3. Differentialrechnung (in $\mathbb{R}$)

≈ theoretische Physik: 17. Jh, Leibniz + Newton
exakte Formulierung der Gesetze, die den beobachteten physikalischen Phänomenen zugrunde liegen

z.B. Mechanik ⇔ Newton-Gleichungen
Elektrodynamik ⇔ Maxwell-Gleichungen
Quantenmechanik ⇔ Schrödinger-Gleichung
Gravitation ⇔ Einstein-Gleichungen
} "Differentialgleichungen"

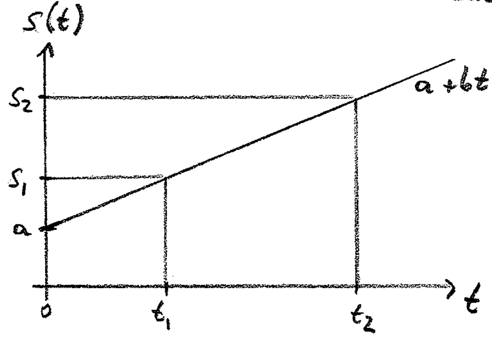
Lösung solcher Glg.: brauchen Analysis, insbesondere
<u>Differential-</u> und <u>Integralrechnung</u>!

⇒ "Werkzeugkasten" des Physikers!

3.1 Die Ableitung

<u>Bsp</u> gleichförmige Bewegung eines Massenpunktes auf einer Geraden:

zurückgelegter Weg $s(t) = a + b\cdot t$
↳ Zeit



Position zum Zeitpunkt $t=0$ ist $s(0)=a$

wollen <u>Geschwindigkeit</u> wissen: $v = \frac{\text{Wegabschnitt}}{\text{Zeitabschnitt}} = \frac{s(t)-a}{t} = b$

brauchen also Steigung des Funktionsgraphen

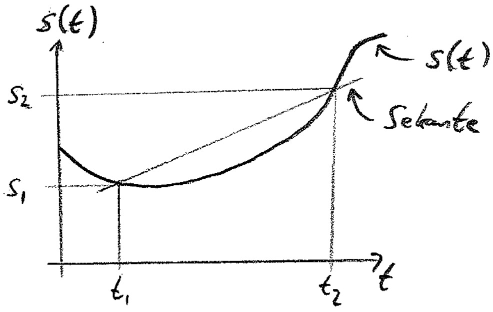
hätten auch ein anderes Zeitintervall nehmen können, z.B. $t_2 - t_1$:

$$v = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1} = b$$ (gleiches Ergebnis, da Gerade)

allgemeiner: $v = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$

↳ zu $(t \to x)$ $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ heißt <u>Differenzenquotient</u>

Bsp allgemeine geradlinige Bewegung
mit zeitlich variierender Geschwindigkeit: beliebiges $s(t)$



Differenzenquotient gibt hier Steigung der Sekante durch $(t_1, s(t_1))$ und $(t_2, s(t_2))$ an

bekommen hier die <u>Durchschnittsgeschwindigkeit</u> während des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$: $v_{mittel} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

→ Physikalisch am wichtigsten ist oft die <u>Momentangeschwindigkeit</u>.
Diese ergibt sich im Grenzübergang $t_1 \to t_2$;
bei einer stetigen Funktion geht dann auch $s(t_1) \to s(t_2)$,
und die Sekante → Tangente
Tangentensteigung $v(t_2) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t_2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

→ dieser Grenzwert eines Quotienten heisst

<u>Differentialquotient</u> $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$
>0 oder <0

verschiedene Schreibweisen:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x_0} \equiv f'(x_0) \equiv \left.\left(\frac{d}{dx}\right)f(x)\right|_{x_0} \equiv \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv \frac{d}{dx}f(x_0)$$

eine Physiker-Eigenart:
falls unabh. Variable Zeit ist: $\dot{f}(t_0) \equiv \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t_0}$

Der Differentialquotient als Grenzwert existiert natürlich nicht bei allen Funktionen an allen Stellen; deshalb nennt man:

$f(x)$ heisst <u>differenzierbar</u> bei x_0
⟺ der Grenzwert des Differentialquotienten existiert

→ dazu müssen die Grenzwerte "von oben" und "von unten" existieren und übereinstimmen mathematisch präzise:

eine Funktion $f: A \to B$ heisst <u>differenzierbar am Ort $x_0 \in A$</u>
$\Leftrightarrow$ $\exists$ eine Zahl $\frac{df}{dx}(x_0) \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$, so dass
$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{df}{dx}(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ mit } 0 < |x-x_0| < \delta$$

"<u>Ableitung</u> von f am Ort x_0"

((anschaulich: Funktionsgraph hat keine "Ecken und Kanten"))

<u>Bsp</u> $f(x) = |x|$
ist überall stetig* (Beweis s.u.), aber bei $x=0$ <u>nicht</u> differenzierbar,
weil $\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = +1$, und $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ ist.

<u>Bem</u>: Die Funktion heisst <u>differenzierbar auf $C \subset A$</u>, falls sie an jedem Ort $x_0 \in C$ differenzierbar ist.
Die Funktion heisst <u>stetig differenzierbar auf C</u>, falls die Ableitung $\frac{df}{dx}(x_0)$ an jedem Ort $x_0 \in C$ stetig ist.

<u>Höhere Ableitungen</u> sind rekursiv definiert:
$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x) \right) \equiv \underbrace{\frac{d^n}{dx^n} f(x) \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)}_{\text{alternative Schreibweisen}}$$
"<u>n-te Ableitung</u>"

<u>Bsp</u>
$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) := \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right)$ bzw $f''(x)$ bzw $\ddot{f}(t)$

$\frac{d^3 f}{dx^3}(x) := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}(x)\right)$ bzw $f'''(x)$ bzw $\dddot{f}(t)$

$\vdots$

(n-te Ableitung) bzw $f^{(n)}(x)$ bzw $f^{(n)}(t)$

---

* Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon$. $\Rightarrow \forall x$ mit $|x| < \delta$:
(Stetigkeit bei $x_0 = 0$) $\quad |f(x)-f(x_0)| = \big| |x| - |x_0| \big| = |x| < \varepsilon$ ∎

<u>Bsp</u> Gerade $a+bx$ ist diff'bar auf $\mathbb{R}$, mit erster Ableitung $= f'(x) = b =$ "Steigung"

Also: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := a + bx$
$a, b \in \mathbb{R}$ (beliebig aber fest)

Stetigkeit war in Übung 15 gezeigt worden.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := 1$. $\Rightarrow \forall x$ mit $0 < |x - x_0| < 1$:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{a + bx - (a + bx_0)}{x - x_0} - b \right| = \left| \frac{b(x - x_0)}{x - x_0} - b \right| = 0 < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, ist $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar.

<u>Bem</u> Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

((klar aus Def.: falls $|x - x_0| \to 0$, dann auch
$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0| \to f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad))$$

aber: Stetigkeit $\not\Rightarrow$ Diff'barkeit (s. Bsp $|x|$ oben)

Die Ableitung (Steigung) an Extrema der Fkt. ist Null:

Sei $f: A \to B$ differenzierbar am Ort $x_0 \in A$

und x_0 sei ein (lokales oder globales) Maximum oder Minimum von f.

Dann gilt $f'(x_0) = 0$

<u>Widerspruchsbeweis:</u> Angenommen, $f'(x_0) \neq 0$.

wähle $\varepsilon := \frac{|f'(x_0)|}{2}$ (>0). da f diff'bar bei x_0, $\exists \delta > 0$

mit $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall x$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon = f'(x_0) + \frac{|f'(x_0)|}{2} \qquad (*)$$

$$\text{und} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) - \varepsilon = f'(x_0) - \frac{|f'(x_0)|}{2} \qquad (**)$$

$$\text{Falls } x_0 \text{ Min, dann } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \left. \begin{array}{lll} \geq 0 & \text{für } x > x_0 & \overset{(*)}{\Rightarrow} f'(x_0) > 0 \\ \leq 0 & \text{für } x < x_0 & \overset{(**)}{\Rightarrow} f'(x_0) < 0 \end{array} \right\} \lightning$$

Falls x_0 Max analog; Also ist Annahme $f'(x_0) \neq 0$ falsch! $\blacksquare$

3.2 Ableiten als Handwerk

↳ aus der Def. der Ableitung kann man allgemeine Regeln herleiten; am besten also alle bisher bekannten Funktionen ableiten und in Tabelle sammeln...
Aus einfachen Beispielen kann man sich die Ableitungen komplizierterer Funktionen systematisch berechnen:

Die Funktionen f, g seien beide am Ort $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.
$\Rightarrow$ Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ ((falls $g(x) \neq 0$)) am Ort x diff'bar, und es gilt:

Summenregel $\quad (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Produktregel $\quad (f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel $\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$

Die Funktion g sei am Ort x und die Funktion f am Ort $g(x)$ diff'bar $\Rightarrow$ Dann ist auch $f \circ g$ am Ort x diff'bar, und es gilt:

(vgl. Ü 23) → Kettenregel $\quad [(f \circ g)(x)]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\left(\left(\text{Bem.: } \frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{d}{dg(x)} f(g(x)) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \checkmark \right)\right)$$

Bsp 1: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad ((x \neq 0 \text{ falls } n \leq 0))$

Beweis:
- für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:

  Ind.-Anfang: für $n=1$: $(x^1)' = x' \overset{\text{(s. Gerade, S.26)}}{=} 1 = 1 \cdot x^0 \checkmark$

  Ind.-Schritt: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' \underset{\text{(Produktregel)}}{=} x' \cdot x^n + x\,(x^n)' \underset{\text{(Ind.-Annahme)}}{=} 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)\,x^n \checkmark$

- für $n=0$: $(x^0)' = 1' \overset{\text{(s. Gerade)}}{=} 0 \checkmark$
- für $n<0$: $(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' \overset{\text{(Quotientenregel)}}{=} \frac{0 \cdot x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})'}{(x^{-n})^2} \overset{(-n>0)}{=} \frac{-(-n)\,x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n x^{n-1} \checkmark$