Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 17**	5.10.2011

Aufgabe 65:

Betrachten Sie das Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \phi(\vec{x}) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, und berechnen Sie dessen *partielle Ableitungen*

(a) $\dfrac{\partial \phi(\vec{x})}{\partial x_k}$ und $\dfrac{\partial^2 \phi(\vec{x})}{\partial x_k^2}$ für $k = 1, 2, 3$

(b) $\dfrac{\partial^2 \phi(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2}$ und $\dfrac{\partial^2 \phi(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1}$

Aufgabe 66:

Bestimmen Sie für das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) := x_1^3 + 2x_1x_2x_3$

(a) das Vektorfeld $\operatorname{grad} f(\vec{x}) := \vec{\nabla} f(\vec{x}) := \left(\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_3}\right)$

(b) das Skalarfeld $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f(\vec{x})\right) := \Delta f(\vec{x}) := \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\vec{x}) + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\vec{x}) + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} f(\vec{x})$

[Sprechweise: grad heisst *Gradient*; $\vec{\nabla}$ heisst *Nabla-Operator*; Δ heisst *Laplace-Operator*.]

Aufgabe 67:

Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{g}(\vec{x}) := (x_2^3 , x_1 , x_1x_2x_3)$

(a) das Skalarfeld $\operatorname{div}\left(\vec{g}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{x}) := \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \dfrac{\partial g_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \dfrac{\partial g_3(\vec{x})}{\partial x_3}$

(b) das Vektorfeld $\operatorname{rot}\left(\vec{g}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{x}) := \left(\dfrac{\partial g_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2(\vec{x})}{\partial x_3}, \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \dfrac{\partial g_3(\vec{x})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_2}\right)$

[Bezeichnung: div heisst *Divergenz*; rot heisst *Rotation*.]

Aufgabe 68: (*)

Können Sie beweisen, dass für jedes zweimal stetig differenzierbare Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Beziehung $\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad} \phi(\vec{x})\right) = \vec{0}$ gilt?