8.2 Lineare Gleichungssysteme

in der Physik oft: eine Grösse hängt linear (d.h. $\propto^1$) von einer anderen ab

→ falls Abhängigkeit komplizierter: vielleicht reicht in einem gewissen Bereich eine lineare Näherung aus? (vgl. Potenzreihe)

allg.: wenn m Grössen $y_1, y_2, \dots, y_m$ von n Grössen $x_1, x_2, \dots, x_n$ linear abhängen, ist ein lineares Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + \dots + A_{1n} x_n \\ y_2 &= A_{21} x_1 + A_{22} x_2 + \dots + A_{2n} x_n \\ &\vdots \\ y_m &= A_{m1} x_1 + A_{m2} x_2 + \dots + A_{mn} x_n \end{aligned}$$

; A_{jk} = Konstanten, z.B. $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$

bzw.: $$y_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k$$

oder, die Konstanten A_{jk} als $m \times n$-Matrix aufgefasst, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$

$\vec{y} = A\vec{x}$; $\vec{y}$ hängt linear von $\vec{x}$ ab.

Bsp $m = n = 2$, $\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ y_2 &= 4x_1 + 5x_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = A\vec{x}$

→ fassen wir $\vec{y}$ auch als Konstante auf, stellt sich die Frage nach der Lösbarkeit des Gleichungssystems: $\vec{x} = ?$

Bezeichnung: $A\vec{x} = \vec{0}$ heisst homogenes lineares Gleichungssystem

$A\vec{x} = \vec{b}$ — " — inhomogenes — " —

((wobei $A = \overset{\text{Zeilen}}{m} \times \overset{\text{Spalten}}{n}$-Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}^m$)) allg.: $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$

falls $m = n$, also A quadratische Matrix, heisst das System quadratisch

→ was sind die grundlegenden Eigenschaften der Lösungsmengen?

- homogenes lineares Gleichungssystem: $A\vec{x} = \vec{o}$

→ klar: falls $A\vec{x} = \vec{o}$ und $A\vec{y} = \vec{o}$,
dann auch $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = \vec{o}$ mit beliebigem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$

⇒ Lösungsmenge ("allgemeine Lösung") ist daher ein Vektorraum

↳ Bsp: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$: Lösungsmenge ist ein Punkt (= Ursprung $\vec{o}$)
oder eine Gerade (durch $\vec{o}$)
oder der ganze $\mathbb{R}^2$

↳ Bsp. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 3$: " ist $\vec{o}$
oder Gerade durch $\vec{o}$
oder Ebene durch $\vec{o}$
oder der ganze $\mathbb{R}^3$

((als VR besitzt die Lsgs-Menge immer eine wohldef. Dimension))

→ für ein quadratisches System gilt: ((ausrechnen: s. unten))
Ist A invertierbar (d.h. $\exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A = \mathbb{1}$, vgl. Kap. 8.1, S. 77),
dann: $A\vec{x} = \vec{o} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = \mathbb{1}\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{o} = \vec{o}$

⇒ $\vec{x} = \vec{o}$ ist die eindeutige Lsg

- inhomogenes lineares Gleichungssystem: $A\vec{x} = \vec{b}$

→ entweder gibt es keine Lösung (d.h. Lösungsmenge ist leer, $\emptyset$),
oder die allgemeine Lsg ist

$$\vec{x} = \vec{x}_{inh} + \vec{x}_{hom}$$

allg. Lsg. von $A\vec{x}_{hom} = \vec{o}$

eine spezielle Lsg. von $A\vec{x}_{inh} = \vec{b}$

((denn: $A(\vec{x}_{inh} + \vec{x}_{hom}) = A\vec{x}_{inh} + A\vec{x}_{hom} = A\vec{x}_{inh} + \vec{o} = \vec{b}$ ✓))

→ für quadratische Systeme mit invertierbarem A gibt es wieder die eindeutige Lsg $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Def der **Rang** einer $m \times n$-Matrix A ist

die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren
bzw. die " Spaltenvektoren } gleiche Zahl!

→ also ist $0 \leq \text{Rang}(A) \leq \text{Min}(m,n)$

Bsp $\text{Rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 1$, denn $3 \cdot (1,2) + (-1) \cdot (3,6) = (0,0)$
bzw. $2 \cdot \binom{1}{3} + (-1) \cdot \binom{2}{6} = \binom{0}{0}$

((s. auch Ü73))

$\Rightarrow \underset{m \times n}{A}\, \underset{n}{\vec{x}} = \underset{m}{\vec{b}}$ ist eindeutig lösbar, falls $\text{Rang}(A) = n$

" hat mindestens eine Lsg, falls $\text{Rang}(A) = m$

→ Lösungsmethode in der Praxis?

Gauss'sches Eliminationsverfahren ← ((sehr geeignet für z.B. Computer-Algorithmen))
ist ein "Rezept". hier: Bsp ansehen

Bsp Bestimme die Lsn des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 16 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= -2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 14 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 2x_4 - x_5 &= -5 \end{aligned}$$

1. Schritt Reihenfolge der Gln. egal
⇒ wähle als erste Glg. eine mit x_1-Term
→ wähle schematische Darst.

$$\begin{array}{c} \\ \text{"}A\text{"} \end{array} \begin{array}{ccccc|c} \text{"}x_1\text{"} & \text{"}x_2\text{"} & \dots & & & \text{"}\vec{b}\text{"} \\ -3 & -3 & 3 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ |\cdot(-\tfrac{1}{3}) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

2. Schritt Normierung der Kopfzeile
(darf jede Zeile mit bel. Faktor multiplizieren, ohne Lsg. zu ändern)

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ |-4\cdot\text{Zeile}_1 \end{array}$$

3. Schritt Elimination von x_1 aus allen Gln. bis auf die erste
(darf Gln voneinander abziehen, ohne Lsg zu ändern)

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{11}{3} & -\tfrac{23}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ |\cdot\tfrac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array}$$

$\rightarrow$ ab jetzt bleiben $\left\{\begin{matrix}\text{1. Zeile}\\ \text{1. Spalte}\end{matrix}\right\}$ unverändert; nicht mehr hinschreiben

<u>4. Schritt</u> Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mid -2\cdot\text{Zeile}, \\ \mid +5\cdot\text{Zeile}, \end{array}$$

<u>5. Schritt</u> Elimination von x_2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mid \cdot\frac{2}{3} \\ \\ \end{array}$$

$\rightarrow$ x_3-Koeff zufällig auch 0; betrachte wieder nur Restsystem $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{pmatrix}$

<u>6. Schritt</u> Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \\ \mid -\frac{37}{12}\cdot\text{Zeile}, \end{array}$$

<u>7. Schritt</u> Elimination von x_4

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>8. Schritt</u> Ergebnis zusammenfassen "Zeilenstufenform"

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ 3 Gln. für 5 Variablen $(x_1, \dots, x_5)$

kann zwei Variablen frei wählen: nehme x_3, x_5

Gln jetzt "von unten" lösbar:

3. Zeile $\Rightarrow$ $x_4 = 4 + 2x_5$

x_4-Lsg eingesetzt

2. Zeile $\Rightarrow$ $x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{4}(4+2x_5) - x_3 = 1 - x_3 - x_5$

1. Zeile $\Rightarrow$ $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}(4+2x_5) + x_3 - (1 - x_3 - x_5) = 1 + 2x_3 + x_5$

$\Rightarrow$ allg. Lsg. ist $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\4\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$ "2D Ebene im 5D Raum"

<u>Berechnung der inversen Matrix</u> (gilt genauso: nur "$\vec{b}$" $\rightarrow \mathbb{1}$)

<u>Bsp</u> Inverse von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$?

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -38 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -38 & 11 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$