

### Aufgabe 29:

Die unendliche Reihe  $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k e^{kx}$  sei für alle  $x$  nahe 0 konvergent.

(a) Drücken Sie die unendlichen Reihen  $f_n := \sum_{k=0}^{\infty} k^n p_k$  durch Ableitungen von  $f(x)$  aus.

[Dieses allgemeine Verfahren heisst *Summieren durch Differenzieren*.

Hier ist  $f(x)$  die *erzeugende Funktion* der  $n$ -ten Momente  $f_n$ .]

(b) Bestimmen Sie  $\sum_{k=0}^n k q^k$  für  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$  [vgl. **Ü9a**].

(c) Können Sie  $\sum_{k=0}^n k^m$  für  $m = 0, 1$  mit Hilfe der Regel von de l'Hospital berechnen?

[Idee:  $k^m = \lim_{q \rightarrow 1} k^m q^k$ , und weiter via **Ü9a** bzw **Ü29b**.]

### Aufgabe 30:

Elementare Umformungen (z.B. Verschieben, Skalieren, Potenzreihe benutzen) und geometrisch-anschauliche Überlegungen (z.B. gerade/ungerade) reichen aus, um die Werte der folgenden Integrale zu bestimmen [Hauptsatz hier unrentabel].

$$J_1 = \int_0^4 dx \left( 5 - 3|x-2| \right) \quad , \quad J_2 = \int_0^3 dx \left[ 1 + \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) \right]$$

$$J_3 = \int_0^6 dx \left( \frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{(x-2)^2}{x^2-4x+5} \right) \quad , \quad J_4 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{15\varepsilon} dx \frac{x \cosh(x) - \sinh(x)}{\varepsilon x^3}$$

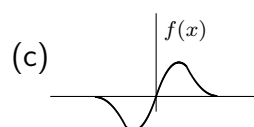
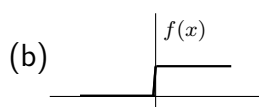
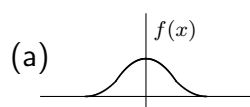
$$J_5 = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_a^{a+2} dx \left( x \sqrt{4+x^2} - x^2 \right)$$

$$J_6 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^\varepsilon dx \frac{2}{x \varepsilon^2} \left( \cosh(2x) - \sqrt{1 + 2\sqrt{6x} \sinh(x) - 6x^2} \right)$$

### Aufgabe 31:

Skizzieren Sie zu den folgenden Funktionen  $f(x)$  je eine Stammfunktion  $F(x)$ :

[Hinweis: Stammfunktion ist diejenige Funktion  $F(x)$ , welche  $F'(x) = f(x)$  erfüllt.]



### Aufgabe 32:

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale (Stammfunktion raten und per Ableitung beweisen):

(a)  $\int_0^a dx \frac{1}{x^{1-a}}$  wobei  $a > 1$

(b)  $\int_0^1 dx (1-x^2)^2$

(c)  $\int_0^1 dx \sqrt{1+2x}$

(d)  $\int_{-a}^a dx \sinh(bx)$  mit  $a, b \in \mathbb{R}$  [Nachdenken lohnt sich hier vor dem Rechnen]