

Aufgabe 5:

Können Sie die folgenden zwei Aussagen für jede irrationale Zahl x (d.h. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) und jede rationale Zahl $y \in \mathbb{Q}$ beweisen?

(a) $x + y \notin \mathbb{Q}$

(b) $x \cdot y \notin \mathbb{Q}$ für $y \neq 0$

[Hinweis: am einfachsten ist ein Widerspruchsbeweis.]

$\Rightarrow$ es gibt also "viel mehr" irrationale Zahlen als rationale Zahlen.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass es zu jeder irrationalen Zahl x eine rationale Zahl y gibt, die beliebig nahe an x liegt.

[Beweisidee: Stelle x als Dezimalzahl dar. Finde zu beliebigem (aber festem) $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl y , deren Unterschied zu x weniger als $\frac{1}{10^n}$ beträgt.]

$\Rightarrow$ die rationalen Zahlen liegen also "dicht" in $\mathbb{R}$: zwar fehlen in $\mathbb{Q}$ viel mehr Zahlen als $\mathbb{Q}$ selbst enthält, aber die "Lücken" sind alle "unendlich klein".

Aufgabe 7:

Beweisen Sie, dass jede ultimativ periodische Dezimalzahl x rational ist.

[Hinweis: Stelle x als $x = z_0, z_1 z_2 \dots z_n z_{n+1} \dots z_{n+k} z_{n+1} \dots z_{n+k} \dots$ dar, wobei die Zahl links vom Komma $z_0 \in \mathbb{Z}$ ist, und alle Nachkommastellen $z_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ sind. Die Periode ist dann $k \in \mathbb{N}$. Betrachte nun $y = x \cdot 10^k - x$.]

$\Rightarrow$ es gibt also "viel mehr" nicht-periodische als periodische Dezimalzahlen.

Aufgabe 8:

Die Betragsfunktion sei definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann Folgendes gilt:

(a) $|x| \geq 0$

(b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$

(e) $|x - y| \geq ||x| - |y||$

(f) $|x - y| \leq \varepsilon \Leftrightarrow y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$, für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$