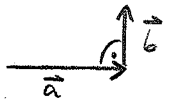
7.2 Skalarprodukt

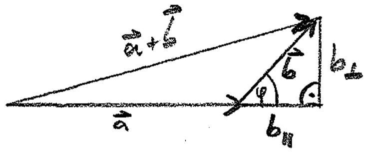
(wieder erst Nützlichkeit entdecken, anschaulich in $\mathbb{R}^n$; dann mathematisch-axiomatische Verallgemeinerung)

Motivation



$\Rightarrow |\vec a+\vec b|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)

$\Rightarrow |\vec a+\vec b|^2 - a^2 - b^2 = 2\cdot \text{Rest} =: 2(\vec a\cdot\vec b)$



können $\vec b$ zusammensetzen:

$\vec b = \vec b_\perp + \vec b_\parallel$ (parallel zu $\vec a$; „Projektion von $\vec b$ auf $\vec a$")

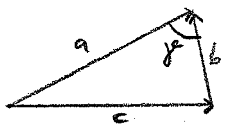
$\Rightarrow$ also $\vec a\cdot\vec b = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a+b_\parallel)^2 + b_\perp^2}_{\text{Pythagoras}} - a^2 - b_\perp^2 - b_\parallel^2\Big] = a\,b_\parallel$

Def $\vec a\cdot\vec b := a b_\parallel = a_\parallel b = ab\cos(\varphi)$ heisst Skalarprodukt von $\vec a$ mit $\vec b$

↑ definiert Cosinus; vgl. Kap. 6.4

↑ Gleichberechtigung: $\vec a\cdot\vec b = \vec b\cdot\vec a$

Bem: •



„Cosinus-Satz" $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$

folgt aus Vektorrechnung: $= (\vec a-\vec b)^2 = a^2+b^2-2\vec a\cdot\vec b$

• Winkel dimensionslos messen! (vgl. Kap. 6.4)

$\varphi = s/R = \text{Länge}/\text{Länge}$;

rechter Winkel $= \frac{\pi}{2}$ (nachmessen: , $s/R \approx 3{,}14159\ldots =: \pi$)

Eigenschaften des Skalarprodukts: (alle anschaulich klar)

$\vec a^2 := \vec a\cdot\vec a = a^2$; $|\vec a| = a = \sqrt{\vec a^2}$

$\vec a\perp\vec b \Leftrightarrow \vec a\cdot\vec b = 0$; $\vec a\parallel\vec b \Leftrightarrow \vec a\cdot\vec b = ab$

$|\vec a+\vec b| \le a+b$; $|\vec a\cdot\vec b| \le ab$ (Schwarz'sche Ungleichung)

$(\lambda\vec a)\cdot\vec b = \lambda(\vec a\cdot\vec b) = \vec a\cdot(\lambda\vec b)$

$\vec a\cdot(\vec b+\vec c) = \vec a\cdot\vec b + \vec a\cdot\vec c$

$r_{12} = r_{21} = |\vec r_1 - \vec r_2| = \sqrt{(\vec r_1-\vec r_2)^2} = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2\vec r_1\cdot\vec r_2}$

Bem.: • Schreibweise oft $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b}$

• brauche oft Klammern: $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$!

• nie durch einen Vektor teilen, "$\cancel{\frac{1}{\vec{a}}}$" nicht def.

• in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl; $\overrightarrow{\text{Vektor}} = \overrightarrow{\text{Vektor}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ in Komponentenschreibweise:

mit kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1,0,0), \dots$ als Basis:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$$
$$= a_1b_1\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a_2b_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + a_3b_1\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1$$
$$+ a_1b_2\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + a_2b_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a_3b_2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2$$
$$+ a_1b_3\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + a_2b_3\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + a_3b_3\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3$$
$$= \underline{\underline{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}}$$

Verallgemeinerung: mathematisch abstrahiert lautet diese Struktur

Def Skalarprodukt (oder inneres Produkt) ist Abbildung $\bullet : V\times V \to \mathbb{R}$, $(\vec{v},\vec{w}) \mapsto \vec{v}\cdot\vec{w}$

mit den Eigenschaften ("Skalarprodukt-Axiome")

(1) $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$ — Symmetrie

(2) $\vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$; $\vec{v}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ — Positivität

(3) $(x\vec{v})\cdot\vec{w} = x(\vec{v}\cdot\vec{w})$

(4) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

(3), (4): Linearität

Bem.: • ein Vektorraum mit einem so def. Skalarprodukt heisst "Prä-Hilbertraum"

• unsere anschauliche Def war Spezialfall $V = \mathbb{R}^3$

$\rightarrow$ kann für $V = \mathbb{R}^n$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n$ nehmen (s. Ü 60)

• ganz andere Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ möglich

(in QM z.B. $\vec{v}\cdot\vec{w} \leftrightarrow \langle v|w\rangle \mathrel{\hat{=}} \int dx\, v^*(x)\cdot w(x)$)

Def Die <u>Norm</u> (oder <u>Länge</u>, oder <u>(Absolut-)Betrag</u>) eines Vektors $\vec{v} \in V$ ist $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Bem:
- Schreibweisen (vgl. oben) $|\vec{v}| = v = \|\vec{v}\|$, $\vec{v}^2 = \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2 = v^2$
- aus den Skalarprodukt-Axiomen (1)-(4) folgen die Eigenschaften des Betrags, so wie auf S.67 unten, die "Norm-Eigenschaften":

"Norm-Axiome"
(a) $|\vec{v}| \geq 0$; $|\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
(b) $|x\vec{v}| = |x|\,|\vec{v}|$
(c) $|\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$ Dreiecksungl.

folgen
(d) $|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq |\vec{v}|\,|\vec{w}|$ Schwarz'sche Ungl.
(e) $|\vec{v}-\vec{w}| \geq \big|\,|\vec{v}| - |\vec{w}|\,\big|$ Abstand zw. $\vec{v}, \vec{w}$

- für $V = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ist Norm anschauliche geometrische Länge des Vektorpfeils
- für $V = \mathbb{R}^{n \geq 4}$ keine geom. Veranschaulichung mehr möglich
- für $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist $\vec{e}_v := \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ <u>Einheitsvektor</u> in Richtung von $\vec{v}$
- falls $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ (und $\vec{v} \neq \vec{0}, \vec{w} \neq \vec{0}$) sagt man, die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ stehen zueinander <u>orthogonal</u> (oder <u>senkrecht</u>; <u>rechtwinklig</u>)
- für $V = \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = (0..0\underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1}0..0) \cdot (0..0\underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-te Stelle}}}{1}0..0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

d.h. die kartesischen Basisvektoren sind alle normiert und orthogonal zueinander $\Rightarrow$ sog. <u>Orthonormalbasis</u>

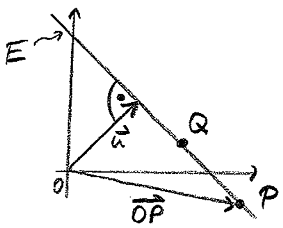
- der <u>Winkel</u> zwischen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ ist allg. (und eindeutig) def. durch

$$\cos(\varphi) := \underbrace{\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}}_{\in [-1,1]} \quad , \ \varphi \in [0, \pi]$$

$\rightarrow$ für $V = \mathbb{R}^n$ wieder geometrisch klar, s. oben.

Bsp $V=\mathbb{R}^n$; Glg für $\left.\begin{cases} \text{Gerade} & n=2 \\ \text{Ebene} & n=3 \\ \text{Hyperebene} & n\geq 4 \end{cases}\right\}_{\equiv E}$ durch

Punkt $P=(p_1|p_2|\dots|p_n)$, die senkrecht auf Vektor $\vec{u}$ steht?



$\Leftrightarrow$ Menge aller Punkte Q, für die $\underbrace{\vec{PQ}}_{=\vec{OQ}-\vec{OP}} \perp \vec{u}$

$\Leftrightarrow$ $E=\{\, Q \mid \vec{PQ}\cdot\vec{u}=0 \,\}$

$\Leftrightarrow$ $E=\{\, Q \mid \vec{OQ}\cdot\vec{u} = \vec{OP}\cdot\vec{u} \;(=\text{const.})\,\}$

7.3 Kreuzprodukt

oder auch: "Vektorprodukt", oder "äusseres Produkt"

Besonderheit des $\mathbb{R}^3$! (Verallg. auf $\mathbb{R}^n$ möglich, aber umständlich) $F_{\mu\nu}\dots$

((hier: erst Def, dann geometrische Veranschaulichung))

Def Kreuzprodukt heisst die Abbildung "$\times$": $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

mit $\left(\vec{v}=(v_1,v_2,v_3),\ \vec{w}=(w_1,w_2,w_3)\right) \mapsto \vec{v}\times\vec{w} := \begin{pmatrix} v_2w_3-v_3w_2, \\ v_3w_1-v_1w_3, \\ v_1w_2-v_2w_1 \end{pmatrix}$

Bem.: • andere Bezeichnungen: $[\vec{v},\vec{w}]$, $[\vec{v}\vec{w}]$, $\vec{v}\wedge\vec{w}$, ...

direkt aus Def. folgen die Eigenschaften: ((hier $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$; $\lambda\in\mathbb{R}$))

(a) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ — Antisymmetrie

(b) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ — Linearität

(c) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$ — Linearität

(d) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$ — "bac-cab", kommt häufig vor!

(e) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) + \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) + \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{0}$ — Jacobi-Identität (zyklische Vertauschung!)

(f) $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$ (sog. Spatprodukt)

Bem.: • Beweis: s. Ü63

• Vorsicht: im allg. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) \neq (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (nicht assoziativ!)