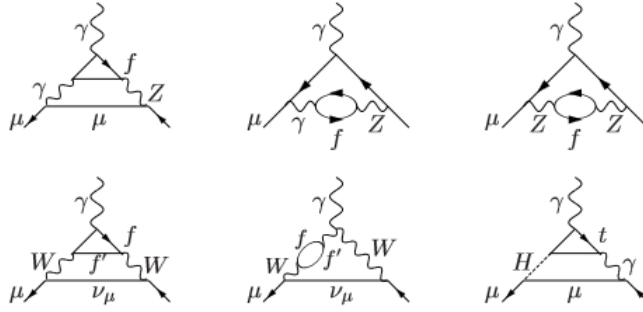


Abbildung 3.7: Diagramme 2. Ordnung in elektroschwacher Wechselwirkung [2, S. 66]

Diagramme dritter und höherer Ordnung sind bisher kaum berechnet. Da sie aber einen sehr kleinen Beitrag liefern, ist der Wert von keiner großen Bedeutung für den Vergleich zwischen Theorie und Experiment. Geschätzt ergibt sich $a_\mu^{EW(3)} \simeq (0,4 \pm 0,2) \times 10^{-11}$ [2, §6.2].

Der gesamte elektroschwache Beitrag zum anomalen magnetische Moment ist $a_\mu^{EW} = (153,6 \pm 1,0) \times 10^{-11}$ [19], wobei der Fehler hauptsächlich durch hadronische Effekte und unbekannte Beiträge höherer Ordnungen zustande kommt.

3.4 Gesamter theoretischer Wert für a_μ

Der Wert für das anomale magnetische Moment des Myons setzt sich theoretisch aus den Beiträgen zusammen, die in Kapitel 3.1 bis 3.3 besprochen wurden. Daraus ergibt sich insgesamt für die Standardmodell-Vorhersage [2, §7]

$$a_\mu^{the} = 1,16591790(65) \times 10^{-3} . \tag{3.32}$$

Dabei fällt auf, dass die Unsicherheit mit $6,5 \times 10^{-10}$ größer ist, als die Unsicherheit im experimentell bestimmten Wert. Auch sieht man im Vergleich zum Wert in (2.10) die Abweichung von $3,2\sigma$. Auf diese Diskrepanz wird in Kapitel 5 genauer eingegangen.

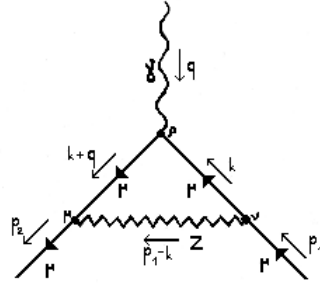


Abbildung 4.1: 1-Loop Diagramm mit Austausch eines Z-Bosons

4 Berechnung der elektroschwachen Beiträge 1. Ordnung

Die drei Diagramme aus Abb. 3.6 können analog zum Schwinger-Term (Kapitel 3.1.1) berechnet werden. Als Erstes wird in Kapitel 4.1 der Beitrag des Z-Bosons bestimmt, da dieser am unproblematischsten ist. Danach folgt in Kapitel 4.2 die Berechnung des Higgs-Beitrags. Zum Schluss wird der Beitrag des W-Boson-Diagramms in Kapitel 4.3 berechnet, da dies die aufwändigste Rechnung ist.

Zur Notation: m ist die Myon-Masse und M die Masse des W-, Z- oder Higgs-Teilchens. Die schwachen Kopplungskonstanten sind g_z und g_w . Des Weiteren wird wieder die Slash-Notation $\not{k} = k_\alpha \gamma^\alpha$ verwendet. Die Terme, die ein γ^5 enthalten, und die, die nur proportional zu γ^ρ sind, werden in den Rechnungen direkt weggelassen, da sie nur zu F_3 oder F_1 beitragen, vgl. Kapitel 2.3.3.

4.1 Z-Beitrag

Zunächst wird das 1-Loop Diagramm mit einem internen Z-Boson berechnet. Da das Z-Boson das Austauscheteilchen bei neutralen Strömen in der schwachen Wechselwirkung ist, tritt in der Amplitude der Faktor $\gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5)$ auf, vgl. Kapitel 2.4. Wendet man die Feynman-Regeln der schwachen Wechselwirkung auf das Diagramm in Abb. 4.1 an, ist die Amplitude durch

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_{p_2} \frac{-ig_z}{2} \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} ie\gamma^\rho \varepsilon(q) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \\ &\quad \times \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{(p_1 - k)^2 - M^2} \frac{-ig_z}{2} \gamma^\nu (c_V - c_A \gamma^5) u_{p_1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

gegeben. Dadurch erhält man die Vertexfunktion

$$\Gamma^\mu = \frac{-ig_z^2}{4} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-2(c_V^2 + c_A^2) \not{k} \gamma^\rho (\not{k} + \not{q}) + 4m(c_V^2 - c_A^2)(2k+q)^\rho}{((k+q)^2 - m^2)(k^2 - m^2)((p_1 - k)^2 - M^2)}, \quad (4.2)$$

wobei der Zähler ausmultipliziert und die Gamma-Relationen (B.1) angewendet wurden. Als nächstes wird die Feynman-Parametrisierung (B.2) angewendet:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= -ig_z^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \frac{-(c_V^2 + c_A^2) \not{k} \gamma^\rho (\not{k} + \not{q}) + 2m(c_V^2 - c_A^2)(2k+q)^\rho}{[k^2 + 2k(xq - zp_1) + xq^2 + zp_1^2 - (x+y)m^2 - zM^2]^3}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Nun wird wieder $k \rightarrow k - a$ mit $a = xq - zp_1$ verschoben. Dadurch erhält man

$$\Gamma^\mu = \frac{-ig_z^2}{4} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \quad (4.4)$$

$$\times \frac{-(c_V^2 + c_A^2) (\not{k} - \not{q}) \gamma^\rho (\not{k} - \not{q} + \not{q}) + 2m (c_V^2 - c_A^2) (2k - 2a + q)^\rho}{\left[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x+y)m^2 - zM^2 \right]^3}.$$

Nun wird der Zähler genauer untersucht. Wie in Kapitel 3.1 erklärt, fallen die Terme linear und quadratisch in k weg. Es bleibt im Zähler

$$-(c_V^2 + c_A^2) (z\not{p}_1 - x\not{q}) \gamma^\rho (z\not{p}_1 + (1-x)\not{q}) + 2m (c_V^2 - c_A^2) (2zp_1 + (1-2x)q)^\rho. \quad (4.5)$$

Als nächstes wird die Impulserhaltung $q = p_2 - p_1$ eingesetzt, wodurch der γ -Term

$$-(c_V^2 + c_A^2) [\not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_1 A + \not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_2 B + \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_1 C + \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_2 D] \quad (4.6)$$

ist, mit

$$\begin{aligned} A &= z^2 - z + 2xz - x + x^2, \\ B &= z - xz + x - x^2, \\ C &= -xz + x - x^2, \\ D &= -x + x^2. \end{aligned}$$

Der $2m$ -Term wird zu

$$2m (c_V^2 - c_A^2) (p_1 E + p_2 F)^\rho, \quad (4.7)$$

mit

$$\begin{aligned} E &= 2z + 2x - 1, \\ F &= -2x + 1. \end{aligned}$$

Damit die Dirac-Gleichung in (4.6) angewendet werden kann, müssen die Gamma-Matrizen im B-Term vertauscht werden. Dies geschieht wie in Gleichung (3.16). Insgesamt erhält man nach Anwendung der Dirac-Gleichung für (4.6)

$$-(c_V^2 + c_A^2) [mA\not{p}_1 \gamma^\rho + 2mB\not{p}_1^\rho + mB\gamma^\rho \not{p}_2 + mD\gamma^\rho \not{p}_2]. \quad (4.8)$$

Im nächsten Schritt werden die Diracologie-Relationen (B.3) in (4.7) und (4.8) angewendet, wodurch der gesamte Zähler zu

$$\begin{aligned} &2mi\sigma^{\rho i} c_V^2 [p_{1i} (A') + p_{2i} (B')] \\ &+ 2mi\sigma^{\rho i} c_A^2 [p_{1i} (C') + p_{2i} (D')] \end{aligned} \quad (4.9)$$

wird. Dabei sind

$$\begin{aligned} A' &= -A - B + E = -z^2 + 2z - xz + 2x - 1, \\ B' &= B + D - F = z - xz + 2x - 1, \\ C' &= -A - B - E = -z^2 - 2z - xz - 2x + 1, \\ D' &= B + D + F = z - xz - 2x + 1. \end{aligned}$$

Jetzt wird der Nenner betrachtet. Dieser ist dem Nenner aus der Schwinger-Rechnung (3.19) sehr ähnlich:

$$\left[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x + y)m^2 - zM^2 \right]^3. \quad (4.10)$$

Die Kinematik (3.20) wird eingesetzt und $k \rightarrow \sqrt{\Delta}k$ verschoben:

$$\Delta^3 [k^2 - 1]^3 \quad \text{mit} \quad \Delta = m^2(1 - z)^2 + zM^2. \quad (4.11)$$

Danach wird eine Wick-Rotation durchgeführt (B.4), dadurch erhält man für den Nenner

$$-\Delta^3 [k_E^2 + 1]^3. \quad (4.12)$$

Damit lautet die Vertexfunktion

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= -g_z^2 \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + 1]^3} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\ &\quad \times \frac{2mi\sigma^{\rho i} [c_V^2 (p_{1i}A' + p_{2i}B') + c_A^2 (p_{1i}C' + p_{2i}D')]}{m^2(1 - z)^2 + zM^2}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Das k -Integral lässt sich wieder mit (B.5) lösen. Als nächstes zieht man c_V^2 , c_A^2 , M^2 und $2mi\sigma^{\rho i}$ aus dem zweiten Integral heraus. Man erhält zwei Integrale, die sich mit der Näherung

$$m^* \equiv m^2/M^2 \rightarrow 0 \quad (4.14)$$

mit Mathematica lösen lassen:

$$\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \left[p_{1i} \frac{-z^2 + 2z - xz + 2x - 1}{m^*(1 - z)^2 + z} + p_{2i} \frac{z - xz + 2x - 1}{m^*(1 - z)^2 + z} \right] = -\frac{1}{6} (p_{2i} - p_{1i}), \quad (4.15)$$

$$\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \left[p_{1i} \frac{-z^2 - 2z - xz - 2x + 1}{m^*(1 - z)^2 + z} + p_{2i} \frac{z - xz - 2x + 1}{m^*(1 - z)^2 + z} \right] = \frac{5}{6} (p_{2i} - p_{1i}). \quad (4.16)$$

Daraus folgt

$$\Gamma^\mu = -\frac{g_z^2 m^2}{8\pi^2 M^2} \frac{i\sigma^{\rho i} q_i}{2m} \left(\frac{-c_V^2 + 5c_A^2}{6} \right). \quad (4.17)$$

Aus der Tabelle in den Feynman-Regeln (s. A.2) entnimmt man, dass $c_V = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W$ und $c_A = -\frac{1}{2}$ ist, da das Z-Boson an Myonen koppelt. Das M in dieser Rechnung ist die Masse m_Z des Z-Bosons, welche auch durch $m_Z^2 = \frac{m_W^2}{\cos^2\theta_W}$ ausgedrückt werden kann. Die Kopplungskonstante lässt sich umschreiben als $g_z^2 = \frac{g_w^2}{\cos^2\theta_W}$. Mit (2.22) und (2.39) erhält man für das anomale magnetische Moment

$$a_\mu^{EW(1)}(Z) = \frac{\sqrt{2}G_F m_\mu^2}{16\pi^2} \frac{(-1 + 4\sin^2\theta_W)^2 - 5}{3}, \quad (4.18)$$

was genau mit dem Wert aus [2] übereinstimmt.

Setzt man die Werte aus Anhang C ein, erhält man den Wert

$$a_{\mu}^{EW(1)}(Z) = -194,132 \times 10^{-11} . \quad (4.19)$$

Das entspricht in etwa dem Wert aus [2, §6.1], wobei dort ältere Werte für m_Z und $\sin^2 \theta_W$ verwendet wurden, was die kleine Abweichung erklären kann.

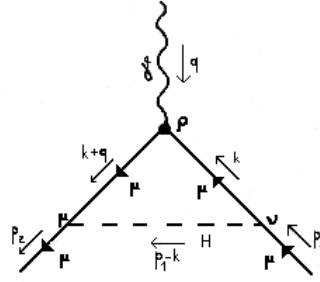


Abbildung 4.2: 1-Loop Diagramm mit Austausch eines Higgs-Teilchens

4.2 Higgs-Beitrag

Als nächstes wird das Diagramm mit Austausch eines Higgs-Bosons berechnet, s. Abb. 4.2. Diese Berechnung ist am kürzesten, da hier nur wenige Gamma-Matrizen auftreten. M steht nun für die Higgs-Masse.

Man beginnt wieder mit den Feynman-Regeln (A) und erhält die Amplitude

$$\mathcal{M} = i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_{p_2} \frac{-im}{v} \frac{i(\not{k} + \not{q} + m)}{(k+q)^2 - m^2} i e \gamma^\rho \varepsilon(q) \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2} \frac{i}{(p_1 - k)^2 - M^2} \frac{-im}{v} u_{p_1}. \quad (4.20)$$

Um den Zähler umzuschreiben, verwendet man Formel (3.15). Damit ist die Vertexfunktion

$$\Gamma^\mu = \frac{im^2}{v^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\not{k} \gamma^\rho \not{k} + 2mk^\rho + \not{q} \gamma^\rho \not{k} + \not{q} \gamma^\rho m}{((k+q)^2 - m^2)(k^2 - m^2)((p_1 - k)^2 - M^2)}. \quad (4.21)$$

Nun wird die Feynman-Parametrisierung (B.2) angewendet:

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \frac{2im^2}{v^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \frac{\not{k} \gamma^\rho \not{k} + 2mk^\rho + \not{q} \gamma^\rho \not{k} + m \not{q} \gamma^\rho}{[k^2 + 2k(xq - zp_1) + xq^2 + zp_1^2 - (x+y)m^2 - zM^2]^3}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Nach der Verschiebung $k \rightarrow k - a$, wobei $a = xq - zp_1$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \frac{2im^2}{v^2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \frac{(\not{k} - \not{a}) \gamma^\rho (\not{k} - \not{a}) + 2m(k-a)^\rho + \not{q} \gamma^\rho (\not{k} - \not{a}) + m \not{q} \gamma^\rho}{[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x+y)m^2 - zM^2]^3}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Im Zähler fallen wieder die Terme linear und quadratisch in k weg, so dass der Zähler zu

$$(z\not{p}_1 - x\not{q}) \gamma^\rho (z\not{p}_1 - x\not{q}) + \not{q} \gamma^\rho (z\not{p}_1 - x\not{q}) + 2m(zp_1 - xq)^\rho + m \not{q} \gamma^\rho \quad (4.24)$$

wird. Setzt man die Impulserhaltung $q = p_2 - p_1$ ein, so lassen sich die ersten beiden Summanden wie folgt umschreiben:

$$I = \not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_1 A + \not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_2 B + \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_1 C + \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_2 D, \quad (4.25)$$

mit

$$\begin{aligned} A &= z^2 - z + 2xz - x + x^2, \\ B &= -xz + x - x^2, \\ C &= z - xz + x - x^2, \\ D &= -x + x^2. \end{aligned}$$

Die anderen beiden Summanden aus (4.24) sind

$$II = 2mzp_1^\rho - 2mx(p_2 - p_1)^\rho + m\not{p}_2\gamma^\rho - m\not{p}_1\gamma^\rho. \quad (4.26)$$

Im B -Term und im letzten Term in II müssen zunächst die Gamma-Matrizen vertauscht werden, wodurch diese zu

$$\not{p}_1\gamma^\rho\not{p}_2B = 2p_1^\rho\not{p}_2B + \gamma^\rho\not{p}_2\not{p}_1B \quad (4.27)$$

und

$$-m\not{p}_1\gamma^\rho = -2mp_1^\rho + m\gamma^\rho\not{p}_1 \quad (4.28)$$

werden. Jetzt kann die Dirac-Gleichung (2.20) angewendet werden:

$$I = mA\not{p}_1\gamma^\rho + 2mBp_1^\rho + mB\gamma^\rho\not{p}_2 + mD\gamma^\rho\not{p}_2, \quad (4.29)$$

$$II = 2mzp_1^\rho - 2m xp_2^\rho + 2m xp_1^\rho - 2mp_1^\rho. \quad (4.30)$$

Mit Formel (3.15) und nochmaliger Anwendung der Dirac-Gleichung kann man

$$\not{p}_1\gamma^\rho = 2p_1^\rho \quad \text{und} \quad \gamma^\rho\not{p}_2 = 2p_2^\rho \quad (4.31)$$

ersetzen, womit der gesamte Zähler

$$2mp_1^\rho(z^2 + xz + x - 1) + 2mp_2^\rho(-xz - x) \quad (4.32)$$

ist. Dies lässt sich in die kürzere Form

$$2m[p_1^\rho(z^2 - 1) + q^\rho(-xz - x)] \quad (4.33)$$

umschreiben.

Der Nenner in (4.23) ist identisch mit dem in (4.10). Man wendet die gleichen Operationen an (Kinematik, Transformation und Wick-Rotation) und erhält

$$-\Delta^3 [k_E^2 + 1]^3 \quad \text{mit} \quad \Delta = m^2(1 - z)^2 + zM^2. \quad (4.34)$$

Die Vertexfunktion lautet nun

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= \frac{4m^3}{v^2} \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + 1]^3} \\ &\times \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{p_1^\rho(z^2 - 1) + q^\rho(-xz - x)}{m^2(1 - z)^2 + zM^2}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Als Nächstes kann man die k -Integration (B.5) und die x -Integration (mit Mathematica) ausführen:

$$\Gamma^\mu = \frac{m^3}{8\pi^2 v^2} \int_0^1 dz \frac{p_1^\rho (1-z)(-1+z^2) + \frac{1}{2} q^\rho (1-z)(-1+z^2)}{m^2 (1-z)^2 + z M^2}. \quad (4.36)$$

Jetzt verschiebt man zur Vereinfachung $z \rightarrow z - 1$ und erhält:

$$\Gamma^\mu = -\frac{m^3}{16\pi^2 v^2} (2p_1 + q)^\rho \int_0^1 dz \frac{z^2 (2-z)}{m^2 z^2 + (1-z) M^2}. \quad (4.37)$$

Mit Anwendung der Diracologie-Relationen (B.3) und $v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$ ergibt sich

$$\Gamma^\mu = \frac{\sqrt{2}G_F m^4}{8\pi^2 M^2} \frac{i\sigma^{\rho i} q_i}{2m} \int_0^1 dz \frac{z^2 (2-z)}{m^* z^2 + 1-z}, \quad (4.38)$$

wobei $m^* \equiv \frac{m^2}{M^2}$ ist.

Insgesamt erhält man mit (2.22) für das anomale magnetische Moment

$$a_\mu^{EW(1)}(H) = \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{M^2} \int_0^1 dz \frac{z^2 (2-z)}{m^* z^2 + 1-z}. \quad (4.39)$$

Dieses Ergebnis wird auch in [2] genannt.

Löst man nun das Integral mit $m^* \rightarrow 0$, so liefert das

$$a_\mu^{EW(1)}(H) = \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{8\pi^2} \frac{m^2}{M^2} \left(-\frac{7}{6} + \ln \left(\frac{M^2}{m^2} \right) \right). \quad (4.40)$$

Das wiederum entspricht nicht ganz dem Resultat in [2], dort fehlt der Faktor $-\frac{7}{6}$. Da das Integral richtig zu sein scheint und dessen Lösung mit Mathematica berechnet wurde, könnte in [2, §6.1] ein Tippfehler vorhanden sein.

Werden nun die Werte aus (C) eingesetzt, ist das Ergebnis für den Higgs-Beitrag

$$a_\mu^{EW(1)}(H) = 2,135 \times 10^{-14}. \quad (4.41)$$

Dies entspricht der Erwartung, s. (3.31). Man sieht, dass dieser Wert so klein ist, dass er vernachlässigt werden kann, weshalb nicht weiter auf den Unterschied zwischen dem Ergebnis (4.40) und dem Wert in [2, §6.1] eingegangen wird.

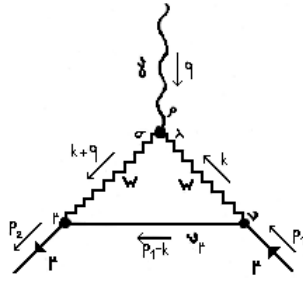


Abbildung 4.3: 1-Loop Diagramm mit W-Bosonen

4.3 W-Beitrag

Zuletzt wird das Diagramm aus Abb. 4.3 berechnet, in dem W-Bosonen auftreten. Da an einem Vertex drei Eichbosonen auftreten, macht das die Rechnung am Anfang sehr kompliziert, weil die Terme sehr lang werden.

Nach Anwendung der Feynman-Regeln (A) ist die Amplitude für dieses Diagramm

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M} &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}_{p_2} \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \frac{i(\not{p}_1 - \not{k})}{(p_1 - k)^2} \frac{-i\eta_{\mu\sigma}}{(k+q)^2 - M^2} i e \\
 &\quad \times \left[\eta^{\sigma\lambda} (-q - 2k)^\rho + \eta^{\lambda\rho} (k - q)^\sigma + \eta^{\rho\sigma} (2q + k)^\lambda \right] \varepsilon(q) \frac{-i\eta_{\lambda\nu}}{k^2 - M^2} \\
 &\quad \times \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u_{p_1} .
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Dabei steht M für die Masse des W-Bosons und die Masse des Neutrinos wurde mit $m_n = 0$ direkt weggelassen. Man erkennt hier wieder den V–A-Term, der die Paritätsverletzung ermöglicht. Aus der Amplitude erhält man die Vertexfunktion, s. (2.18). Diese ist nach Ausmultiplizieren und Verwendung der Gamma-Relationen (B.1)

$$\Gamma^\mu = \frac{ig_w^2}{8} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4(\not{p}_1 - \not{k})(2k + q)^\rho + 2(\not{k} - \not{q})(\not{p}_1 - \not{k})\gamma^\rho + 2\gamma^\rho(\not{p}_1 - \not{k})(2\not{q} + \not{k})}{\left((k+q)^2 - M^2\right)(k^2 - M^2)(p_1 - k)^2} . \tag{4.43}$$

Im nächsten Schritt wird die Feynman-Parametrisierung (B.2) angewendet und dann der Impuls $k \rightarrow k - a$ mit $a = xq - zp_1$ verschoben:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu &= \frac{ig_w^2}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \\
 &\quad \times \left[\frac{2(\not{p}_1 - \not{k} + \not{a})(2k - 2a + q)^\rho + (\not{k} - \not{a} - \not{q})(\not{p}_1 - \not{k} + \not{a})\gamma^\rho}{\left[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x+y)M^2\right]^3} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma^\rho(\not{p}_1 - \not{k} + \not{a})(2\not{q} + \not{k} - \not{a})}{\left[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x+y)M^2\right]^3} \right] .
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Im Zähler fallen die Terme, die linear und quadratisch in k sind, wie in den anderen Rechnungen weg. Die drei Summanden werden nun der Reihe nach betrachtet:

$$I = 2(\not{p}_1(1-z) + x\not{q})(2zp_1 + (1-2x)q)^\rho, \quad (4.45)$$

$$II = (z\not{p}_1 + (-1-x)\not{q})(\not{p}_1(1-z) + x\not{q})\gamma^\rho, \quad (4.46)$$

$$III = \gamma^\rho(\not{p}_1(1-z) + x\not{q})(z\not{p}_1 + (2-x)\not{q}). \quad (4.47)$$

Es wird $q = p_2 - p_1$ eingesetzt, wodurch Teil I des Zählers folgendermaßen aussieht:

$$I = 2[\not{p}_1 p_1^\rho A + \not{p}_1 p_2^\rho B + \not{p}_2 p_1^\rho C + \not{p}_2 p_2^\rho D], \quad (4.48)$$

mit

$$A = -2z^2 + 3z - 4xz + 3x - 2x^2 - 1,$$

$$B = -z + 2xz - 3x + 2x^2 + 1,$$

$$C = 2xz - x + 2x^2,$$

$$D = x - 2x^2.$$

Der zweite Summand II ist

$$II = \not{p}_1 \not{p}_1 \gamma^\rho E + \not{p}_1 \not{p}_2 \gamma^\rho F + \not{p}_2 \not{p}_1 \gamma^\rho G + \not{p}_2 \not{p}_2 \gamma^\rho H, \quad (4.49)$$

mit

$$E = -z^2 - 2xz - x^2 + 1,$$

$$F = zx + x + x^2,$$

$$G = z + xz + x^2 - 1,$$

$$H = -x - x^2,$$

und der letzte Term III ist

$$III = \gamma^\rho \not{p}_1 \not{p}_1 J + \gamma^\rho \not{p}_1 \not{p}_2 K + \gamma^\rho \not{p}_2 \not{p}_1 L + \gamma^\rho \not{p}_2 \not{p}_2 N, \quad (4.50)$$

mit

$$J = -z^2 + 3z - 2xz + 3x - x^2 - 2,$$

$$K = -2z + xz - 3x + x^2 + 2,$$

$$L = xz - 2x + x^2,$$

$$N = 2x - x^2.$$

In II und III müssen mit (3.15) die Gamma-Matrizen umgestellt werden. Die beiden Terme lauten dann

$$II = 2E p_1^\rho \not{p}_1 - E \not{p}_1 \gamma^\rho \not{p}_1 - F \not{p}_2 \not{p}_1 \gamma^\rho + G \not{p}_2 \not{p}_1 \gamma^\rho + H \not{p}_2 \not{p}_2 \gamma^\rho, \quad (4.51)$$

$$III = J \gamma^\rho \not{p}_1 \not{p}_1 - K \gamma^\rho \not{p}_2 \not{p}_1 + L \gamma^\rho \not{p}_2 \not{p}_1 + 2N p_2^\rho \not{p}_2 - N \not{p}_2 \gamma^\rho \not{p}_2. \quad (4.52)$$

Jetzt kann man im gesamten Zähler die Dirac-Gleichung (2.20) anwenden:

$$I = 2m A p_1^\rho + 2m B p_2^\rho + 2m C p_1^\rho + 2m D p_2^\rho, \quad (4.53)$$

$$II = 2m E p_1^\rho - m E \not{p}_1 \gamma^\rho - m F \not{p}_1 \gamma^\rho + m G \not{p}_1 \gamma^\rho + m H \not{p}_2 \gamma^\rho, \quad (4.54)$$

$$III = m J \gamma^\rho \not{p}_1 - m K \gamma^\rho \not{p}_2 + m L \gamma^\rho \not{p}_2 + 2m N p_2^\rho - m N \gamma^\rho \not{p}_2. \quad (4.55)$$

Werden nun die Diracologie-Relationen (B.3) eingesetzt, so wird aus (4.53)-(4.55):

$$I = 2mi\sigma^{\rho i} [p_{1i} (A + C) + p_{2i} (-B - D)] , \quad (4.56)$$

$$II = 2mi\sigma^{\rho i} p_{1i} (-F + G) , \quad (4.57)$$

$$III = 2mi\sigma^{\rho i} p_{2i} (K - L) . \quad (4.58)$$

Der gesamte Zähler ist also

$$2mi\sigma^{\rho i} p_{1i} A' + 2mi\sigma^{\rho i} p_{2i} B' \quad (4.59)$$

mit

$$\begin{aligned} A' = A + C - F + G &= -2z^2 + 4z - 2xz + x - 2 , \\ B' = -B - D + K - L &= -z - 2xz + x + 1 . \end{aligned}$$

Als Nächstes wird wieder der Nenner betrachtet, der diesmal ein wenig anders aussieht:

$$\left[k^2 + xq^2 + zp_1^2 - (xq - zp_1)^2 - (x + y) M^2 \right]^3 . \quad (4.60)$$

Es wird die Kinematik (3.20) eingesetzt:

$$[k^2 - \Delta]^3 \quad \text{mit} \quad \Delta \equiv (z^2 - z) m^2 + (1 - z) M^2 . \quad (4.61)$$

Diesmal ist nicht überall $\Delta \geq 0$, weshalb man die Verschiebung $k \rightarrow \sqrt{\Delta}k$ nicht immer machen darf. Man muss Δ zunächst auf Nullstellen untersuchen. Δ wird wie folgt umgeschrieben:

$$\begin{aligned} \Delta &= M^2 [(z^2 - z) m^* + 1 - z] \\ &= M^2 (1 - z) (1 - zm^*) , \end{aligned} \quad (4.62)$$

wobei $m^* \equiv m^2/M^2$ ist. Δ soll nun an der Stelle $z = z^*$ Null sein:

$$0 = M^2 (1 - z^*) (1 - z^* m^*) . \quad (4.63)$$

Daraus folgt, dass die Nullstellen bei $z^* = 1$ und $z^* = 1/m^*$ liegen. Man integriert später nur über den Bereich zwischen 0 und 1. Die Nullstellen liegen außerhalb des Bereichs, da $1/m^* = M^2/m^2 \gg 1$ ist, weil die Masse des W-Bosons viel größer als die des Myons ist. Man kann also wie in den anderen Rechnungen fortfahren.

Es wird nun $k \rightarrow \sqrt{\Delta}k$ verschoben. Der Nenner aus (4.61) wird zu

$$\Delta^3 [k^2 - 1]^3 \quad (4.64)$$

und die k -Integration wird dadurch zu $\int d^4k \rightarrow \Delta^2 \int d^4k$ geändert. Um das k -Integral zu lösen, muss man wieder eine Wick-Rotation durchführen (B.4). Der Nenner wird dadurch zu

$$-\Delta^3 [k_E^2 + 1] . \quad (4.65)$$

Jetzt kann die gesamte Vertexfunktion betrachtet werden:

$$\Gamma^\mu = \frac{g_w^2}{2} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k_E^2 + 1]^3} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{2mi\sigma^{\rho i} (p_{1i}A' + p_{2i}B')}{M^2(1-z)(1-zm^*)}. \quad (4.66)$$

Das erste Integral lässt sich mit (B.5) lösen und man erhält

$$\Gamma^\mu = \frac{g_w^2 mi\sigma^{\rho i}}{32\pi^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{p_{1i}A' + p_{2i}B'}{M^2(1-z)(1-zm^*)}.$$

Die x - und z -Integration wird mit Mathematica im Limes $m^* \rightarrow 0$ durchgeführt. Man teilt die Integrale nach p_{1i} und p_{2i} auf und erhält

$$\frac{p_{1i}}{M^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{-2z^2 + 4z - 2xz + x - 2}{(1-z)(1-zm^*)} = -\frac{7}{12} \frac{p_{1i}}{M^2}, \quad (4.67)$$

$$\frac{p_{2i}}{M^2} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \frac{-z - 2xz + x + 1}{(1-z)(1-zm^*)} = \frac{7}{12} \frac{p_{2i}}{M^2}. \quad (4.68)$$

Mit diesen Ergebnissen und der Formel (2.39) ist die Vertexfunktion

$$\Gamma^\mu = \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{16\pi^2} \frac{i\sigma^{\rho i} q_i}{2m} \frac{7}{3}. \quad (4.69)$$

Aus (2.22) ergibt sich dann für das anomale magnetische Moment des Myons

$$a_\mu^{EW(1)}(W) = \frac{\sqrt{2}G_F m^2}{16\pi^2} \frac{7}{3}. \quad (4.70)$$

Dieses Ergebnis stimmt nicht ganz mit dem aus [2, §6.1] überein, es sollte ein Faktor $\frac{10}{3}$ im Ergebnis stehen anstatt $\frac{7}{3}$. Wahrscheinlich ist in dieser Berechnung ein Rechenfehler, welcher jedoch nicht gefunden werden konnte.

Mit den Zahlen aus (C) ist der Wert für den 1-Loop W-Beitrag

$$a_\mu^{EW(1)}(W) = 272,094 \times 10^{-11}. \quad (4.71)$$

Laut [2, §6.1] sollte der Wert

$$a_\mu^{EW(1)}(W) = 388,70 \times 10^{-11} \quad (4.72)$$

sein, also etwa um 40% größer. Tauscht man in der Formel (4.70) den Faktor $\frac{7}{3}$ durch $\frac{10}{3}$ aus und setzt die Werte aus (C) ein, erhält man genau (4.72). Das heißt, die Abweichung des numerischen Ergebnisses vom Literaturwert in [2, §6.1] kommt allein durch den bereits erwähnten Rechenfehler.

4.4 Gesamter elektroschwacher Beitrag 1. Ordnung

Da alle drei Diagramme, die zum 1-Loop Beitrag der elektroschwachen Wechselwirkung zählen, hier berechnet wurden, kann der gesamte Beitrag angegeben werden. Das Ergebnis der Higgs-Rechnung (4.40) liefert einen zu kleinen Wert, da es $\mathcal{O}(10^{-14})$ ist, und kann daher vernachlässigt werden. Die beiden Werte aus (4.19) und (4.71) ergeben zusammen

$$a_{\mu}^{EW(1)}(W, Z) = 77,962 \times 10^{-11} . \quad (4.73)$$

Der eigentliche Wert ist in [19] mit

$$a_{\mu}^{EW(1)}(W, Z) = (194,81 \pm 0,01) \times 10^{-11} , \quad (4.74)$$

angegeben, was wieder einer Abweichung von ca. 40% entspricht. Dieser Unterschied kommt daher, dass es einen Fehler in der Berechnung des W-Diagramms gibt. Das Ergebnis des W-Beitrags weicht um einen Faktor $\frac{10}{7}$ vom Literaturwert ab. Ohne diesen Rechenfehler hätte das Ergebnis (4.74) reproduziert werden können.

5 Abweichung zwischen Theorie und Experiment

Das anomale magnetische Moment muss in einer vollständigen Theorie exakt vorhersagbar sein. Deshalb ist es möglich, über a_μ das Standardmodell auf seine Vollständigkeit zu überprüfen. Das Experiment am Brookhaven National Laboratory war ein Meilenstein, da es den Wert

$$a_\mu^{exp} = 1,16592080(63) \times 10^{-3} \quad (5.1)$$

mit einer Unsicherheit von $6,3 \times 10^{-10}$ experimentell präziser bestimmen konnte als die Theorie. Die Vorhersage des Standardmodells setzt sich aus den Beiträgen aus Kapitel 3 zusammen und liefert

$$a_\mu^{the} = 1,16591790(65) \times 10^{-3}, \quad (5.2)$$

vgl. [2, §7]. Die größte Unsicherheit wird dabei durch die hadronischen Beiträge hervorgerufen. Bis jetzt sind diese theoretisch nicht eindeutig zu bestimmen (vgl. Kapitel 3.2). Ein Ziel ist es daher, vor allem die hadronische Vakuumpolarisation in Zukunft genauer und modellunabhängig bestimmen zu können. Die Diskrepanz zwischen (5.1) und (5.2) beträgt

$$\delta a_\mu = a_\mu^{exp} - a_\mu^{the} = (290 \pm 90) \times 10^{-11}, \quad (5.3)$$

was einer Abweichung von $3,2\sigma$ entspricht. Das lässt sich mit bekannter Physik und statistischen Fehlern kaum erklären. Deshalb geht man davon aus, dass es neue Physik gibt, die weitere Beiträge zum anomalen magnetischen Moment liefern würde.

Neue Physik würde a_μ indirekt über virtuelle Schleifen ändern. Die neuen Teilchen müssten bei einer Energieskala größer als $0,5 - 1 \text{ TeV}$ sein und der Beitrag zu a_μ sollte im Intervall $40 \times 10^{-11} < a_\mu^{NP} < 440 \times 10^{-11}$ liegen, vgl. [1, §8]. Wären die Teilchen leichter, hätte man sie schon in Beschleunigern erzeugen und entdecken können. Es gibt viele Modelle, die versuchen die Diskrepanz zu erklären. Einige sind zum Beispiel Supersymmetrie (SUSY), Erweiterung des Higgs-Bereichs, Modelle mit weiteren Eichbosonen oder zusätzlichen Dimensionen, s. [1, §8].

Die vielversprechendste Theorie zur Erweiterung des Standardmodells ist die Supersymmetrie. SUSY erweitert das Standardmodell, indem es Fermionen und Bosonen verbindet. Jedes Teilchen P hat einen Superpartner \tilde{P} , der dieselbe Masse hat, aber dessen Spin um $\frac{1}{2}$ verändert ist. Jedes Fermion hat so einen bosonischen Superpartner, dieser wird mit einem „s“ vor dem Namen gekennzeichnet: Slepton, Squark, etc. Den fermionischen Superpartnern der Bosonen wird ein „ino“ angehängt, zum Beispiel Wino, Gluino oder Higgsino. Diese Superpartner wurden jedoch noch nicht in der Natur beobachtet. Damit SUSY die Wirklichkeit wiedergeben kann, muss sie in einer bestimmten Form gebrochen sein, sodass die Superpartner zu schwer sind, um bis jetzt in Beschleunigern erzeugt und detektiert worden zu sein. Man hofft, Anzeichen für SUSY-Teilchen am LHC (Large Hadron Collider) zu finden. Da dies in der bisherigen Laufzeit noch nicht der Fall war, können Squarks leichter als $1,5 \text{ TeV}$ und Gluinos leichter als 950 GeV schon ausgeschlossen werden, vgl. [20].

Das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) verdoppelt die Zahl der Teilchen und enthält ein zusätzliches Higgs-Dublett. Die führenden SUSY-Beiträge durch virtuelle Schleifen sind in Abb. 5.1 zu sehen. Die Diagramme ähneln den

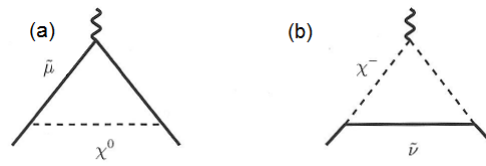


Abbildung 5.1: Führender SUSY-Beitrag zu a_μ , (a) Smyon-Neutralino und (b) Sneutrino-Chargino [1, S. 156]

1-Loop Diagrammen mit W- und Z-Bosonen. In Diagramm (a) ist eine Smyon-Neutralino-Schleife zu sehen. Das Smyon ist der Superpartner des Myons und ein Neutralino entsteht folgendermaßen: die Superpartner der neutralen Eichbosonen (neutrale Gauginos) und die fermionischen Partner der neutralen Higgs-Bosonen (neutrale Higgsinos) mischen und bilden Neutralinos, vgl. [21]. Diagramm (b) zeigt eine Sneutrino-Chargino-Schleife. Das Sneutrino ist der Superpartner des Neutrinos und Charginos entstehen durch Mischung der fermionischen Partner der geladenen Eichbosonen und der geladenen Higgs-Bosonen, vgl. [21].

Eine genauere Erklärung, wie Supersymmetrie und andere Theorien a_μ ändern könnten, wird zum Beispiel in [1, §8] gegeben.

6 Zusammenfassung

Zu Beginn dieser Arbeit wurde zunächst ein allgemeiner Überblick über das anomale magnetische Moment des Myons gegeben. Es wurden die Grundlagen erklärt, die nötig sind, um a_μ experimentell und theoretisch zu bestimmen. Die schwache Wechselwirkung wurde allgemein erklärt, da diese im vierten Kapitel eine Rolle spielt. Weil diese paritätsverletzend ist, tauchen in der Lagrange-Dichte Terme auf, die die Paritätsverletzung erlauben. Diese Terme sind auch in den Feynman-Regeln zu Diagrammen mit schwachen Wechselwirkungen zu finden.

Es wurden in Kapitel 3 die verschiedenen Beiträge genannt, die bei der theoretischen Bestimmung des anomalen magnetischen Moments des Myons auftauchen. Man unterscheidet im wesentlichen Beiträge der QED, hadronische und elektroschwache Beiträge. In der QED kann a_μ störungstheoretisch in Potenzen von $\frac{\alpha}{\pi}$ entwickelt werden. Der führende Term in der QED (1. Ordnung), der erstmals von J. Schwinger bestimmt wurde, konnte berechnet werden. Insgesamt sind die Beiträge der QED bis zur fünften Ordnung bekannt.

Hadronische Beiträge unterteilen sich in hadronische Vakuumpolarisation (VP) und hadronisches „Light-by-Light scattering“ (LbL). Diese Beiträge sind theoretisch schwer zu bestimmen und führen zu der größten Unsicherheit in der Vorhersage von a_μ .

Zuletzt gibt es noch die elektroschwachen Beiträge, wo W-, Z- und Higgs-Teilchen erstmals auftreten. Der Beitrag erster Ordnung setzt sich aus drei Diagrammen zusammen, die im darauf folgenden Kapitel berechnet wurden. Der Beitrag zweiter Ordnung ist der letzte der elektroschwachen Beiträge, der bekannt ist. Höhere Ordnungen liefern nur noch sehr kleine Beiträge.

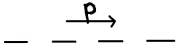
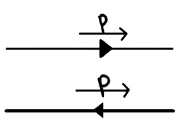
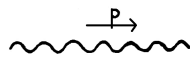
Das Prinzip zur Berechnung eines 1-Loop Diagramms, das in der Schwinger-Rechnung deutlich wurde, konnte auch auf andere Diagramme übertragen werden. Damit wurde der elektroschwache Beitrag erster Ordnung in Kapitel 4 berechnet. Der Beitrag des Z-Bosons konnte bestätigt werden. Der Higgs-Beitrag hat in dieser Rechnung einen weiteren Faktor, der in der Literatur [2] nicht auftaucht. Das macht jedoch keinen großen Unterschied, da der Wert zu klein ist, um relevant zu sein. Der Beitrag des W-Bosons konnte zwar berechnet werden, jedoch muss in der Rechnung ein Fehler gemacht worden sein, da das Ergebnis vom Literaturwert abweicht. Dies führt auch dazu, dass der gesamte berechnete 1-Loop Beitrag um 40% vom erwarteten Wert abweicht. Ohne den falschen Faktor im Ergebnis des W-Beitrags hätte der 1-Loop Beitrag der elektroschwachen Wechselwirkung reproduziert werden können.

Zum Schluss wurde der experimentell gemessene mit dem theoretisch vorhergesagten Wert verglichen. Dabei ist eine Diskrepanz von 3,2 Standardabweichungen festzustellen. Diese Abweichung kann mit bestehender Physik bisher nicht erklärt werden. Deshalb gibt es viele Theorien, welche neue Physik enthalten, die versuchen diesen Unterschied zu erklären. Am Beispiel der Supersymmetrie ist kurz dargestellt, was es für neue Teilchen geben könnte und wie sie a_μ beeinflussen würden.

A Feynman-Regeln

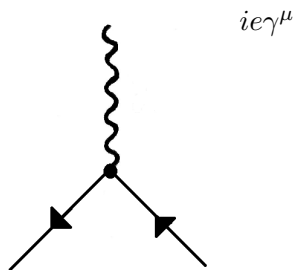
In den Rechnungen verwendete Feynman-Regeln für die QED und schwache Wechselwirkungen in Feynman-Eichung, vgl. [3, 11, 22].

A.1 Externe Linien

Spin 0:	(nichts)	
Spin $\frac{1}{2}$:	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{einlaufendes Teilchen:} & u \\ \text{einlaufendes Antiteilchen:} & \bar{v} \\ \text{auslaufendes Teilchen:} & \bar{u} \\ \text{auslaufendes Antiteilchen:} & v \end{array} \right.$	
Spin 1:	$\left\{ \begin{array}{ll} \text{einlaufend:} & \varepsilon(p) \\ \text{auslaufend:} & \varepsilon^*(p) \end{array} \right.$	

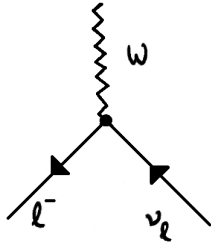
A.2 Vertexfaktoren

QED:



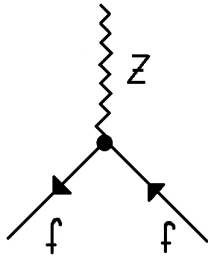
Schwache Wechselwirkung:

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5),$$



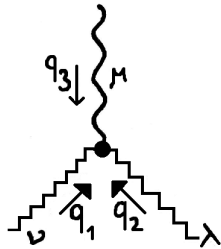
(Im Bild steht l für ein Lepton, ν_l für das entsprechende Neutrino)

$$\frac{-ig_z}{2} \gamma^\mu (c_V^f - c_A^f \gamma^5),$$



Hier steht f für ein Fermion; c_V und c_A sind in der folgenden Tabelle gegeben:

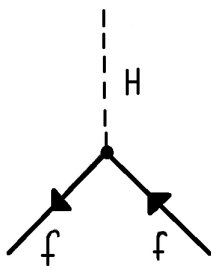
f	c_V	c_A
ν_e, ν_μ, ν_τ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
e^-, μ^-, τ^-	$-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$
u, c, t	$\frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	$\frac{1}{2}$
d, s, b	$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W$	$-\frac{1}{2}$



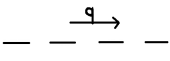
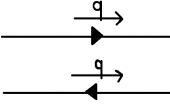
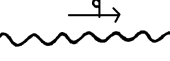
$$ie \left[\eta_{\nu\lambda} (q_1 - q_2)_\mu + \eta_{\lambda\mu} (q_2 - q_3)_\nu + \eta_{\mu\nu} (q_3 - q_1)_\lambda \right]$$

Higgs-Boson:

$$-\frac{im_f}{v}, \quad v = (\sqrt{2}G_F)^{-1/2}$$



A.3 Propagatoren

Spin 0:	$\frac{i}{q^2 - m^2}$	
Spin 1/2:	$\frac{i(\not{q} + m)}{q^2 - m^2}$	
Spin 1:	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Masselos: } \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \\ \text{Massiv: } \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{q^2 - M^2} \end{array} \right.$	

A.4 Weitere Regeln

- *Energie-Impuls-Erhaltung:* An jedem Vertex muss der Viererimpuls erhalten sein.
- *Integration über die Viererimpulse der internen Linien:* Man integriert nach jedem Impuls q , der im vorigen Schritt nicht bestimmt wurde, mit dem Integrationsmaß $\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$.
- *Antisymmetrisierung (1):* Für jede geschlossene Fermion-Schleife wird mit (-1) multipliziert. Dazu muss die Spur des entsprechenden Produkts von Gamma-Matrizen gebildet werden.
- *Gesamtphase:* Zum Schluss wird mit einem Faktor i multipliziert, was die Teilamplitude \mathcal{M} liefert.
- *Antisymmetrisierung (2):* Zwei Diagramme, die sich nur durch Austausch von zwei externen Fermion-Linien unterscheiden, sollen subtrahiert werden.

B Benötigte Formeln

B.1 Gamma-Relationen

In 4 Dimensionen [6, A.3]:

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4, \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu = -2\gamma^\rho, \quad (\text{B.2})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\rho}, \quad (\text{B.3})$$

$$\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta \gamma_\mu = -2\gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\alpha. \quad (\text{B.4})$$

γ^5 [11, C.2]:

$$\gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.5})$$

$$\gamma_5 \gamma^5 = \mathbb{I}, \quad (\text{B.6})$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (\text{B.7})$$

$$\Rightarrow \gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu. \quad (\text{B.8})$$

B.2 Feynman-Parametrisierung

Allgemein [6, §6.3]:

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{\prod x_i^{m_i-1} \Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{[x_i A_i]^{\sum m_i} \Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)}. \quad (\text{B.9})$$

Hier [6, § 6.3]:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n]^n}. \quad (\text{B.10})$$

B.3 „Diracologie“

Aus der Dirac-Gleichung (2.20) und mit $\{\gamma^\rho, \gamma^i\} = 2\eta^{\rho i}$, $[\gamma^\rho, \gamma^i] = \frac{2}{i}\sigma^{\rho i}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \gamma^\rho m = \gamma^\rho \not{p}_1 &= p_{1i} \cdot \frac{1}{2} (\{\gamma^\rho, \gamma^i\} + [\gamma^\rho, \gamma^i]) \\ &= p_{1i} \cdot \frac{1}{2} (2\eta^{\rho i} - 2i\sigma^{\rho i}) \\ &= p_1^\rho - i\sigma^{\rho i} \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\Rightarrow p_1^\rho = \gamma^\rho m + i\sigma^{\rho i} p_{1i}. \quad (\text{B.12})$$

Und:

$$\begin{aligned}
 \not{p}_1 \gamma^\rho &= p_{1i} \cdot \frac{1}{2} (\{\gamma^i, \gamma^\rho\} + [\gamma^i, \gamma^\rho]) \\
 &= p_1^\rho + \frac{1}{2} \not{p}_1 \gamma^\rho - \frac{1}{2} \gamma^\rho \not{p}_1 \\
 &= 2i\sigma^{\rho i} p_{1i} + \gamma^\rho m .
 \end{aligned} \tag{B.13}$$

Vernachlässigt man nun die Terme proportional zu γ^ρ , kann man in den Rechnungen folgende Ersetzungen machen:

$$p_1^\rho \rightarrow i\sigma^{\rho i} p_{1i} , \tag{B.14}$$

$$\not{p}_1 \gamma^\rho = 2p_1^\rho \rightarrow 2i\sigma^{\rho i} p_{1i} , \tag{B.15}$$

$$\gamma^\rho \not{p}_1 \rightarrow 0 . \tag{B.16}$$

Analog erhält man die Ersetzungen für die Terme mit p_2 :

$$p_2^\rho \rightarrow -i\sigma^{\rho i} p_{2i} , \tag{B.17}$$

$$\gamma^\rho \not{p}_2 = 2p_2^\rho \rightarrow -2i\sigma^{\rho i} p_{2i} , \tag{B.18}$$

$$\not{p}_2 \gamma^\rho \rightarrow 0 . \tag{B.19}$$

B.4 Wick-Rotation

Die Wick-Rotation dient dem Zweck, die Impulsintegration vom Minkowski-Raum in den euklidischen Raum gleicher Dimension zu überführen. Man transformiert die Null-Komponente des Impulses $k^0 \rightarrow ik_E^0$. Daraus folgt $k^2 \rightarrow -k_E^2$ und $d^4k \rightarrow id^4k_E$, vgl. [7, B.3].

B.5 1-Schleifen Tadpole Integral

Die Lösung für das folgende d -dimensionale Integral im Minkowski-Raum ist

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} = \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{i}{(-1)^n [k_E + \Delta]^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{d}{2}} , \tag{B.20}$$

vgl. [6, A.4].

C Werte

W-Boson:	$m_W = 80,385 \pm 0,015 \text{ GeV}$
Z-Boson:	$m_Z = 91,1876 \pm 0,0021 \text{ GeV}$
Higgs-Boson:	$m_H = 125,9 \pm 0,4 \text{ GeV}$
Myon:	$m_\mu = 105,6583715 \text{ MeV}$
Fermi-Kopplungskonstante:	$G_F = 1,1663787(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$
Feinstrukturkonstante	$\alpha = 1/137,035999074$
schwacher Mischungswinkel:	$\sin^2 \theta_W = 0,23116(12) ,$
aus [13].	

Literatur

- [1] K. Melnikov, A. Vainshtein, *Theory of the Muon Anomalous Magnetic Moment* (2006)
- [2] F. Jegerlehner, A. Nyffeler, Phys. Rep. **477** (2009) 1-110
- [3] N. Borghini, Vorlesungsskript: *Grundlagen der Elementarteilchenphysik*, Universität Bielefeld, WS 12/13, <http://www.physik.uni-bielefeld.de/~borghini/Teaching/Teilchenphysik/Teilchen.pdf>
- [4] J. Bailey, et al., [CERN-Mainz-Daresbury Collaboration], Nuclear Phys. B **150** (1979) 1,
- [5] G. W. Bennett, et al., [Muon $g - 2$ Collaboration], Phys. Rev. Lett. **92** (2004) 161802, [arXiv:hep-ex/0401008]
- [6] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (1995)
- [7] G. Köpp, F. Krüger, *Einführung in die Quantenelektrodynamik* (1997)
- [8] K. R. Lynch, in *Lepton Dipole Moments*, ed. B. L. Roberts, W. J. Marciano, Advanced Series on Directions in High Energy Physics, Vol. 20 (2010), S. 319-332, [hep-ph/0108081]
- [9] O. Nachtmann, *Elementarteilchenphysik - Phänomene und Konzepte* (1986)
- [10] V. W. Hughes, C. S. Wu (ed.), *Muon Physics II - Weak Interactions* (1975)
- [11] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, 2nd Edition (2008)
- [12] F. Halzen, A. D. Martin, *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (1984)
- [13] J. Beringer et al. (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012)
- [14] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, M. Nio, Phys. Rev. Lett. **109** (2012) 111808, [arXiv:1205.5370 [hep-ph]]
- [15] J. S. Schwinger, Phys. Rev. **76** (1949) 760
- [16] A. Petermann, Helv. Phys. Acta **30** (1957) 407
- [17] C. M. Sommerfield, Phys. Rev. **107** (1957) 328
- [18] S. Laporta, E. Remiddi, Phys. Lett. B **379** (1996) 283
- [19] C. Gnendiger, D. Stöckinger, H. Stöckinger-Kim, arXiv:1306.5546 [hep-ph] (2013)
- [20] S. Iwamoto, arXiv:1304.5171 [hep-ph] (2013)
- [21] S. K. Vempati, arXiv:1201.0334 [hep-ph] (2012)
- [22] E. A. Paschos, *Elektroweak Theory* (2007))

Danksagung

Ich bedanke mich bei meinem Betreuer Prof. Dr. York Schröder, der immer zu erreichen war und sofort geholfen hat, wenn Fragen und Probleme auftauchten.

Auch möchte ich mich bei Mandy und Ayse bedanken, die das gesamte Studium zu einer unvergesslichen Zeit gemacht haben. Dank Euch hatte ich immer Freude und wir haben immer viel gelacht, egal wie viel wir auch lernen mussten.

Zum Schluss geht ein großer Dank an meine Familie und meinen Freund, die immer für mich da waren, sich meine Probleme angehört haben und mich auch allgemein sehr unterstützt haben.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, dass alle Stellen der Arbeit, die wörtlich oder sinngemäß aus anderen Quellen übernommen wurden, als solche kenntlich gemacht sind und dass die Arbeit in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegt wurde.

Bielefeld, den 28. August 2013