<u>Bsp</u> $f = 1 + xf$ "Differentialgleichung nullter Ordnung"

hat die Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} \quad , \text{ setze } m = n-1$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$\Rightarrow$ Lsg: $c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ $\Rightarrow$ alle $c_n = 1$

also $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{\underline{geometrische Reihe}} \, , \; |x| < 1}$

((wiederentdeckt; vgl. Kap. 1.4))

$\rightarrow$ wie bekommt man die Koeffizienten c_n <u>systematisch</u>?

<u>Umgang mit Potenzreihen-Entwicklungen</u> ("Trickkiste", Verfahrensweisen)

- Abspalten ((hier: Bsp v. oben nochmal; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist <u>wilde</u> Fkt))

<u>Bsp</u>
$$\frac{1}{1-x} = 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$$
$$= 1 + x \cdot \left[1 + x \cdot \frac{1}{1-x} \right]$$
$$= \underbrace{1 + x + x^2 + \ldots + x^N}_{= \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x} \quad \text{(vgl. Ü9a)}$$

- algebraische Umformung

<u>Bsp</u>
$$\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$$
$$\Leftrightarrow \quad 1 + x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2) x^2 + \ldots$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{8} x^2 + \ldots$$

- aus Ableitung ("Int. einer Reihe")

<u>Bsp</u>
$$\frac{d}{dx}\left[-\ln(1-x)\right] = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$$
$$\Leftrightarrow \quad -\ln(1-x) = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$
$$x = 0: \quad -\ln(1) = C \quad \Rightarrow \quad C = 0$$
$$\Rightarrow \quad -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

- aus Stammfunktion ("Diff. einer Reihe")

  Bsp $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{d}{dx}\left[2\sqrt{1+x}\right] = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

- Addition von Reihen

  Bsp $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \left[e^x\right]_{\text{gerader Anteil}}$
  $= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

  Bsp $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \left[e^x\right]_{\text{ungerader Anteil}}$
  $= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ((oder aus Stammfkt: $\sinh = \frac{d}{dx}[\cosh] = \dots$))

  Bsp $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \left[\ln(1+x)\right]_{\text{ungerader Anteil}}$
  $= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

- aus (Differential-) Gleichungen (s. Bsp S. 45 oben)

  Bsp Reihe von $f(x) = 3e^{2x}$ aus $f'(x) = 2f(x)$, $f(0) = 3$:

  $$(3 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)' = 2(3 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

  $$c_1 + 2c_2 x + \dots = 6 + 2c_1 x + \dots \quad \Rightarrow c_1 = 6,\ c_2 = c_1$$

  $$\Rightarrow 3e^{2x} = 3 + 6x + 6x^2 + \dots$$

- aus Multiplikation / Division von Reihen

  Bsp $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

  $\Leftrightarrow$ (sinh-Reihe) $= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \cdot$ (cosh-Reihe)

  ausmultiplizieren $\Rightarrow c_0, c_1, \dots$

- aus $f(f^{-1}(x)) = x$

- Taylor-Reihe

  $$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

  $$f(0) = c_0 \ ;\ f'(0) = c_1 \ ;\ f''(0) = 2c_2 \ ;\ f'''(0) = 2 \cdot 3\, c_3 \ ;\ \dots$$

  $$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

((Bem: warum nicht gleich Taylor? → oft unrentabel!

Bsp $f = \dfrac{\ln(1+\sinh(x))}{\cosh(x)+x^2}$ → f'' ~ halbe Seite ...

aber: $= \dfrac{\ln(1+x+0\cdot x^2+\dots)}{1+0\cdot x+\dots+x^2} = \dfrac{x+0\cdot x^2+\dots-\frac{1}{2}(x+0\cdot x+\dots)^2+\dots}{1+0\cdot x+\dots} = x-\frac{1}{2}x^2+\dots$))

Bsp $f=(1+x)^\lambda$, $f'=\lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f''=\lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$, ...

$\overset{\text{Taylor}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{(1+x)^\lambda}_{\text{oft gebraucht}} = 1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2+\dots$ ((vgl. Ü 43a))

Bem: kann $f(x)$ auch "um $x=x_0$ entwickeln" ((bisher: $x_0=0$))

$g(x) := f(x+x_0)$

falls $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n$

$\Rightarrow$ $\underline{f(x)} = g(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n \underset{\uparrow}{=} \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$

(($g'(x)=f'(x+x_0)$, $g''(x)=f''(x+x_0)$, ..., $g^{(n)}(x)=f^{(n)}(x+x_0)$))

Konvergenz der Potenzreihen / Taylorreihen?

→ oft nützlich: geom. Reihe als "Majorante" (vgl. Kap 1.4, S. 16)

$\Rightarrow$ $\sum_k a_k$ ist konvergent, falls $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ "Quotienten-

divergent ≥ 1 kriterium"

((denn: falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|, \dots \le q$ $\Rightarrow$ $|a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le \dots \le q^k|a_n|$,

daher ist die geom. Reihe $\sum_n q^n$ (kvgt. für $|q|<1$) eine Majorante))

→ konvergiert $\sum_n c_n x^n$? $\Rightarrow$ untersuche ob $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| < 1$

$\Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \equiv$ "Konvergenzradius"

→ konvergiert $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$? $\Rightarrow$ untersuche ob $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(0)\,x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{f^{(n)}(0)\,x^n}\right| < 1$

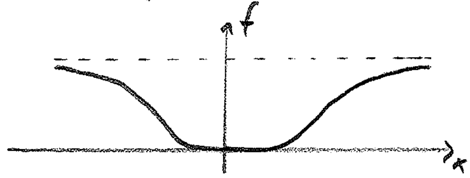
(viele Bsp in Ü 45) → $\Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n f^{(n+1)}(0)}{f^{(n)}(0)}\right|$ = "Konvergenzradius"

Für $|x|<$ "Konvergenzradius R" ist die Konvergenz also garantiert.

Für andere x ($x=\pm R$) kann die Reihe auch konvergieren; muss man zeigen.

Wogegen konvergieren diese Potenzreihen / Taylorreihen ?

Bsp (als Warnung) $f(x) = e^{-1/x^2}$



$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, $f'(0) = 0$

$f''(x) = (\dots) e^{-1/x^2}$, $f''(0) = 0$; ... ; $f^{(n)}(0) = 0$

Taylor $= 0 + 0 + 0 + \dots \neq f(x)$

Grund : $x = 0$ ist "pathologische" Stelle
("wesentliche Singularität")

→ bei solchen (sehr exotischen) Ausnahmen ist in der Regel sofort klar, dass Potenzreihe stark von $f(x)$ abweicht.

→ meist: falls Taylorreihe existiert
(d.h. f beliebig oft diff'bar und Reihe konvergiert)
dann ist sie gleich $f(x)$

Wie schnell konvergieren die Reihen gegen $f(x)$?

Würde gern jedes $f = \text{Polynom}_m + \text{Rest}_m$ schreiben, wobei Rest "klein" ist.

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{m+1})$$

↑ "Ordnung" : weggelassene Terme haben mindestens $m+1$ Faktoren x

Bsp zur Notation:
$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \mathcal{O}(x^2)$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$$
$$\left(1 + \lambda x + \mathcal{O}(x^2)\right) \cdot \left(1 + x + \mathcal{O}(x^2)\right) = 1 + (\lambda + 1) x + \mathcal{O}(x^2)$$

Wie groß ist aber der "Fehler" in $f \approx \text{Polynom}_m$?

→ müssen die Größe des "Restgliedes" $\text{Rest}_m = f - \text{Polynom}_m$ abschätzen.

dazu dient der