

Physik - Vorkurs WS 2011

0. Einleitung

Orga: Vorlesung täglich 9:15 - 10:50 ± ... (H6)
12.9. - 7.10.2011

Übungen täglich 11:15 - 12:45
in 4 Gruppen; Start heute 11:00 (H6)

Online www.physik.uni-bielefeld.de/~yorkes/vk11
YS, E6-118, 0521-106 6211

eKW: bitte registrieren → u.a. Email-Verteiler

Ziele: Auffrischen von Schul-Mathematik-Vorkenntnissen
→ gleiches Basisniveau bei Studienbeginn
stressfreies Erarbeiten im "Uni-betrieb"
→ remschnuppern, Appetit anregen
"Mathe-Schock" zu Studienbeginn vorbeugen

Inhalt: Zahlen, Folgen, Reihen
Beweismethoden
Funktionen, Ableitungen, Taylor-Entwicklungen
Integration
komplexe Zahlen
Vektoren, Felder, $\mathbb{R}^n$

Literatur: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs ← (online; umsonst)
C. Lang, N. Pucher, Mathematische Methoden in der Physik
etc... (s. webpage)
auch z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik

1. Grundlagen

Zur Vorbereitung auf Analysis

→ Grundbegriffe über Mengen, Abbildungen, wichtigste Zahlbereiche, mathematisches Schliessen, elementare Funktionen

1.1 Mengen

→ Begriffe, "Vokabeln", Sprech- und Schreibweisen der Mengenlehre

logische Beziehungen:

$A \Rightarrow B$: "Aussage A impliziert Aussage B"

bzw "Aus A folgt B"

bzw "Wenn A, dann B"

Bedeutung: wenn A wahr ist, ist auch B wahr.

man sagt auch: A ist eine hinreichende Bedingung für B

bzw: B ist eine notwendige Bedingung für A

$A \Leftrightarrow B$: "A äquivalent B"

bzw "A gilt genau dann, wenn B gilt"

bzw "A gilt dann und nur dann, wenn B gilt"

Bedeutung: $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

A oder B : A ist wahr, oder B ist wahr, oder A und B sind wahr

((vgl. mit "entweder A oder B": A, B schliessen sich aus))

A und B ; nicht A : anschaulich klar

Menge: Zusammenfassung M von wohlunterschiedenen Objekten

$x \in M \Leftrightarrow x$ ist ein Element von M

$y \notin M \Leftrightarrow y$ ist kein Element von M

wir benutzen oft folgende Bezeichnungen:

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen (genauer: s. unten)

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen $\{ \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \}$

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\{ 0, 1, -1, 2, -2, \dots \}$

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\{ 1, 2, 3, \dots \}$

$\mathbb{N}_0$ Menge der Zahlen $\{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$

übliche Schreibweisen für Mengen:

Auflistung aller Elemente, z.B. $M = \{ 2, 3, 5, 7 \}$

(Reihenfolge egal! Doppelte Auflistung auch egal.)

per Bedingung: $M = \{ x \mid \dots \text{(Bedingung an } x) \dots \}$

z.B. $M = \{ n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist einstellige Primzahl} \}$

oder $M = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = 0 \} = \{ 0, 4 \}$

Beziehungen zwischen zwei Mengen A, B :

$A \subset B \Leftrightarrow A$ ist Teilmenge von B

" A enthalten in B "

(schließt den Fall $A=B$ mit ein; manchmal $\subseteq$)

$\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$

können auch $B \supset A$ schreiben

Bsp: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ und } x \in B \}$

Durchschnitt



$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ oder } x \in B \}$

Vereinigung



$A \setminus B = \{ a \in A \mid a \notin B \}$

Differenz



A, B disjunkt $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\uparrow$ leere Menge

z.B. $\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0 \}$

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{kartesisches Produkt}$$

Bsp: $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$; denke (a, b) als Punkte einer Ebene

$$A \times B = \mathbb{R}^2$$

einige Rechenregeln der Mengenalgebra (folgen aus obigen Def's):

$$\left. \begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \right\} \text{Distributivgesetze}$$

$$\left. \begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned} \right\} \text{Assoziativitätsgesetze}$$

$$\left. \begin{aligned} C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned} \right\} \text{de Morgan'sche Regeln}$$

(Bem: die Differenz ist nicht assoziativ, denn:

$$\text{sei } A := \{a\}, \text{ dann } A \setminus (A \setminus A) = A \setminus \emptyset = A$$

$$\text{aber } (A \setminus A) \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset)$$

1.2 Abbildungen

Seien M, N nichtleere Mengen.

eine Abbildung (oder Funktion) $f: M \rightarrow N$

Definitionsbereich
Zielmenge

ist eine Vorschrift $x \mapsto f(x)$, die jedem $x \in M$ genau einen Element $f(x) \in N$ zuordnet.

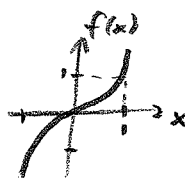
((Bem: "Funktion" benutzt man eher für Zahlen;
"Abbildung" eher für geometrische Zusammenhänge;
im Prinzip beides möglich / richtig.))

Bsp: $f: M \rightarrow M$ mit $x \mapsto x$

ist die Identität, oder identische Abbildung auf M , 1_M

Bsp: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$

ist die Funktion



Man nennt $\{f(x) \mid x \in M\}$ den Wertevorrat (bzw. die Bildmenge) der Abbildung $f: M \rightarrow N$.

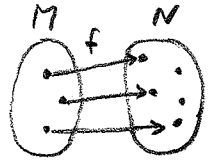
Eine Abbildung (oder Fkt.) $f: M \rightarrow N$ heißt

- injektiv (bzw. eindeutig)

$$\Leftrightarrow (x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

$$\text{bzw. } (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

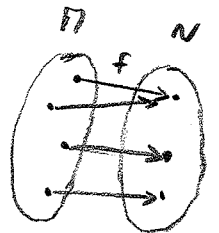
d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ hat höchstens eine Lösung $x \in M$



- surjektiv

$$\Leftrightarrow N \text{ ist die Bildmenge von } f$$

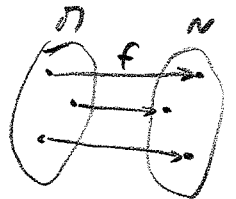
d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ hat mindestens eine Lösung $x \in M$



- bijektiv

$$\Leftrightarrow f \text{ ist injektiv und surjektiv}$$

d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ hat genau eine Lösung $x \in M$



Bsp $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (denn $f(1) = f(-1)$)

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ ist surjektiv

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ ist bijektiv

→ mehr Bsp: s. Übung

bezeichne dieses x mit $g(y)$; haben also Abbildung $g: N \rightarrow M$, und es ist $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$

Sowie $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$

g nennt man deshalb Umkehrabbildung zu f

((Bezeichnung ist üblicherweise f^{-1} [nicht verwechseln mit $\frac{1}{f}$!]))

Diese Umkehrabbildung g ist auch bijektiv:

- g surjektiv, da $g(f(x)) = x$
- g injektiv, denn aus $g(y_1) = g(y_2)$

$$\text{folgt } y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$$

↙ "Beweisende"

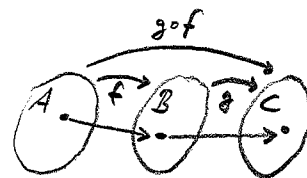
Seien $f: A \rightarrow B$ und $g: B \rightarrow C$ zwei Abbildungen.

Man nennt dann $g \circ f: A \rightarrow C$

$$\text{mit } (g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für } x \in A$$

die Komposition von g mit f
(bzw. Hintereinanderausführung)

lese $g \circ f$ als "g nach f"



Bsp $f: \mathbb{R} \rightarrow]0, \infty], x \mapsto e^x$ ← (Funktionen: s. später)

$g:]0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x)$ ←

$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ ist die Identität auf $\mathbb{R}$: $g \circ f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow$ entsprechend ist $f \circ g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_{>0}}$

1.3 Zahlen

→ brauchen wir z.B. zur Darstellung von Messwerten!

Bem.: eine physikalische Größe besteht aus
Messwert und Maßeinheit (= Zahlenwert + Dimension)

↑ über Maßstab definiert

z.B. Meter ~ Lichtstrecke

Sekunde ~ Periodendauer Cs-133

Zahlen! ← Gegenstand der Mathematik

Abstraktion: "Geisteswissenschaft"

↳ logische Struktur, Vollgeneralisierungen

((für Messwerte hätte $\mathbb{Q}$ genügt))