

wichtige Reihe: Potenzreihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Bsp: geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

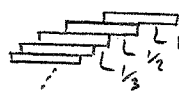
dessen Teilsummen $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (Übung 9a)

so dass der $\lim_{n \rightarrow \infty}$ für $|x| < 1$ ausföhrbar ist:

die Reihe konvergiert also, und

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x| < 1 \quad (\text{und divergiert für } |x| \geq 1)$$

Bsp: harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$



(keine Potenzreihe...)

die Folge ihrer Teilsummen ist unbeschränkt,

$$\begin{aligned} \text{denn } S_{2^n} &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} \end{aligned}$$

also divergiert die Reihe.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Reihe konvergiert, hilft oft das

Majörantenkriterium: wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass $\forall k \geq N$ $|a_k| \leq b_k$ gilt, und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(o.B., aber anschaulich klar)

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$

Beweis: wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2|x|$.

für $k \geq N$ gilt dann:

$$\left| \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{x^N}{N!} \right| \underbrace{\frac{|x|}{N+1} \dots \frac{|x|}{k}}_{(k-N) \text{ Faktoren}} \leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2} \right)^{k-N} = \underbrace{\frac{|2x|^N}{N!}}_{\text{const.}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \right)^k}_{=: b_k}$$

und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert

↳ (= geometrische Reihe mit $x = \frac{1}{2}$)

$e \approx 2,718\dots$

↳ wird oft als "Majörante" gewählt

Bem.: man nennt $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ die Exponential-Reihe

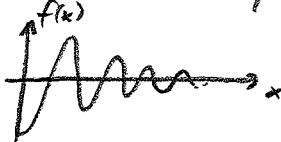
((und die Zahl e ist irrational ← Widerspruchsbeweis s. [Hofft 3.5]))

2. Funktionen

sind Abbildungen, z.B. $f: A \rightarrow B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ mit Vorschrift $x \mapsto f(x)$

→ untersuche z.B. experimentell die Abhängigkeit zweier physikalischer Größen: notiere eine Messgröße $f(x)$ (z.B. Pendelausschlag) in Abhängigkeit der Variablen x (z.B. Zeit; schreibe dann meist $f(t)$).

Die Menge aller Punkte $(x, f(x))$ der x - y -Ebene heißt den Graph von f

→ z.B. für Pendel: 

(s. Kap. 1.2)

Somit gilt alles (injektiv / surjektiv / bijektiv) wie bei Abbildungen
 ↳ anschaulich: jede Parallele zur x -Achse schneidet Graph höchstens einmal

Von den Folgen (s. Kap. 1.4) übertragen wir Monotonie und Beschränktheit, z.B.

$y = f(x)$ monoton steigend in $[a, b] \Leftrightarrow (x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
monoton fallend >

Bsp $y(x) = ax + b$ ist für $a > 0$ monoton steigend

→ erstaunlicherweise kommt man in der Physik ($\hat{=}$ Natur?!) mit sehr wenigen grundlegenden Funktionen aus.

(Die wichtigsten wollen wir nun einführen) ((Trigonometrische: später in C, §6))

Polynome: $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_m x^m = \sum_{k=0}^m a_k x^k$
 ↳ "Grad" des Polynoms

Konstanten: $m=0$; Geraden: $m=1$; Parabeln: $m=2$; ...

Rationale Funktionen: $y(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ mit Polynomen $P_m(x)$, $Q_n(x)$

Bsp: $y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

↳ Vorsicht: kann Null werden!

→ solche x aus Definitionsbereich ausschließen

((Bem.: kann manchmal $\frac{P}{Q}$ durch Kürzen vereinfachen: Polynomdivision))

2.1 Exponentialfunktion (die wichtigste^(?) Fkt. der Physik)

definieren wir durch $\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(dass die Reihe $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert, war in Kap. 1.4 gezeigt worden)

wichtigste Eigenschaften:

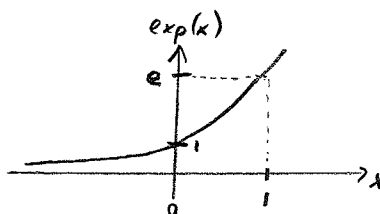
$$\exp(0) = 1 \quad (\text{klar aus Def.})$$

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y) \quad (\leftarrow \text{s. Übung 12})$$

$$\Rightarrow \exp(x) > 0$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Funktionsgraph:



2.2 Stetigkeit

"die Natur macht keine Sprünge"

→ der Graph einer "stetigen Funktion" macht keine Sprünge

$f(x)$ stetig bei x_0

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta_\varepsilon$$

anschaulich: Punkte in der Nachbarschaft von x_0
werden auf Bildpunkte in der Nachbarschaft von $f(x_0)$
abgebildet.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$ (und auf $\mathbb{R}^-$)

zeige Stetigkeit an der Stelle $x_0 > 0$:

$$\text{für } x \geq \frac{x_0}{2} \text{ gilt } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x x_0} \right| \leq \frac{2}{x_0^2} |x - x_0|$$

$$\text{so dass } \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta \text{ gilt: } \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \frac{2}{x_0^2} \delta$$

also ist mit $\delta_\varepsilon := \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2} \varepsilon\right)$ die obige
Stetigkeitsbedingung erfüllt.

Bem: • Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$, $\exp(x)$ ebenso.
(s. z.B. Übung 15 für Beweise)

- mit stetigen Funktionen kann man "rechnen":
Summe / Differenz / Produkt / Quotient stetiger Funktionen sind auch stetig
- insbesondere sind also rationale Funktionen auch stetig

Für stetige Funktionen gilt das

Zwischenwertsatz: (ohne Beweis; anschaulich klar)

Ist f stetig im Intervall I und sind $a, b \in I$,
dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.

Gilt insbesondere $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$,
so hat f zwischen a und b eine (oder 3, 5, ...) Nullstelle.

Bsp: hat die Gleichung $\exp(x) = x+2$ eine Lösung $x_0 \in [0, 2]$?

→ Ja; für $f(x) := \exp(x) - x - 2$ gilt $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$
und $f(2) = \exp(2) - 4 > 0$ ($\exp(2) = \exp(1) \cdot \exp(1) > 4$)
 $\Rightarrow$ da $\exp$ und $x+2$ stetig, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} > \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} = 2 \right)$
hat f zwischen 0 und 2 eine NS.

2.3 Symmetrien

wichtig in Naturwissenschaften: ein "symmetrisches" Problem hat meist eine symmetrische Lösung (z.B. Kristalle, ...)

Funktionen können auch Symmetrie-Eigenschaften haben, z.B.

Spiegelsymmetrie (an y-Achse):

$$f(x) \text{ gerade} \Leftrightarrow f(-x) = f(x)$$

$$\text{Bsp: } x^2; |x|$$

$$f(x) \text{ ungerade} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$$

$$\text{Bsp: } x^3; \frac{1}{x}$$

Jede Funktion kann als $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ geschrieben werden, wobei f_g, f_u gerade/ungerade ist ($\leftarrow$ s. Übung 14b)