Im Gegensatz zum Ableiten gibt es für das Integrieren kein "allgemeines Rezept" ((s. jedoch § 4.3)).

Daher verfährt man beim Anwenden des Hauptsatzes meist so:

Bsp ($|b| \leq 1$)

$$J = \int_0^b dx \, \operatorname{artanh}(x) = \int_0^b dx \, \frac{d}{dx}[\,?\,]$$

geeignete Kandidaten-Funktionen für $[\,?\,]$? "Stammfunktion"

$$\frac{d}{dx} x \cdot \operatorname{artanh}(x) = \operatorname{artanh}(x) + \underbrace{x \cdot \frac{1}{1-x^2}}_{= \frac{d}{dx}(?)}$$ (nach Produktregel)

$$\frac{d}{dx} \ln(1-x^2) = \frac{-2x}{1-x^2}$$ (nach Kettenregel)

$$\Rightarrow [\,?\,] = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$ irgendeine Konstante

$$= b \cdot \operatorname{artanh}(b) + \frac{1}{2}\ln(1-b^2) + \cancel{C} - (0 + 0 + \cancel{C})$$

(Vereinf. Notation)

Bsp ($n \in \mathbb{N}$)

$$\int dx \, x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

denn $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = (n+1)\frac{x^{(n+1)-1}}{n+1} = x^n$

Bsp ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\int dx \, x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{für } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = -1 \end{cases}$$

denn $\begin{cases} x > 0: & \ln'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \\ x < 0: & \ln'(-x) = \frac{-1}{-x} = x^{-1} \end{cases}$

Bsp ($\alpha \neq 0$)

$$\int dx \, e^{\alpha x} = \int dx \, \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C\right]$$

denn $\left(\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}\right)' = e^{\alpha x}$

Bsp

$$\int dx \left(\sum_{k=0}^\infty a_k \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^\infty a_{k-1} \frac{x^k}{k!}$$, wobei $a_{-1} := C \in \mathbb{R}$ beliebig

((Ann. $|x| < \lim_{k\to\infty} \frac{k b_{k-1}}{b_k}$ mit $|a_k| \leq b_k$, so dass Reihe konvergiert))

denn $\left(\sum_{k=0}^\infty a_{k-1} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^\infty a_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^\infty a_k \frac{x^k}{k!}$

insbesondere ist die Reihe (der Stammfkt.) wieder konvergent

4.3 Integrations - Verfahren

↳ gibt keine allg. Regeln;
eher: Erfahrung / Intuition / Raten / Ausprobieren ... "Kunst"

→ Die meisten der (für die Physik) relevanten Integrale kann man in Integrations-Tabellen nachschlagen, z.B.

Bronstein (genügt meist; s. z.B. online-Link auf webpage)

Gradshteyn / Ryzhik (sehr umfangreich; s. z.B. Bibliothek)

→ "Differenzieren immer machbar; Integrieren nur in einigen Glücksfällen"
Manche "harmlos" aussehenden $f(x)$ besitzen zwar Stammfkt'n, diese lassen sich aber nicht durch "elementare" Funktionen ($d.h.$ x^α, e^x, $\ln(x)$, ...) darstellen;
Bsp $\int dx\, e^{-x^2} = ?$ (($f(x) = e^{-x^2}$ stetig $\Rightarrow$ $F(x)$ existiert!))

→ Einige besonders wichtige solcher Stammfunktionen haben deshalb eigene Namen bekommen (sog. "spezielle Funktionen")
Bsp $\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy\, e^{-y^2}$ "error function"

↳ ist also diejenige Fkt, deren Ableitung $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ gibt
(Gaussverteilung)

Zum Umformen / Vereinfachen von Integralen werden oft einige der folgenden Verfahren angewandt:
Man "erkennt", dass es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen ...

... als Partialbruch

Bsp $f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]\right)$$

... als $g' \cdot g^{n}$ $(n \neq -1)$

$$f(x) = g'(x) \cdot g^n(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}\, g^{n+1}(x)\right) \qquad \text{(Kettenregel "rückwärts")}$$

Bsp $$\int_a^b dx\ \frac{1}{x}\cdot \ln^n(x) \underset{g(x)=\ln(x)}{=} \int_a^b dx\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(x)\right) = \left[\frac{\ln^{n+1}(x)}{n+1}\right]_a^b$$

... als g'/g

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\left(\ln|g(x)|\right) \qquad \text{(Kettenregel "rückwärts")}$$

Bsp $$\int_a^b dx\ \frac{3x^2}{1+x^3} \underset{g(x)=1+x^3,\ g'(x)=3x^2}{=} \int_a^b dx\ \frac{d}{dx}\left(\ln|1+x^3|\right) = \left[\ln|1+x^3|\right]_a^b$$

Bsp $$\int_a^b dx\ \frac{1}{x\cdot\ln(x)} \underset{g(x)=\ln(x),\ g'(x)=\frac{1}{x}}{=} \left[\ln|\ln(x)|\right]_a^b$$

Bsp $$\int_a^b dx\ \tanh(x) = \int_a^b dx\ \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \underset{g(x)=\cosh(x),\ g'=\sinh}{=} \left[\ln(\cosh(x))\right]_a^b$$

... als $u'v$ (partielle Integration, PI)

$$f(x) = u'(x)\,v(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x)\,v(x)\right) - u(x)\,v'(x)$$

Bsp $$\int_0^1 dx\ \underbrace{2x}_{u'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{v} = \left[x^2\ln(x)\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 dx\ x^2\cdot\frac{1}{x}}_{=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1} = 0-0-\tfrac{1}{2}+0$$

$u=x^2,\ v'=1/x$

Bsp $$\int_0^\infty dx\ \underbrace{x}_{v}\cdot\underbrace{e^{-x}}_{u'} = \left[-x e^{-x}\right]_0^\infty - \underbrace{\int_0^\infty dx\ 1\cdot(-e^{-x})}_{=\left[e^{-x}\right]_0^\infty} = 0-0-0+1$$

$v'=1,\ u=-e^{-x}$

Bsp $$\int_a^b dx\ \underbrace{x^2}_{v}\cdot\underbrace{\sinh(x)}_{u'} = \left[x^2\cosh(x)\right]_a^b - \int_a^b dx\ \underbrace{2x}_{v}\cdot\underbrace{\cosh(x)}_{u'}$$

$v'=2x,\ u=\cosh$ $\qquad$ $v'=2,\ u=\sinh$

(2mal partiell integrieren)

$$= \left[x^2\cosh(x) - 2x\sinh(x)\right]_a^b + \int_a^b dx\ 2\sinh(x)$$

$$= \left[x^2\cosh(x) - 2x\cdot\sinh(x) + 2\cdot\cosh(x)\right]_a^b$$

Bsp $$\int_a^b dx\ \cosh^2(x) = \left[\sinh(x)\cosh(x)\right]_a^b - \int_a^b dx\ \underbrace{\sinh^2(x)}_{=\cosh^2-1}$$

$u'=\cosh,\ v=\cosh$

$u=\sinh,\ v'=\sinh$

$$= \left[\sinh(x)\cosh(x)+x\right]_a^b - \underbrace{\int_a^b dx\ \cosh^2(x)}_{\text{auf lhs bringen!}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\ \cosh^2(x) = \left[\frac{\sinh(x)\cosh(x)+x}{2}\right]_a^b$$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei diff'bar und bijektiv ($\Rightarrow$ dann ex. Umkehrfkt $t = t(x)$)
also $x(t(a)) = a$ etc.

$$\int_a^b dx\ f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ \frac{dx}{dt}\ f(x(t))$$

((Beweis: $\int_a^b dx\ f(x) = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$, mit $\mathcal{F}'(x) = f(x)$

$$= \mathcal{F}(x(t(b))) - \mathcal{F}(x(t(a)))$$

$$= \left[\mathcal{F}(x(t))\right]_{t(a)}^{t(b)}$$

(Kettenregel)

$$= \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ \frac{d}{dt}\ \mathcal{F}(x(t)) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\ \frac{dx}{dt} \cdot \underbrace{\frac{d\mathcal{F}}{dx}}_{=f} \quad \text{qed} \ ))$$

→ "Substitution ist Umkehrung der Kettenregel"

Bsp $\int_a^b dx\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = ?$ Substitution: $x(t) =: \sinh(t)$
Umkehrung $\Leftrightarrow$ $t(x) = \sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

(benutze $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$) $\rightsquigarrow$

$$= \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt\ \cosh(t)\ \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}}$$

$$= \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt \cdot 1$$

$$= \operatorname{arsinh}(b) - \operatorname{arsinh}(a)$$

(($\Rightarrow$ $\operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ als Nebenresultat))

((check: $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$ nach x ableiten

$$\Rightarrow \underbrace{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))}_{= \cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))} = \sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arsinh}'(x) = 1 \quad \text{qed} \ ))$$

Bsp $\int_0^1 dx\ 2x \ln(x) = ?$ Subst. $x =: e^t$ $\Leftrightarrow$ $t = \ln(x)$
((vgl. PI, S.39))

$$= \int_{-\infty}^{0} dt\ e^t\, 2e^t\, t \quad , \quad t \to -t/2 \quad \left(\begin{array}{c}\text{Skalierungs-}\\ \text{Trick, } \lambda = -\tfrac{1}{2}\end{array}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int_{\infty}^{0} dt\ 2(-\tfrac{t}{2})\, e^{-t} = -\tfrac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty dt\ t\, e^{-t}}_{=1, \text{ via PI, s. Bsp S.39}}$$

$$= -\tfrac{1}{2} \quad \text{\\\\}$$

Bsp $\int_0^\infty dx\ \underbrace{e^{-x}}_{=:t,\ x = -\ln(t)} = \int_1^0 dt\ (-\tfrac{1}{t})\, t = \int_0^1 dt = 1$