... als $\frac{d}{d\alpha}$ von ... (Differentiation nach Parameter)

Bsp $\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}}_{= \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty dx\, e^{-x} = \frac{1}{\alpha}} \Big|_{\alpha=1}$
($n \in \mathbb{N}$)

$\left[\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)\frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2} \, ; \, \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3} \, ; \dots ; \, \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \right.$

$= \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\Big|_{\alpha=1} = n!$

... als Parameter-abhängig

Bsp $-\beta \frac{d}{d\beta} \ln\left(\int_0^\infty dx \frac{x}{e^{\beta x}+1}\right) \overset{x \to x/\beta}{=} -\beta \frac{d}{d\beta} \ln\left(\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty dx \frac{x}{e^x+1}\right)$

$= -\beta \frac{d}{d\beta}\left[-2\ln(\beta) + \underbrace{\ln\left(\int \dots\right)}_{= \text{const}}\right]$

$= -\beta\left[-2\frac{1}{\beta} + 0\right] = 2$

→ Was tun, wenn gar nichts hilft?

- Integral "analog" auswerten: Fläche aussägen + wiegen
- weitere Integraltabellen wälzen (s. Bibliothek), z.B.
  Abramowitz / Stegun (enthält auch viele spezielle Funktionen)
  Gröbner / Hofreiter (gibt nicht nur Ergebnisse, sondern auch Lösungs-Weg.)
- per Computer auswerten
  → analytisch (Mathematica: Integrate[f[x],x] ; Maple ; ...)
  → numerisch (" : NIntegrate[f[x],{x,0,1}] ; ...)
- Integral näherungsweise ausrechnen
  → finde integrierbare Fkt'n $f_\pm$ mit $f_+(x) \geq f(x) \geq f_-(x)$
  $\Rightarrow \int_a^b dx\, f_+(x) \geq \int_a^b dx\, f(x) \geq \int_a^b dx\, f_-(x)$ $(a<b)$
  ((s. auch Reihen- / Taylor-Entwicklung, später in Kap. 5))
- das Integral als neue spezielle Funktion (mit Ihrem Namen ?!) definieren ...

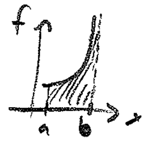
4.4 Uneigentliche Integrale

((sind eigentlich eigentliche, vgl. Bsp. S. 40 unten))

→ haben bisher auf $[a,b]$ stetige $f(x)$ betrachtet

→ kann man Def. von $\int_a^b dx\, f(x)$ sinnvoll erweitern auf Fälle, wo

- $f(x)$ für $x \to b$ divergiert ? (d.h. bei $x=b$ nicht def. ist)



- $b \to \infty$ geht ?

$(b \to \infty)$

Ja: Falls $f(x)$ $\forall \beta \in]a,b[$ auf $[a,\beta]$ integrierbar ist (also insbes. def.)

und $\int_a^\beta dx\, f(x)$ für $\beta \to b$ konvergiert, dann heisst

$$\int_a^b dx\, f(x) := \lim_{\beta \to b} \int_a^\beta dx\, f(x)$$

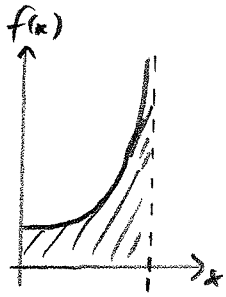
uneigentliches Integral $\left(\begin{matrix}\text{von } f \\ \text{auf } [a,b]\end{matrix}\right)$

Bem. $b \in \mathbb{R}$ oder $b = +\infty$ OK

Bem. analog für $a \to -\infty$; oder beide gleichzeitig

Bsp $\int_0^\beta dx \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \int_0^\beta dx \underbrace{\frac{d}{dx}\left[-2\sqrt{1-x}\right]}_{\text{denn } = +2\,\frac{1}{2}\,(1-x)^{-1/2}}$

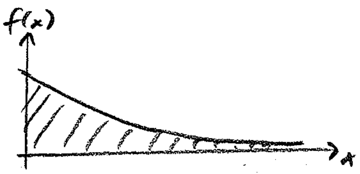
$= -2\sqrt{1-\beta} + 2\sqrt{1-0}$



harmlos für $\beta \in]0,1[$; kvgt. für $\beta \to 1$

$\Rightarrow \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$, obwohl $f(x)$ bei $x=1$ nicht definiert ist!

Bsp $\int_0^\beta dx\, e^{-x} = \int_0^\beta dx \underbrace{\frac{d}{dx}\left[-e^{-x}\right]}_{\text{denn } = +e^{-x}}$



$= -e^{-\beta} + e^0 = 1 - e^{-\beta}$, OK für $\beta \in]0,\infty[$; kvgt für $\beta \to \infty$

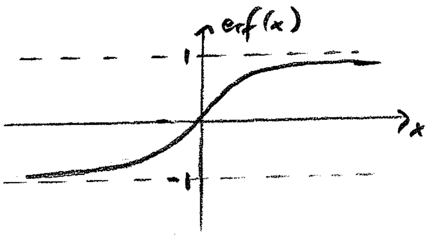
$\Rightarrow \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1$

Bsp $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy\, e^{-y^2}$ OK $\forall x > 0$; kvgt für $x \to \infty$ (gegen 1)

((Beweis: Analysis I))

$\Rightarrow \operatorname{erf}(\infty) = 1$, $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$

((endlich einmal zeichnen : ungerade,



))

Bsp $\int_0^\beta dx\,\sqrt{x} = \int_0^\beta dx\,\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\beta^{3/2} - 0$

Ok für $\beta \in]0,\infty[$

aber für $\beta \to \infty$ divergent "gegen $+\infty$"

Schreibweise: $\int_0^\infty dx\,\sqrt{x} = \infty$

4.5 Vorbereitung auf Taylor

Falls $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x $(n+1)$-mal stetig diff'bar,

gilt:
$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}$$

Beweis: durch vollständige Induktion

Ind.-Anfang: $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0$

$$= \frac{f(x_0)}{0!}\cdot 1 + \left[f(t)\right]_{x_0}^{x} = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x) \checkmark$$

Ind.-Annahme: Formel stimmt bis $n-1$

Zu zeigen: Formel stimmt für n

$$\Leftrightarrow f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{=\frac{d}{dt}u(t)}\,\underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{=v(t)}, \quad u(t) = f^{(n)}(t),\ \dot{v} = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\stackrel{PI}{=} \underbrace{\left[f^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x}}_{= f^{(n)}(x)\frac{0^n}{n!} - f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} + \int_{x_0}^{x} dt\,f^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$= f(x)$ laut Annahme

qed

5. Potenzreihen-Entwicklungen

Kernidee: Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind <u>einfach</u> ($n \to \infty \Rightarrow$ Potenzreihe)

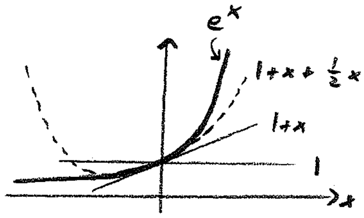
(Werte berechnen ✓ Differenzieren ✓ Integrieren ✓)

→ Approximation einer "beliebigen" Fkt. durch Polynome möglich?

[Antwort: Ja, das geht sehr oft]

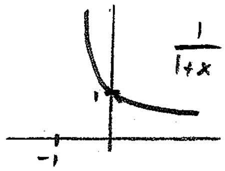
→ kennen schon ein <u>Bsp</u>:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$



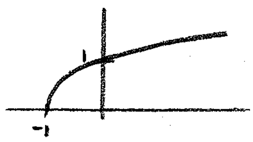
⇒ geht das auch für andere Fkt'n? $\boxed{f(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$

sicher auch bei



$\frac{1}{1+x} = 1 - x + [illegible] x^2 + \dots$

oder



$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - [illegible] x^2 + \dots$

Wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt"

- funktioniert das immer? → fast; bei Physikern Funktionen ✓ aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius
- wann nicht? → an "pathologischen" Stellen (Sprünge, Knicke, Pole, ...) entwickle <u>nicht</u> $|x|$, $\frac{1}{x}$, e^{-1/x^2} um $x=0$
- wozu? → können x^n gut differenzieren und integrieren
  → kann Grenzfälle ansehen, Resultate diskutieren ...
  → kenne f <u>nicht</u>, habe nur Gln <u>für</u> f
  setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ an
  und bestimme $c_0, c_1, c_2, \dots$ aus den Gln.