Satz von Taylor

Sei $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x $(m+1)$ mal stetig diff'bar.

Dann gibt es ein y zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{=:\, f_m(x) \ \text{Taylor-Polynom}} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(y)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}}_{=\, f(x)-f_m(x) \,=:\, R_m(x) \ \text{Restglied}}$$

Bem.: $n=0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(y)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(y)$ Mittelwertsatz! ((vgl. Kap. 3.3 S.30))

$\Rightarrow$ Taylor-Entwicklung ist Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

((Beweis: wissen aus Kap. 4.5, dass die Behauptung wahr ist für

$$R_m(x) = \int_{x_0}^{x} dt \, \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) \quad . \quad \text{(via vollst. Induktion)}$$

Falls $x \geq x_0$: sei t_{max} das Maximum von $f^{(m+1)}(t)$ auf $[x_0, x]$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{x_0}^{x} dt \, \frac{(x-t)^m}{m!}}_{=\left[-\frac{1}{m!}\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}} f^{(m+1)}(t_{max}) = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{max}) \geq R_m(x)$$

analog zeigt man: $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{min}) \leq R_m(x)$

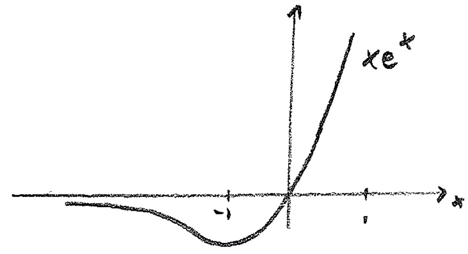
$\Rightarrow$ (Zwischenwertsatz): da $f^{(m+1)}$ stetig, existiert ein $y \in [x_0, x]$ mit $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(y) = R_m(x)$

Falls $x < x_0$: analog

qed))

Bsp

$$f(x) = x e^x$$
$$f'(x) = x e^x + e^x$$
$$f''(x) = x e^x + 2e^x$$
$$\vdots \quad (\text{vollst. Ind.})$$
$$f^{(n)}(x) = x e^x + n e^x$$



$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n \quad , \qquad f^{(n)}(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{n}{e}$$

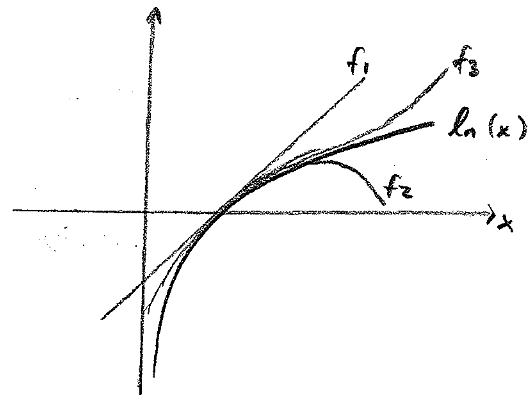
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = 0 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + O(x^4)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{e \cdot n!} (x+1)^n = -\frac{1}{e} + 0\cdot(x+1) + \frac{(x+1)^2}{2e} + \frac{(x+1)^3}{3e} + O((x+1)^4)$$

→ Mathematica : Manipulate [...] zeigt Güte der Näherung.

Bsp

$$f(x) = \ln(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+$$
$$f'(x) = x^{-1}$$
$$f''(x) = (-1)\, x^{-2}$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)\, x^{-3}$$
$$\vdots \quad (\text{vollst. Ind.})$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)!\, x^{-n}$$



⇒ Entwicklung um $x_0 = 1$: $\quad f^{(0)}(x_0) = \ln(1) = 0$

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad \text{für } n \geq 1$$

$$\ln(x) = \ln(1 + \underbrace{(x-1)}_{=: z \to x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} (x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$$

(vgl. S. 45; dort aus geom. Reihe)

$$\Leftrightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5)$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_m(x) =: f_m(x) + R_m(x)$$

Restglied $R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(y)}{(m+1)!} x^{m+1} = \frac{(-1)^m m!}{(m+1)!} \frac{x^{m+1}}{y^{m+1}} = \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{x^{m+1}}{(1+\vartheta_x)^{m+1}}$

$y \in [1, 1+x]$ $\qquad$ $\vartheta \in [0,1]$

Konvergenz? $\quad |x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$

(Taschenrechner macht's im Prinzip auch so!) → aber z.B. $\ln(2) = -\ln(2^{-1}) = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \ldots$

$= 0.693\ldots$ $\qquad$ $0.5 \quad 0.625 \quad 0.\bar{6} \quad 0.682$

Bsp (geom. Reihe) Koch'sche Schneeflocke

Konstruktionsvorschrift

Frage: Flächeninhalt = ?

$$F(a) = \frac{a}{2}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{4-1} = a^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$F_0 = F(a)$$

$$F_1 = F_0 + 3\cdot F\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$F_2 = F_1 + 3\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3}\right)$$

$$F_3 = F_2 + 3\cdot 4\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3\cdot 3}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_\infty = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot \frac{a^2}{3^{2n}}\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{3}{4}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1 \qquad \text{geom. Reihe! (5.42)} \quad \left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right.$$

$$= \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{8}{5} = a^2\,\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Frage: Umfang = ?

$$U_0 = 3a$$

$$U_1 = \frac{4}{3}U_0$$

$$U_2 = \frac{4}{3}U_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U_0$$

$$\vdots$$

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0 \qquad \Rightarrow \quad U_\infty = \infty \;!$$

6. Komplexe Zahlen

Warum? $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ abgeschlossen bzgl. $+, -, \cdot, \div$

aber nicht bzgl. Wurzelziehen aus neg. Zahlen:

$x^2 = -1$ für $x \in \mathbb{R}$ nicht lösbar ($x \cdot x \geq 0$ in $\mathbb{R}$)

also $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

bzw. Polynom $P(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ (NS)

allgemein:
- $b^q \notin \mathbb{R}$ falls $b < 0$, $q \notin \mathbb{Z}$
- nicht jedes Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ hat NS in $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ komplexe Zahlen beheben beide "Defizite"

$\rightarrow$ ″ vereinfachen viele Rechnungen

$\rightarrow$ ″ machen viele Zusammenhänge klarer

6.1 Grundlagen

Def. $i := \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit (s.o.: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$ und $i \notin \mathbb{R}$)

Def. $\mathbb{C} := \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ komplexe Zahlen

$\rightarrow$ jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = a + ib$ schreiben, mit eindeutigen $a, b \in \mathbb{R}$

(d.h. falls $z_1 = z_2$, $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ $\Leftrightarrow$ $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

$\rightarrow$ Bezeichnung: "Realteil von z" : $a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$

"Imaginärteil von z" : $b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$

$\Big\}$ $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$

$\rightarrow$ Rechnen in $\mathbb{C}$ per Rechenregeln in $\mathbb{R}$; und $i^2 = -1$ setzen

Bsp $z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Bsp $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 i b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

<u>Bsp</u> sei $z = a + ib \neq 0$ (d.h. $a \neq 0$ und/oder $b \neq 0$, also $a^2 + b^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{(-b)}{a^2+b^2}$$

$$\left(\left(\text{Test: } z^{-1} \cdot z = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \cdot (a+ib) = \frac{a^2-(ib)^2}{a^2+b^2} = 1 \checkmark \right)\right)$$

<u>Bsp</u> $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ \dots \Rightarrow i^{n+4} = i^n$

$i^{-1} = -i,\ i^{-2} = -1,\ i^{-3} = i,\ i^{-4} = 1,\ \dots$

→ da alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$, gilt z.B. auch

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{(binomische Formel)}$$

$$\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = \sum_{k=0}^{n} z^k \quad \forall z \neq 1,\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{(geom. Reihe)}$$

etc.

→ Bezeichnung: $\mathrm{Im}(z) = 0 \Rightarrow z = a + i \cdot 0 \in \mathbb{R}$ heisst "(rein) reelle Zahl" $\Rightarrow$ ((also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$))

$\mathrm{Re}(z) = 0 \Rightarrow z = 0 + ib$ heisst "<u>(rein) imaginäre Zahl</u>"

<u>Def.</u> $z^* := a - ib$ heisst die <u>zu $z = a + ib$ (komplex) konjugierte Zahl</u>

((manchmal auch als $\bar{z}$ geschrieben))

<u>Bsp</u> $z + z^* = a + ib + a - ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{z + z^*}{2}$

$z - z^* = a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z) \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{z - z^*}{2i}$

$z \cdot z^* = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow z^{-1} = \frac{z^*}{z \cdot z^*}$

<u>Bem.:</u> Die "Ordnungsstruktur" von $\mathbb{R}$ (d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer entweder $a < b$, oder $a > b$, oder $a = b$) macht auf $\mathbb{C}$ keinen Sinn mehr

→ definiere daher <u>Betragsfunktion</u> auf $\mathbb{C}$ als

$$|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+,\quad z \mapsto |z| := \sqrt{z \cdot z^*} = \underbrace{\sqrt{\underbrace{[\mathrm{Re}(z)]^2}_{\mathbb{R}_0^+} + \underbrace{[\mathrm{Im}(z)]^2}_{\mathbb{R}_0^+}}}_{\mathbb{R}_0^+}$$

⇒ Eigenschaften wie in $\mathbb{R}$, s. <u>Ü51</u>