7. Vektoren und Felder

bisher: Funktionen von reellen Variablen

+ deren Eigenschaften, Rechenregeln, ...

komplexe Zahlen (→ Ebene $\mathbb{R}^2$)

jetzt: 3-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^3$, "Physik spielt sich hier ab"

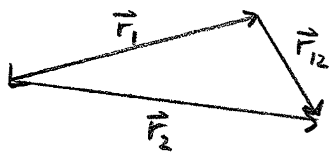
→ Beschreibung durch Richtungsangaben, Pfeile!

Bezugspunkt vereinbaren: Ursprung

Ortsvektor $\vec{r}$: Pfeil Ursprung → Physik

Verschiebungsvektor:

Pfeil Punkt → Punkt



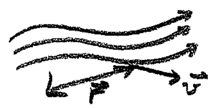
((Einheiten? Bsp: $\vec{v}$ in m/s? ↔ Übersetzungsregel (cm auf Papier ↔ m/s)))

Betrag: Länge des Pfeils, z.B. $|\vec{r}| = r$, $|\vec{v}| = v$, $|\vec{F}| = F$

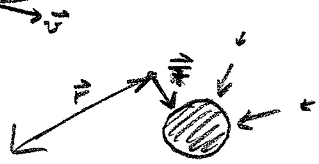
→ Pfeil hat Richtung, Betrag, Anfangspunkt

Bsp Ball hat bei $\vec{r}$ die Geschwindigkeit $\vec{v}$

Bsp Wasser-Strömung $\vec{v}(\vec{r})$



Bsp Erd-Gravitationsfeld $\vec{F}(\vec{r})$



⇒ anschauliche (Physiker-) Def:

Vektoren sind Pfeile bzgl. Betrag und Richtung, die mit einer Zahl zu multiplizieren und die zu addieren physikalisch sinnvoll ist.

Bem: • ≠ Mathematiker-Vektor (s. unten: bilden Vektor-Raum)

• Physik-Pfeil ist real (Verhalten bei Drehungen)

- 1. Def-Zeile: Vektor ≙ Gesamtheit der Pfeile mit ...
  → kann Repräsentanten wählen

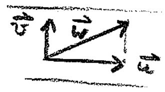
- 2. Def-Zeile: 1,7 · ↗ = ↗ ; (−1) · ↗ = ↙ etc anschaulich klar
  → Einheitsvektor $\frac{1}{a}\cdot\vec{a} = \vec{e}$, $|\vec{e}|=1$; $\vec{a} = a\vec{e}$

- 3. Def-Zeile: (vgl. Bild oben) $\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$
  funktioniert mit Vektoren gleicher Dimension (Übersetzungs-Regel)
  Reihenfolge egal: ↗ + ↘ = ⟷ = ↘ + ↗
  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

  → Nullvektor $\vec{0} := \vec{a} + (-\vec{a})$

- "physikalisch sinnvoll"? → (an Bsp verstehen):

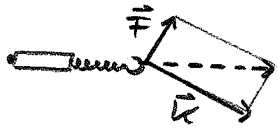
  Bsp Geschwindigkeiten: Mult. ✓ Add.? → Fluss:

  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ✓

  ⇒ Ja, sind Vektoren.

  Bsp Kräfte: → Federwaage

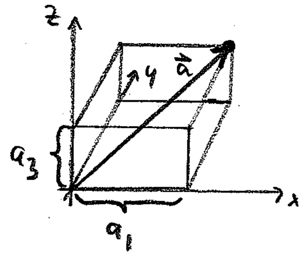
  

  ⇒ Ja, sind Vektoren.

  Bsp Drehungen: ((rechte-Hand-Regel: Daumen ≙ Drehachse, Finger ≙ Drehrichtung, Betrag ≙ Winkel))
  Test: ↑ + ← $\overset{?!}{\neq}$ ← + ↑
  ⇒ Nein, sind keine Vektoren

7.1 Komponentendarstellung, Eigenschaften, Vektorraum

→ bisher: Vektor ≙ Pfeil ; Addition ≙ aneinander basteln
Vereinfachung ?! Vektor $\vec{a}$ gegeben; wähle Repräsentant ab Ursprung.
messe Höhe der Spitze → a_3 , etc



Komponenten $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\left(\left(\text{oder } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}\right)\right)$

<u>Bem.:</u> • Systematik: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ ← ausnahmsweise

• alle Komponenten haben gleiche Dimension, $[a_1] = [a_2] = [a_3] = [a] = [\vec{a}]$

<u>Bsp</u> $[v_3] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = m/s$, $[y] = \text{Länge} = m$

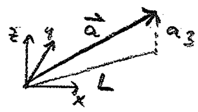
$\vec{v} = (1\,m/s, 0, 2\,m/s) = (1, 0, 2)\,m/s$

• hier meist $\mathbb{R}^3$; Verallg. auf $\mathbb{R}^n$ einfach: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

→ die oben eingeführten Pfeil-Eigenschaften in Komponenten-Sprache (gleich für $\mathbb{R}^n$):

Betrag: $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

(($n=3$: wegen Pythagoras: $a^2 = a_3^2 + L^2$, $L^2 = a_1^2 + a_2^2$))



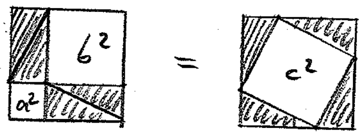
Mult.: $c \cdot \vec{a} = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$

((anschaulich klar: z.B. $c = 2 \Rightarrow$ Schatten-Verdopplung))

Add.: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

((anschaulich klar; für z-Komponente gilt z.B. $z = a_3 + b_3$ ✓))

<u>Bem:</u> Pythagoras ist einfach, geometrischer Beweis



<u>Verallgemeinerung</u>: mathematisch abstrahiert haben unsere Vektoren (des $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$) die Struktur eines Vektorraumes:

<u>Def</u> <u>Vektorraum</u> heisst ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus

(i) einer Menge V (mit Elementen $\vec{v}, \vec{w}, \dots$, genannt "<u>Vektoren</u>")

(ii) einer Abbildung $+ : V \times V \to V$
"<u>Addition</u>" $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$

(iii) einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$
"<u>äussere Multiplikation</u>" $(x, \vec{v}) \mapsto x\vec{v} \equiv x \cdot \vec{v}$
Punkt egal

mit den folgenden Eigenschaften ("<u>Vektorraum-Axiome</u>"):

((hier $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$; $x, y \in \mathbb{R}$))

(1)	$\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$	Kommutativgesetz	d.h. $(V,+)$ ist abelsche Gruppe
(2)	$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$	Assoziativgesetz	
(3)	$\exists\ \vec{0} \in V$ mit $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$	Nullvektor	
(4)	$\exists\ (-\vec{v}) \in V$ mit $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$	inverser Vektor	
(5)	$x(y\vec{v}) = (xy)\vec{v}$	Assoziativgesetz	
(6)	$1\cdot\vec{v} = \vec{v}$	neutrales Element	
(7)	$x(\vec{u}+\vec{v}) = x\vec{u}+x\vec{v}$	Distributivgesetze	
(8)	$(x+y)\vec{v} = x\vec{v}+y\vec{v}$		

Bem: • die Elemente aus $\mathbb{R}$ heissen Skalare,
die aus V heissen Vektoren ; Bezeichnung ... $\vec{v}, \vec{w} \mathrel{\hat{=}} \underline{v}, \underline{w} = \mathbf{v}, \mathbf{w} = |v\rangle, |w\rangle$

• haben oben einen Vektorraum (VR) über $\mathbb{R}$ definiert;
können z.B. auch überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen, dann Skalare $\in \mathbb{C}$

• unsere anschauliche Def. war der Spezialfall des sogenannten Euklid'schen (Vektor-) Raums,

$$V = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ Stück}} = \{(v_1, v_2, \ldots, v_n) \mid v_k \in \mathbb{R}\}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

• benutzen dasselbe Symbol für Add. und Mult. in V und $\mathbb{R}$;
a priori sind dies aber völlig verschiedene Dinge!

• es gibt in Physik/Mathematik viele weitere (ausser $\mathbb{R}^n$) wichtige VR's. z.B. Polynome (vgl. Ü59), Hilbert-Raum (QM), ...

Def Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_d \in V$ heissen eine Basis des VR's, wenn jedes $\vec{v} \in V$ als $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_d\vec{e}_d = \sum_{k=1}^{d} x_k \vec{e}_k$ mit eindeutigen Zahlen $x_k \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. (Bsp: Ü59)

Bem: • d heisst dann Dimension von V; $d \in \mathbb{N}$, aber auch $d=\infty$ mögl.

• unser kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ oben hatte als Basis $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$; $d=n=3$

Bsp für Vektorräume in Physik [≈ Embacher, §15]

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: Ebene + Raum
  Geschwindigkeit, Impuls, elektrische Feldstärke, ...

- $\mathbb{R}^4$: Raum-Zeit, spezielle Relativitätstheorie
  (setze Lichtgeschw. $c = 1$ ⇒ kann Zeit in Längeneinheiten messen)
  $\{(x,y,z)\,;\ \text{Zeit } t\} \to (x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit $x_0 := ct$

- $\mathbb{R}^6$: "Phasenraum" der klassischen Mechanik:
  Teilchen-Beschreibung durch $\{\text{Ort}\,;\ \text{Impuls}\} \to (x, y, z, p_x, p_y, p_z)$

- $\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^{12}$: Beschreibung von zwei Teilchen
  Menge aller Konfigurationen $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$ "Konfigurationsraum"
  → Phasenraum sogar $\mathbb{R}^{12}$

- $\mathbb{R}^{3N}, \mathbb{R}^{6N}$: statistische Physik, Beschreibung sehr vieler $(N \sim 10^{23})$
  Teilchen; z.B. Gasmoleküle

- komplexe VR's : Quantenmechanik (QM) beschreibt physikalische
  Systeme durch "Zustandsvektoren" oder "Wellenfunktionen"
  aus einem komplexen VR ("Hilbert-Raum")

- Lösungsmengen linearer Probleme sind VR's
  Bsp $f(x) = A e^{x} + B e^{-x}$ (mit $A, B \in \mathbb{R}$)
  erfüllt die (homogene, lineare, Differential-) Gleichung $f''(x) = f(x)$.
  → die Summe zweier verschiedener Lsn. von $f'' = f$
  ist auch wieder Lsg; ebenso jedes Vielfache einer Lsg;
  also sind "+" und "·" für alle VR-Elemente (Lsn) def.
  → die Menge der reellen Lsn von $f'' = f$ ist also ein VR,
  in diesem Falle der $\mathbb{R}^2$ ((Lsg durch (A, B) eindeutig festgelegt))