

weiter oft verwendete Bezeichnungen:

- $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_+ :=]0, \infty[$; $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}_- :=]-\infty, 0[$
 $\mathbb{R}_0^+ := [0, \infty[$; $\mathbb{R}_0^- :=]-\infty, 0]$
- Betrag : $|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

es gelten eine Reihe von Eigenschaften, wie z.B. die

Dreiecksungleichungen $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

(vgl. Übung 8)

- Summenzeichen $\sum_{i=1}^n x_i := x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (n \in \mathbb{N})$
- Produktzeichen $\prod_{i=1}^n x_i := x_1 x_2 \dots x_n$

Fakultät $0! := 1$, $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = \prod_{k=1}^n k$

- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

Erinnerung: Rechenregeln für Potenzen

schreibe $b^n := \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n \text{ Stück}}$, nenne n "Exponent"

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow b^n b^m &= b^{n+m} \\ (b^n)^m &= b^{n \cdot m} \\ (ab)^n &= a^n b^n \end{aligned} \right\} \text{anschaulich klar über obige Definition.}$$

definiere $b^0 := 1$, $b^{-n} := \frac{1}{b^n}$

dann gelten diese Rechenregeln anschaulich für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

(später: noch allgemeiner)

Es gilt $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (← für Übung 9b)

((denn: $\Leftrightarrow \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$

$\Leftrightarrow \frac{k}{k!} \frac{n!}{(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n+1) n!}{k!(n-k+1)!} \Leftrightarrow k + (n-k+1) = n+1$ ■))

eine weitere wichtige (und nützliche) Beweismethode:

Vollständige Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und sei $A(n)$ eine Aussage, die für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ definiert ist.

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ richtig, falls man beweisen kann, dass

- Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist richtig
- Aus der Induktionsannahme, dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ richtig ist, folgt die Induktionsbehauptung, dass $A(n+1)$ richtig ist

Bsp: Es gilt $n! > 2^n$ für alle $n \geq n_0 = 4$, denn

(a) $4! = 24 > 16 = 2^4 \quad \checkmark$

(b) gelte $n! > 2^n$

$$\Rightarrow (n+1)! = (n+1)n! > (n+1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \blacksquare$$

Bsp (Bernoulli-Ungl.) $(1+h)^n \geq 1+nh$ für $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$

(a) $n=0$: $(1+h)^0 = 1 = 1+0 \quad \checkmark$

(b) gelte $(1+h)^n \geq 1+nh$

$$\Rightarrow (1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h \quad \blacksquare$$

Bsp (endliche geometrische Reihe) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Bsp (binomische Formel) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

} Beweis in
Übung 9

Bsp Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2 .

(a) $n=1$: $1 = 1^2 \quad \checkmark$

(b) gelte $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$

$$\Rightarrow 1+3+\dots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2 \quad \blacksquare$$

1.4 Folgen und Reihen $\approx$ [Heft, Kap. 3]

wichtig für Begriffe und Gesetze der Grenzprozesse

← grundlegende Bedeutung in Physik

Folge: unendliche, durchnummerierte Menge von Zahlen

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch ein Bildungsgesetz

Bsp: (F1) $1, 2, 3, 4, \dots = (n)_{n \in \mathbb{N}}$: Folge der nat. Zahlen

(F2) $1, -1, 1, -1, \dots = ((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$: eine "alternierende" Folge

(F3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \dots = (\frac{1}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$: Folge der reziproken Fakultäten

(F4) $q, q^2, q^3, q^4, \dots = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $q \in \mathbb{R}$: die "geometrische" Folge

(im Folgenden weglassen) $\rightarrow$ z.B. Zinseszins

meist interessieren uns drei Eigenschaften von Folgen:

Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz!

nützliche logische Symbole:

$\exists$	"es existiert ein"
$\exists!$	"es existiert genau ein"
$\forall$	"für alle"

(a_n) ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists B: a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists A: a_n \geq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bsp: (F1) $A=1$ (F2) $A=-1, B=1$ (F3) $A=0, B=1$

(F4) A, B abhängig von $|q|$; z.B. $0 < q < 1: A=0, B=q$

(a_n) ist monoton steigend $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

streng mon. steigend $<$

monoton fallend $>$

streng mon. fallend $>$

Bsp: (F1) streng monoton steigend (F2) nicht monoton

(F3) streng monoton fallend (F4) abh. von $|q|$

Nurde Folgen haben Häufungspunkte: beliebig viele
Folnglieder a_n häufen sich um einen Wert a

Bsp: (F1) kein H.P. (F2) zwei H.P.: ± 1 (F3) ein H.P.: 0

((klar: jede nach oben und unten beschr. Folge hat mind. einen H.P.))

Falls eine Folge nur einen H.P. a hat, kann dieser Grenzwert sein:

$$\boxed{(a_n) \text{ ist konvergent, d.h. } \exists a: \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a} \leftarrow \text{oft auch: } a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon$$

$\uparrow$
 N_ε bzw. $N(\varepsilon)$: kann jedem ε eine nat. Zahl N zuordnen

Bsp: (F3) ist konvergent, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$

denn: sei $\varepsilon > 0$, dann ist $|a_n - 0| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

((haben hier $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$: größte ganze Zahl $\leq \frac{1}{\varepsilon}$; $\text{INT}(\frac{1}{\varepsilon})$))

Eine Folge heisst divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

In der Physik sind unendliche Summen, sog. Reihen, wichtig,

z.B. $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

→ die Teilsummen $s_m = \sum_{n=1}^m a_n$, $m \in \mathbb{N}$

können wir als Folge $(s_m)_{m \in \mathbb{N}}$ auffassen,

um so Grenzwert bzw. Konvergenz zu behandeln

$$\boxed{\text{Die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m a_n = s < \infty}$$

$\uparrow$ "Grenzwert" der Reihe

Bsp: Die Reihe aus den Teilsummen von (F1) $s_m = \left(\sum_{n=1}^m n\right)_{m \in \mathbb{N}} = 1, 3, 6, 10, 15, \dots$ ist divergent