

Bsp 2: Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

ist auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar,

und es gilt $P_n'(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$

Beweis: Summen- + Produktregel, und Bsp 1

Bsp 3: rationale Fkt. $R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q Polynome)

ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich ($Q \neq 0$!) diff'bar,

und es gilt $R'(x) = \frac{P'(x) Q(x) - P(x) Q'(x)}{Q^2(x)}$

Beweis: Quotientenregel, und Bsp 2

((Bem: $\Rightarrow$ $P(x)$ und $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sind auf ihrem gesamten Def.-Bereich stetig (dies war in Kap. 2.2, S. 19 oben, nur behauptet worden), und beliebig oft (stetig) diff'bar.))

Für Potenzreihen, d.h. "unendliche Polynome" gilt:

Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ und $|x| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k b_{k-1}}{b_k}$ mit $|a_k| \leq b_k$,
(d.h. die Potenzreihe konvergiert)

$\Rightarrow$ Dann ist $f(x)$ am Ort x (beliebig oft stetig) diff'bar, und zwar gliedweise, d.h.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{1}{m!} \underbrace{(x^m)'}_{= m \cdot x^{m-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{m}{m!}}_{= \frac{1}{(m-1)!}} x^{m-1} \quad \begin{array}{l} k := m-1 \\ \Leftrightarrow m = k+1 \end{array} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!} \quad \left(=: \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\text{neu}} \frac{x^k}{k!} \right) \end{aligned}$$

Insbesondere ist die Potenzreihe $f'(x)$ wieder konvergent.

((Beweis: in Analysis-Vorlesung... hier: plausibel?!))

Bsp $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, d.h. $a_k = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow \exp'(x) = \exp(x)$

$\exp'(c \cdot x) = \exp(c \cdot x) \cdot c$

$\uparrow$ Kettenregel

d.h. $f(x) = f(0) \cdot e^{cx}$

genügt der Glg.

$f' = c \cdot f$

(Bsp für "Differentialgl.")

(war schon
in Ü 24
benutzt
worden)

Bsp

erne weitere nützliche Ableitungsregel:

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f: A \rightarrow B$ bijektiv (d.h. f^{-1} existiert)

und diff'bar am Ort $y \in A$ mit $f'(y) \neq 0$

$\Rightarrow$ Dann ist $f^{-1}: B \rightarrow A$ am Ort $x := f(y) \in B$ diff'bar

$$\text{mit } [f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beweis: die Gg. $f(f^{-1}(x)) = x$ nach x ableiten:

$$[f(f^{-1}(x))]' = f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = x' = 1$$

da nach Voraussetzung $f'(\underbrace{f^{-1}(x)}_{=y}) \neq 0$, folgt Behauptung $\square$

Bsp $\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Bsp $\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \tanh = \frac{\sinh}{\cosh}, \quad \tanh' = \frac{\sinh' \cosh - \sinh \cosh'}{\cosh^2} = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \\ \sinh = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \sinh' = \cosh \\ \cosh = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \cosh' = \sinh \end{array} \right. \end{aligned}$$

$\rightarrow$ analog zum Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (vgl. Kap. 2.2)

haben auch differenzierbare Funktionen einige allgemeine Eigenschaften:

3.3 Mittelwertsätze und Regel von de l'Hospital

Seien zwei Funktionen $f, g: A \rightarrow B$ auf einem Intervall $[a, b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $x_0 \in]a, b[$, so dass

$$[f(b) - f(a)] g'(x_0) = [g(b) - g(a)] f'(x_0)$$

allgemeiner Mittelwertsatz

Beweis: wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x)$$

und müssen zeigen: $h'(x) = 0$ irgendwo zwischen a, b

es gilt (Summenregel): h diff'bar in $[a, b]$

$$\text{und } h(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$h(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a)$$

$\Rightarrow$ also ist erwartet $h(x)$ konstant auf $[a, b]$

und somit $h'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$

oder $h(x)$ besitzt (mind. ein) Extremum, z.B. bei $x_0 \in]a, b[$

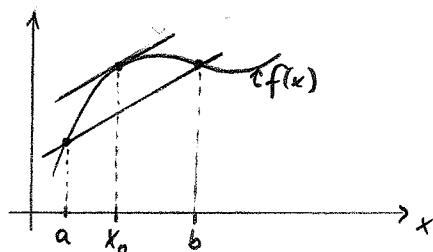
und somit $h'(x_0) = 0$

Setzt man $g(x) = x$ in den allg. Mittelwertsatz ein, folgt der

Mittelwertsatz: Sei $f: A \rightarrow B$ auf $[a, b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $x_0 \in]a, b[$, so dass $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$

anschaulich:



|| die Steigung der
Sekante wird zwischen
(a, b) auf angenommen ||

enige Folgerungen: (seien $f, g: A \rightarrow B$ diff'bar auf $[a, b] \subset A$)

• falls $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a, b]$

>

streng mon. $\nearrow$

$\leq$

monoton fallend

<

streng monoton $\searrow$

=

$f(x) = \text{const.}$

$= g'(x)$

$f(x) = g(x) + \text{const.}$

((Bew.: " $>$ ": Seien $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$.

dann existiert laut Mittelwertsatz ein $\xi \in]x_1, x_2[$

$$\text{mit } f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} > 0 \quad \text{g.e.d.}$$

" $>$, $\leq$, $<$ " : genauso

" $=$ " : folgt aus " $>$ " und " $\leq$ "

" $= g'(x)$ " : $[f(x) - g(x)]' = 0 \Rightarrow f(x) - g(x) = \text{const.} \quad))$

Anwendung des Mittelwertsatzes: Grenzwerte wie " $\frac{0}{0}$ ", " $\frac{\infty}{\infty}$ " ausrechnen

Seien $f, g : A \rightarrow B$ auf $[a, b] \subset A$ diff'bar

und $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ auf $]a, b]$.

$$\Rightarrow \text{Dann gilt } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{Regel von de l'Hospital}$$

((Bem.: Wenn der Grenzwert existiert; beide Limes "von oben";
Grenzwerte $\frac{\infty}{\infty}$ genauso: nehme $\frac{1/f(x)}{1/g(x)}$))

Bew.: laut allg. Mittelwertsatz $\exists$ zu jedem $x \in]a, b[$ ein $x_0 \in]a, x[$

$$\text{so dass } [f(x) - f(a)] g'(x_0) = [g(x) - g(a)] f'(x_0).$$

$$\text{wegen } f(a) = g(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) g'(x_0) = g(x) f'(x_0)$$

wegen $g'(x) \neq 0$ auf $]a, b]$ muss $g(x)$ streng mon. wachsend oder fallend
jedenfalls (da $g(a) = 0$) ist $g(x) \neq 0$ auf $]a, b]$

$$\Rightarrow \text{damit Division: } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

da $x_0 \rightarrow a$ für $x \rightarrow a$ folgt die Behauptung g.e.d.

$$\frac{0}{0} \quad \text{Bsp} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$((\text{daraus folgt } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x)} = e^1 = e$$

$\Leftrightarrow$ die Folge $a_n := (1 + \frac{1}{n})^n$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen e (!)))

Auch Grenzwerte wie " $\frac{\infty}{\infty}$ " oder " $0 \cdot \infty$ " etc. per de l'Hospital:

$$\text{Sei } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \rightarrow \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \rightarrow \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{((denn: } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{f(x)}} \stackrel{(\text{de l'Hop.})}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\frac{1}{g})'}{(\frac{1}{f})'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-g'/g^2}{-f'/f^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'}{f'} \cdot \frac{f^2}{g^2} \quad | \cdot \frac{f'}{g'} \cdot \frac{g}{f} \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \checkmark \quad)) \end{aligned}$$

$$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Bsp} \quad (a > 0) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^a \cdot \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x)}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1}}{-a x^{-a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^a}{a} = 0$$

$$0^0 \quad \text{Bsp} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(x)} \stackrel{\text{oberes Bsp}}{=} e^0 = 1$$

Auch das "a" in der Regel von de l'Hospital darf ∞ sein:

$$\text{Sei entweder } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$$

$$\text{oder } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \text{dann gilt wieder } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\begin{aligned} \text{((denn: setze } y := \frac{1}{x}, \text{ dann } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{y})}{g(\frac{1}{y})} \stackrel{(\text{de l'Hop. + Kettenregel})}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f'(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2})}{g'(\frac{1}{y}) \cdot (-\frac{1}{y^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad)) \end{aligned}$$

Bsp in den Übungen (Ü286) wurde gezeigt, dass

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^a} \rightarrow \infty \quad \text{für alle } a > 0$$

$$\text{((z.B. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1} \rightarrow \infty \quad))$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \rightarrow 0 \quad \text{für alle } a > 0$$

$$\text{((z.B. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0 \quad))$$