Folgerungen aus den Kreuzprodukt-Eigenschaften:

- $\vec{a}\times\vec{a} \overset{(a)}{=} -\vec{a}\times\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}}$

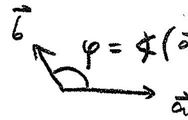
- $$\left.\begin{aligned} \vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) &\overset{(f)}{=} \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{a}) = 0 \\ \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) &\overset{(f)}{=} \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{b}) = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$ $\vec{a}\times\vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.

→ aha, etwas über Richtung von $\vec{a}\times\vec{b}$ gelernt.

→ Betrag?

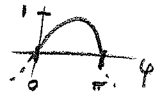
- $$(\vec{a}\times\vec{b})^2 = \underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\vec{c}}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) \overset{(f)}{=} \vec{a}\cdot\big(\vec{b}\times\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})}_{\vec{c}}\big) \overset{(d)}{=} \vec{a}\cdot\big(\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{b})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{b})\big)$$

$$= (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\underbrace{\vec{a}\cdot\vec{b}}_{=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\varphi)})^2$$



$\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) \in [0,\pi]$

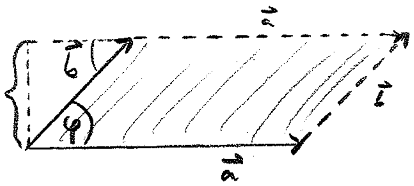
$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\,(\underbrace{1-\cos^2(\varphi)}_{=\sin^2(\varphi)}) \quad , \sin(\varphi)\in[0,1]$$



→ alles positiv; kann Wurzel ziehen

$$\underline{|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\varphi)} = a\,b\,\sin(\varphi)$$

⇝ geometrisch-anschaulich: $|\vec{b}|\sin(\varphi)$



⇒ $|\vec{a}\times\vec{b}| \,\hat{=}\,$ Fläche des von $\vec{a},\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes

- anschaulich deshalb sofort klar:

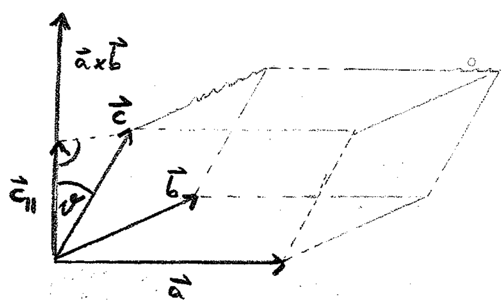
  $\underline{\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}} \;\Leftrightarrow\;$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel ($\vec{a}\parallel\vec{b}$)

  (d.h. $\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b}$), oder $\vec{a}=\vec{0}$ oder $\vec{b}=\vec{0}$

- auch: $\underline{|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| = ab} \;\Leftrightarrow\;$ $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal ($\vec{a}\perp\vec{b}$)

  ((denn dann $\sin(\varphi)=\sin(\frac{\pi}{2})=1$))

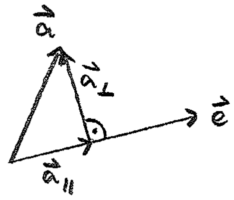
- $$|\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})| = \big|\,|\vec{c}|\,|\vec{a}\times\vec{b}|\,\cos(\vartheta)\big| = \underbrace{|\vec{c}_{\parallel}|}_{\text{Höhe}}\;\underbrace{|\vec{a}\times\vec{b}|}_{\text{Grundfläche}}$$



= Volumen des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds

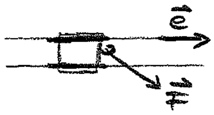
((heißt auch "Spatprodukt")) (bzw. Spats)

→ Zerlegung eines Vektors $\vec a = \vec a_\perp + \vec a_\parallel$
in Bezug auf (z.B.) einen Einheitsvektor $\vec e$
ist oft nützlich ($\vec a \in \mathbb{R}^3$):



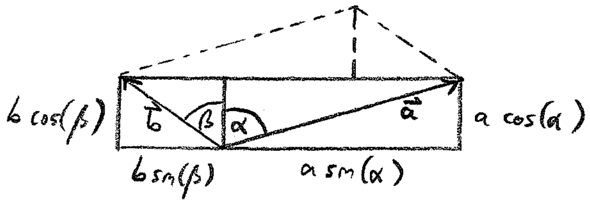
$\Rightarrow \vec a_\parallel = (\vec a\cdot\vec e)\,\vec e$

$\vec a_\perp = \vec a - \vec a_\parallel = \vec a\,(\vec e\cdot\vec e) - \vec e\,(\vec e\cdot\vec a) \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec e\times(\vec a\times\vec e)$

Bsp  ziehe Schlitten (Kufen in Richtung $\vec e := \frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)$)
mit Kraft $\vec F = (3,2,1)\,N$

$\Rightarrow$ nur $\vec F_\parallel = (\vec F\cdot\vec e)\,\vec e = \frac{1}{\sqrt2}(3\cdot1+2\cdot1+1\cdot0)N\,\vec e = (\frac54,\frac54,0)\,N$
sorgt für Beschleunigung (($|\vec F| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$
$|\vec F_\parallel| = \sqrt{\frac{25}{16}+\frac{25}{16}+0} = \frac54\sqrt2 \approx 1{,}77$))

→ Trigonometrie? Sinussatz, Cosinussatz etc. (s.S.67)
sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung, z.B.:



Fläche großes Rechteck $\overset{\text{Fläche Parallelogramm}}{=} |\vec a\times\vec b| = a b \sin(\alpha+\beta)$
$=$ linkes + rechtes kleines Rechteck
$= b\sin(\beta)\,a\cos(\alpha) + a\sin(\alpha)\,b\cos(\beta)$

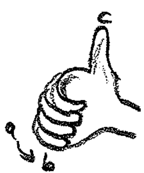
(teile durch a·b) $\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

→ seien $\vec a,\vec b\in\mathbb{R}^3$, $\vec c := \vec a\times\vec b$
wissen (s.o.) Länge von $\vec c$: $|\vec c| = |\vec a|\,|\vec b|\,\sin(\sphericalangle(\vec a,\vec b))$
und Richtung von $\vec c$: $\vec c\perp\vec a$ und $\vec c\perp\vec b$
aber was ist die Orientierung?

2 Möglichkeiten:  oder 

$\vec a,\vec b,\vec c$ bilden "Rechtssystem" oder "Linkssystem"?

→ Test: wähle $\vec a=\vec e_1$, $\vec b=\vec e_2$
$\Rightarrow \vec c = \vec e_1\times\vec e_2 = (1,0,0)\times(0,1,0) = (0-0,\,0-0,\,1-0) = \vec e_3$

$\Rightarrow \vec a,\vec b,\vec a\times\vec b$ bilden Rechtssystem  bzw 
rechte-Hand-Regel

7.4 Felder

bisher: Funktionen $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

"Feld" $:=$ etwas$(x_1, x_2, x_3, \dots) \overset{\text{z.B.}}{=}$ etwas$(\vec{r}, t)$

Physik-Bsp: Temperatur $T(\vec{r},t) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ "Skalarfeld"

Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r},t) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ "Vektorfeld"

Def Ein Skalarfeld ist Abb. $f: A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bsp $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) := e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3$

((z.B. könnte $f(\vec{x})$ die Temperatur des Raumpunktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sein))

→ wählt man $x_2, x_3, \dots, x_n$ beliebig aber fest, wird $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine "ganz normale Funktion" von x_1; insbesondere heisst dann

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} := \lim_{x \to x_1} \frac{f(x, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x - x_1}$$

die partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach x_1

((d.h. das ∂ statt d heisst: $x_2 \dots x_n$ beim x_1-Ableiten festhalten))

⇒ können also alle "normalen" Ableitungsregeln (vgl. Kap.) sofort übertragen (indem wir $x_2, \dots, x_n$ einfach "vergessen"):

Bsp (wie oben) $f(\vec{x}) = e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \overset{x_2, x_3 \text{ konstant}}{=} -e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3$$

höhere Ableitungen wie gewohnt: $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} = +e^{-x_1} + 6x_1 x_2^2 x_3$

$$\frac{\partial^3 f(\vec{x})}{\partial x_1^3} = -e^{-x_1} + 6x_2^2 x_3$$

analog für x_2, x_3: $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 2x_1^3 x_2 x_3$; $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_3^2} = 0$

Schreibweisen: $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \;\hat{=}\; \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}) \;\hat{=}\; \partial_{x_k} f(\vec{x}) \;\hat{=}\; \partial_k f(\vec{x}) \;\hat{=}\; \dots$

gemischte Ableitungen: (gleiches Bsp wie oben) ((s. auch Ü65))

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[2x_1^3 x_2 x_3\right] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[-e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3\right] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

→ allgemein gilt der Satz von Schwarz: (o.B.)

Für $f: A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ gilt $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k \partial x_j}$

für beliebige $j,k \in \{1,2,\dots,n\}$, falls beide Ableitungen bei $\vec{x} \in A$ stetig.

Def ein Vektorfeld ist Abb. $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ $(n,m \in \mathbb{N})$

mit $\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$

→ jede Komponente ist ein Skalarfeld, können also wie gewohnt rechnen!

Bsp $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) := (\sin(x_1) + x_2 x_3, e^{-x_3}, x_2^3)$

((z.B. könnte $\vec{f}(\vec{x})$ eine Strömungsgeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$ sein))

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_1} = (\cos(x_1), 0, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_2} = (x_3, 0, 3x_2^2)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_3 \partial x_2} = (1, 0, 0)$$

Bsp $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{r}(t) := \left(\frac{1}{1+t^2}, e^{-t^2}, \cosh(2t)\right)$

((z.B. könnte $\vec{r}(t)$ der Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt t sein))

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, -2t e^{-t^2}, 2\sinh(2t)\right)$$

((z.B. Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t))