

Aufgabe 57:

- (a) Berechnen Sie $e^{i3\pi/2}$, $\arg(i)$, $\ln(i)$, $\sqrt[3]{i}$, i^i
 (b) Zeigen Sie, dass $b^z = |b|^z e^{iz \arg(b)}$ für $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{C}$
 (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen $z_1, \dots, z_n$ des Polynoms $P(z) = z^n - 1$ für $n \geq 2$ in der Form $z_k = |z_k| e^{i \arg(z_k)}$

Aufgabe 58:

Betrachten Sie den *euklidischen Vektorraum* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und komponentenweiser Addition $\vec{v} + \vec{w} = (v_1, v_2, \dots, v_n) + (w_1, w_2, \dots, w_n) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n)$ und Multiplikation $x \cdot \vec{v} := (xv_1, xv_2, \dots, xv_n)$ (wobei $x \in \mathbb{R}$), sowie Nullvektor $\vec{0} := (0, 0, \dots, 0)$ und (add.) inversem Element $-\vec{v} := (-1) \cdot \vec{v}$ wie in der Vorlesung.

Zeigen Sie (durch einfaches Einsetzen), dass die *Vektorraum-Axiome* gelten:

- (1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- (2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- (3) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
- (4) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
- (5) $x \cdot (y \cdot \vec{v}) = (xy) \cdot \vec{v}$
- (6) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$
- (7) $x \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = x \cdot \vec{u} + x \cdot \vec{v}$
- (8) $(x + y) \cdot \vec{v} = x \cdot \vec{v} + y \cdot \vec{v}$

Aufgabe 59: (*)

Sei $V := \left\{ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!} \mid c_k \in \mathbb{R}, c_k \text{ so dass Potenzreihe konvergent} \right\}$

die Menge aller reellen Potenzreihen auf dem Intervall $[0, 1]$.

- (a) Können Sie eine geeignete Addition zweier Elemente aus V und eine geeignete äussere Multiplikation mit reellen Zahlen so definieren, dass $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum wird?

[Bem.: dies ist ein sog. *Funktionsraum*; Vektoren sind statt mit $\vec{v}, \vec{w}, \dots$ mit $f(x), g(x), \dots$ bezeichnet.]

- (b) Was ist eine geeignete Basis dieses Vektorraumes? Was ist seine Dimension?

Aufgabe 60:

Es sei eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (das sogenannte *Skalarprodukt*) definiert durch $\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \cdot (w_1, w_2, \dots, w_n) := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n$.

Zeigen Sie (wieder durch einfaches Einsetzen), dass die sog. *Skalarprodukt-Axiome* gelten:

- (1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
- (2) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$, und $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$
- (3) $(x\vec{v}) \cdot \vec{w} = x(\vec{v} \cdot \vec{w})$
- (4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$