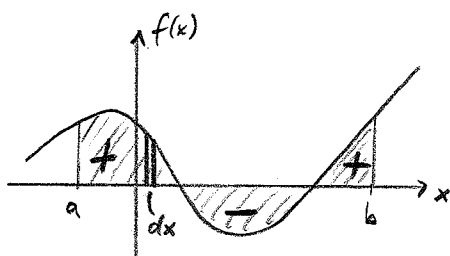


- ↳ Für alle zentralen Begriffe (Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) gibt es jeweils eine "strange" (ϵ - δ -...) Definition sowie eine geometrische Veranschaulichung;
 bis vor (K, S, D) beides gemacht;
 hier (I) nur geometrisch-anschaulich

4.1 Das bestimmte Integral



die so gezählte Fläche
 zwischen Funktionsgraph und
 $[a, b]$ auf x-Achse heißt
 (bestimmtes) Integral

$$\left(\begin{array}{c} \text{Fläche} \\ \text{zw. } a, b \end{array} \right) = \underbrace{\lim \sum}_{\int} (dx \cdot f(x)) =: \int_a^b dx f(x)$$

Bem.: x ist hier wieder ein "Laufindex", wie La Summe $\left(\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{m=0}^n x_m = \dots \right)$,
 also $\int_a^b dx f(x) = \int_a^b dy f(y) = \int_a^b d\xi f(\xi) = \dots$

Bem.: für welche Funktionen ist eine sinnvolle Definition
 solcher Flächen möglich?

((sicher nicht für z.B. (Dirichlet-Fkt) $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$,
 denn Graph lässt sich nicht zeichnen; $\rightarrow$ Fläche ??))

$\rightarrow$ sicher OK für stetige Funktionen

((sowie "stückweise stetige", wie z.B.



(höchstens endlich viele Punkte unstetig, aber beschränkt))

$\rightarrow$ ab jetzt nur noch solche $f(x)$ betrachten!

((Vervollg. in Analysis-Vorl.: Riemann-, Lebesgue-Integral))

oft verwendete Schreibweise: $\int dx := \text{Integral über alle } x = \int_{-\infty}^{\infty} dx$

in Physik: Dimension $[\int_a^b dx f(x)] = [x] \cdot [f]$, $[a] = [b] = [x]$

$\int$ -Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch ablesbar ist)

oder $f = \partial_x(\dots)$, s.u. "Hauptsatz"

Eigenschaften:

(alle anschaulich
klar!)

$$\int_a^b dx f = - \int_b^a dx f$$

$$\int_a^a dx f = 0$$

$$\int_a^b dx \text{const}_x = (b-a) \cdot \text{const}_x \quad \left(\Rightarrow \int_a^{a+\varepsilon} dx f(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon f(a) \right)$$



$$f \text{ ungerade} \Rightarrow \int_{-a}^a dx f = 0$$

$$f \text{ gerade} \Rightarrow \int_{-a}^a dx f = 2 \int_0^a dx f$$

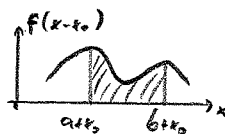
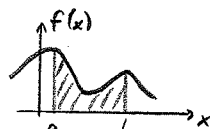
$$\int_a^b dx (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx f + \beta \int_a^b dx g$$

$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b], \quad a \leq b \Rightarrow \int_a^b dx f(x) \leq \int_a^b dx g(x)$$

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int_a^b dx |f(x)|$$

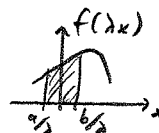
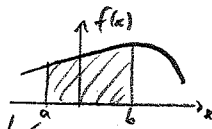
Tricks: Verschieben



$$\int_a^b dx f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx f(x-x_0)$$

((also $\text{Grenzen} \rightarrow \text{Grenzen} + x_0$
 $f(x) \rightarrow f(x-x_0)$))

Skalieren



$$\int_a^b dx f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx f(\lambda x)$$

((also $x \rightarrow \lambda x, dx \rightarrow \lambda dx$
 $\text{Grenzen} \rightarrow \text{Grenzen} / \lambda$))

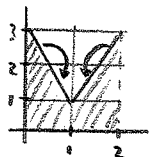
dimensionslos

z.B. $\int_0^{t_1} dt v(t) = \int_0^{t_1} dt v_0 f(\omega t)$, Skalieren $t \rightarrow t/\omega$

$$= \frac{v_0}{\omega} \int_0^{\omega t_1} dt f(t)$$

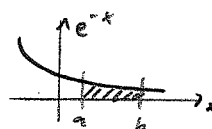
Bsp $I = \int_0^2 dx (2|x-1|+1)$, $x \rightarrow x+1$
 $= \int_{-1}^1 dx (2|x|+1)$, $x \rightarrow \frac{1}{2}x$
 $= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 dx (|x|+1)$, gerade Fkt
 $= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^2 dx (|x|+1) = \int_0^2 dx (x+1)$, $x \rightarrow x+1$
 $= \int_1^3 dx (x+2)$, x ist ungerade Fkt
 $= 2 \int_1^2 dx = 2 \cdot 2 = 4$

((als Check: zeichnen



$f \rightarrow 2$, $I = 2 \cdot 2 = 4$ ✓))

Bsp $\int$ aus Σ (Schritten) berechnen, z.B.



$$\begin{aligned} \int_a^b dx e^{-x} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{b-a}{N} e^{-(a+n\frac{b-a}{N})} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} e^{-a} \sum_{n=0}^N \left(e^{-\frac{b-a}{N}} \right)^n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} e^{-a} \frac{1 - e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1 - e^{-\frac{b-a}{N}}} = \frac{1 - e^{-(b-a)} e^{-\frac{b-a}{N}}}{1 - e^{-\frac{b-a}{N}}} \end{aligned}$$

, vgl. (endl.) geom. Reihe, Ü 9a

$$= e^{-a} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon (1 - e^{-(b-a)} e^{-\varepsilon})}{1 - e^{-\varepsilon}} \quad \text{mit } \varepsilon := \frac{b-a}{N}$$

Zeilen: $(\dots) \rightarrow (1 - e^{-(b-a)})$; Rest: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{1 - e^{-\varepsilon}} \sim \frac{0}{0}$ de l'Hôsp!

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1 + e^{-\varepsilon}} \rightarrow 1$$

(hieraus folgt) $\int_0^\infty dx e^{-x} = 1$

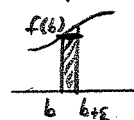
$$\begin{aligned} &\rightarrow e^{-a} (1 - e^{-(b-a)}) = e^{-a} - e^{-b} \\ &= [-e^{-x}]_{x=b} - [-e^{-x}]_{x=a} \end{aligned}$$

((geht das immer?! s.a.))

4.2 Hauptsatz der Integralrechnung

Berechne die Ableitung eines Integrals nach der oberen Grenze
 per Differenzialquotient:

$$\frac{d}{db} \left(\int_a^b dx f(x) \right) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx f(x) - \int_a^b dx f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx f(x)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \cdot f(b)}{\varepsilon} = f(b)$$



$\Rightarrow$ Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$,
d.h. eine Lösung der (Differential-) Gleichung $F'(x) = f(x)$,
dann ist also $\frac{d}{db} \left(\int_a^b dx f(x) \right) = \frac{d}{db} F(b)$

$$\Leftrightarrow \int_a^b dx f(x) = F(b) + C \quad (\text{Konstante})$$

$$b \rightarrow a: \quad 0 = F(a) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)}$$

$$=: [F(x)]_a^b = F(x) \Big|_a^b \quad (\text{andere Schreibweisen})$$

Der Hauptsatz: falls $f(x)$ am Ort x_0 stetig ist,

dann ist $F(x) := \int_a^x dy f(y)$ am Ort x_0 diff'bar, mit $F'(x_0) = f(x_0)$

Bem.: • $F(x)$ Stammfkt $\Rightarrow F(x) + \text{const.}$ auch. $\leftarrow$ (schlechte Notation! $\int_{-\infty}^{\infty} ? \int_{-\infty}^x ?$)

Die Menge aller Stammfkt. heisst " $\int dx f(x)$ " (unbestimmtes Integral)

• Hauptsatz hilft nur, falls man $f = \frac{d}{dx} F$ lösen kann
($f = \sinh(x)$, $F = ???$)

• "Beweis": $\int_a^b dx \frac{F(x)}{dx} = F\text{-Zunahme ab } F(a)$

• Anwendungsmuster: $\int_a^b dx \text{ [?]} = \int_a^b dx \frac{d}{dx} [??] = []_a^b = []_{x=b} - []_{x=a}$

• Wunschtabelle $\frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx} \operatorname{artanh}(x)$ etc.

wenn jedoch (s. Bronstein etc.) " $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh}(x)$ ",
dann lese dies als Tabelle (nicht als Glg: $C = ?!$)

• F in Tabelle gefunden

$\rightarrow$ zitieren, z.B. [Bronstein, Nr. 157]

$\rightarrow$ Probe, also $\frac{d}{dx}$ (rhs) bilden ("right hand side")

• $\int_a^{\infty} dx f(x) := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x)$ nennt man uneigentliches Integral
wenn anndrd, dann: "es existiert"