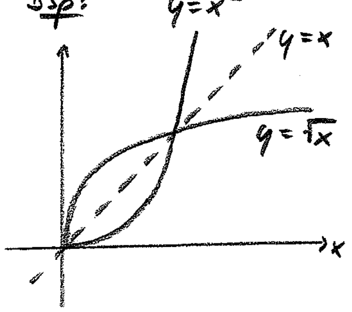
wie auch schon bei den Abbildungen, kann man für injektive Funktionen die jeweilige Umkehrfunktion definieren:

- Auflösen der Glg. $y = f(x)$ nach x gibt $x = f^{-1}(y) =: g(y)$
  ((Bem: Definitionsbereich und Wertevorrat tauschen die Rolle:
  $f: A \to B$, $g: B \to A$; $f^{-1}(f(x)) = x$ wie in Kap. 1.2))
- nach Auflösen wird die unabhängige Variable y meist wieder x genannt:
  ⇒ im Funktionsgraphen ergibt sich die Umkehrfunktion f^{-1} einfach durch Spiegelung von f an der Geraden $y = x$.
  ((klar: $(x, f(x)) \to (f(x), x)$))

Bsp:



- erhalten durch Spiegelung / Umkehrung aller bisherigen (injektiven) Funktionen also viele weitere.

2.4 Logarithmus, allgemeine Potenzen

→ Exponentialfunktion hat eine so hohe Bedeutung, dass selbst verwandte Funktionen eigene Namen bekommen (hier: Log., Potenz; Übg: hyperbol.; später: trig.).
↑ (Ü 16, 20, 24)

(vgl. Kap 2.1): $\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

streng monoton steigend ⇒ injektiv
stetig
$\exp(x \to -\infty) \to 0$, $\exp(x \to +\infty) \to \infty$
$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ ⇒ surjektiv (wegen Zwischenwertsatz)

es existiert also eine Umkehrfkt. $\exp^{-1}(x)$

$$\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x) := \exp^{-1}(x)$$

"logarithmus naturalis"

also: $\exp(\underbrace{\ln(x)}_{\in \mathbb{R}^+}) = x$, $\ln(\underbrace{\exp(x)}_{\in \mathbb{R}}) = x$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

((denn: $\ln(x \cdot y) = \ln(\exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y)) = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) = \ln x + \ln y$))

Schreibweise: oft $\ln x$ statt $\ln(x)$

Funktionsgraph:

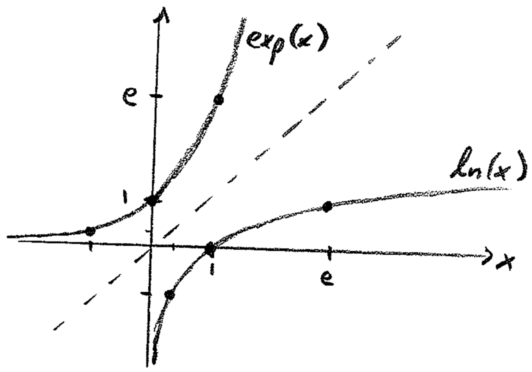
durch Spiegelung an Winkelhalbierender

$\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$

$\exp(1) = e \Rightarrow \ln(e) = 1$

$\exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \ln(\frac{1}{e}) = -1$



Nun kann man allgemeine Potenzen definieren (vgl. Kap 1.3 : $b^n, n \in \mathbb{N}$)

Für $b \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}$ sei $b^x := \exp(x \cdot \ln b)$ die x-te Potenz von b

Exponent; Basis

Eigenschaften der Potenz: ($a, b \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$b^x \cdot b^y = b^{(x+y)} = b^{x+y}$ (und $b^0 = 1$ wegen $\exp(0) = 1$)

$(b^x)^y = b^{(x \cdot y)} = b^{xy}$ (Vorsicht: $b^{(x^y)} \neq (b^x)^y$)

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$

(folgen alle aus Def. und exp-Eigenschaften)

Bem.: • für $x \in \mathbb{N}$ also alles konsistent mit b^n aus Kap. 1.3

• für $n \in \mathbb{N}$: $b^n = \prod_{k=1}^{n} b$, $b^0 = 1$, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

$\Rightarrow (b^{\frac{1}{n}})^n = b$, d.h. $\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}$ ist diejenige positive Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert b ergibt

• beachte $b \in \mathbb{R}^+$ in Potenz-Def!

Potenzgesetze für $b<0$ nicht gültig, z.B. $[(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \neq (-1)^1 = -1$

• während $b^{1/n}$ immer eindeutig definiert ist, kann die Glg. $b = x^n$ mehrere Lsn. haben

Bsp: $4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$

• b^x wird oft Exponentialfunktion zur Basis b genannt

Einige Folgerungen: $(x, y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^+)$

$e^x = \exp(x)$ Beweis: $e^x = \exp(x \underbrace{\ln e}_{=1}) = \exp(x)$

$[\exp(x)]^y = \exp(x \cdot y)$ Beweis: $[\exp(x)]^y = (e^x)^y = e^{xy} = \exp(xy)$

$\ln(z^x) = x \ln(z)$ Beweis: $\ln(z^x) = \ln(\exp(x \cdot \ln z)) = x \cdot \ln(z)$

Bsp $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x \cdot y^{-1}) = \ln(x) + \ln(y^{-1}) = \ln(x) - \ln(y)$

Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sei $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$x \to \log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$

der Logarithmus zur Basis b

Spezialfälle: $\lg(x) := \log_{10}(x)$ "logarithmus decimalis"

$\mathrm{lb}(x) := \log_2(x)$ "logarithmus dualis" ($\underline{b} \Leftrightarrow$ "$\underline{b}$inär")

$\ln(x) := \log_e(x)$ "logarithmus naturalis" s.o.

((Bem.: In der Literatur wird $\log(x)$ manchmal für $\ln(x)$, manchmal aber auch für $\lg(x)$ benutzt))

Bsp $\log_7(49) = \log_7(7^2) = \frac{\ln(7^2)}{\ln(7)} = \frac{2 \cdot \ln(7)}{\ln(7)} = 2$

Bsp $\log_{143}(143) = \frac{\ln(143)}{\ln(143)} = 1$

$\rightarrow$ (s. auch Übungen 17, 18, 19)