| Übungen zum Vorkurs Physik | **Blatt Nr. 10** | 23.9.2011 |
|---|---|---|

**Aufgabe 37:**

Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe einer Formelsammlung (z.B. *Bronstein*):

(a) $\int_0^{1/2} \mathrm{d}x \, x^2 \sqrt{1-4x^2}$

(b) $\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{x}\,(4-x)}$

[Hinweis: eventuell hilft dabei eine einfache Substitution wie z.B. $y = \alpha\, x$.]

**Aufgabe 38:**

Die sogenannte *Euler'sche Gammafunktion* ist definiert als

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \, e^{-t}\, t^{x-1} \; .$$

Zeigen Sie, dass:

(a) $\Gamma(x)$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}^+$.

(b) $\Gamma(1) = 1$

(c) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$

(d) $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$

[Bemerkung: $\Gamma(x+1)$ ist also die Verallgemeinerung der Fakultät $x!$ für $x \in \mathbb{R}^+$.]

**Aufgabe 39:**

Können Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bestimmen?

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, x^n \, e^{-|x|}$ für $n \in \mathbb{N}$ [**Ü38** hilft]

(*) (b) $\int_1^{\infty} \mathrm{d}x \, x^2 \, e^{-x^2}$

(*) (c) $\int_0^{\infty} \mathrm{d}x \, x \, e^{-x^4}$

[Hinweis: für (b,c) können Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ und $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{d}x \, e^{-x^2} =: \mathrm{erf}(z)$ benutzen.]

**Aufgabe 40:**

(a) Berechnen Sie die *Momente* $M_n := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, y^n \, p(y)$
der *Normalverteilung* $p(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, e^{-y^2/2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(*) (b) Die Funktion $f(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, g(y) \, e^{y\,x}$ sei konvergent für alle $x$ nahe $0$.
Schreiben Sie das n-te Moment $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \, y^n \, g(y)$ von $g(y)$ als Ableitung von $f(x)$.
[Dieses allgemeine Verfahren heisst *Integrieren durch Differenzieren*; vgl. auch **Ü29a**.]

(*) (c) Mit der Methode aus (b) könnten Sie nun auch (a) lösen.