Physik-Vorkurs WS 2011

0. Einleitung

Orga: Vorlesung täglich 9:15 – 10:50 ± ... (H6)
12.9. – 7.10.2011

Übungen täglich 11:15 – 12:45
in 4 Gruppen; Start heute 11:00 (H6)

Online www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/vk11

YS, E6-118, 0521-106 6211

eKVV: bitte registrieren → u.a. Email-Verteiler

Ziele: Auffrischen von Schul-Mathematik-Vorkenntnissen
→ gleiches Basisniveau bei Studienbeginn
Stressfreies Einarbeiten in "Uni-Betrieb"
→ reinschnuppern, Appetit anregen
"Mathe-Schock" zu Studienbeginn vorbeugen

Inhalt: Zahlen, Folgen, Reihen
Beweismethoden
Funktionen, Ableitungen, Taylor-Entwicklungen
Integration
komplexe Zahlen
Vektoren, Felder, $\mathbb{R}^n$

Literatur: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs ← (online; umsonst)
C. Lang, N. Pucker, Mathematische Methoden in der Physik
etc ... (s. webpage)
auch z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik

1. Grundlagen

zur Vorbereitung auf Analysis
→ Grundbegriffe über Mengen, Abbildungen, wichtigste Zahlbereiche, mathematisches Schliessen, elementare Funktionen

1.1 Mengen

→ Begriffe, "Vokabeln", Sprech- und Schreibweisen der Mengenlehre

logische Beziehungen:

$A \Rightarrow B$: "Aussage A impliziert Aussage B"
bzw "Aus A folgt B"
bzw "Wenn A, dann B"
Bedeutung: wenn A wahr ist, ist auch B wahr.
man sagt auch: A ist eine hinreichende Bedingung für B
bzw: B ist eine notwendige Bedingung für A

$A \Leftrightarrow B$: "A äquivalent B"
bzw "A gilt genau dann, wenn B gilt"
bzw "A gilt dann und nur dann, wenn B gilt"
Bedeutung: $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

A oder B : A ist wahr, oder B ist wahr,
oder A und B sind wahr
((vgl. mit "entweder A oder B": A, B schliessen sich aus))

A und B ; nicht A : anschaulich klar

Menge: Zusammenfassung M von wohlunterschiedenen Objekten

$x \in M \Leftrightarrow x$ ist ein Element von M

$y \notin M \Leftrightarrow y$ ist kein Element von M

wir benutzen oft folgende Bezeichnungen:

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	(genaueres: s. unten)
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen	$\{ p/q ,\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen	$\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	Menge der Zahlen $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$	

übliche Schreibweisen für Mengen:

Auflistung aller Elemente, z.B. $M = \{2, 3, 5, 7\}$

(Reihenfolge egal! Doppelte Auflistung auch egal.)

per Bedingung: $M = \{x \mid \dots \text{(Bedingung an } x) \dots\}$

z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist einstellige Primzahl}\}$

oder $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = 0\} = \{0, 4\}$

Beziehungen zwischen zwei Mengen A, B:

$A \subset B \Leftrightarrow A$ ist Teilmenge von B

"A enthalten in B"

(schließt den Fall $A = B$ mit ein; manchmal $\subseteq$)

$\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow a \in B)$

können auch $B \supset A$ schreiben

Bsp: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ Durchschnitt 

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Vereinigung 

$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ Differenz 

A, B disjunkt $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\uparrow$ leere Menge

z.B. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ kartesisches Produkt

Bsp: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$; deute (a,b) als Punkte einer Ebene

$A \times B = \mathbb{R}^2$

einige Rechenregeln der Mengenalgebra (folgen aus obigen Def's):

$$\left.\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}\right\} \text{Distributivgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}\right\} \text{Assoziativitätsgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned}\right\} \text{de Morgan'sche Regeln}$$

(Bem: die Differenz ist nicht assoziativ, denn:

sei $A := \{a\}$, dann $A \setminus (A \setminus A) = A \setminus \emptyset = A$

aber $(A \setminus A) \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset$)

1.2 Abbildungen

Seien M, N nichtleere Mengen.

eine Abbildung (oder Funktion) $f: \overset{\text{Definitionsbereich}}{M} \to \overset{\text{Zielmenge}}{N}$

ist eine Vorschrift $x \mapsto f(x)$, die jedem $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

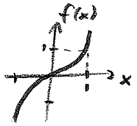
((Bem.: "Funktion" benutzt man eher für Zahlen; "Abbildung" eher für geometrische Zusammenhänge; im Prinzip beides möglich / richtig.))

Bsp: $f: M \to M$ mit $x \mapsto x$

ist die Identität, oder identische Abbildung auf M, $\mathbb{1}_M$

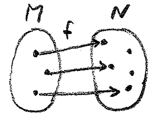
Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$

ist die Funktion



Man nennt $\{f(x) \mid x \in M\}$ den Wertevorrat (bzw. die Bildmenge) der Abbildung $f: M \to N$.

Eine Abbildung (oder Fkt.) $f: M \to N$ heisst

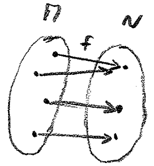


- injektiv (bzw. eineindeutig)

  $\Leftrightarrow \left(x_1, x_2 \in M,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$

  bzw. $\left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$

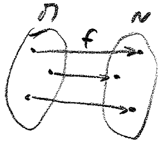
  d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ hat höchstens eine Lösung $x \in M$



- surjektiv

  $\Leftrightarrow$ N ist die Bildmenge von f

  d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ hat mindestens eine Lösung $x \in M$



- bijektiv

  $\Leftrightarrow$ f ist injektiv und surjektiv

  d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$ hat genau eine Lösung $x \in M$

Bsp $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv (denn $f(1) = f(-1)$)
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist surjektiv
$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist bijektiv

→ mehr Bsp: s. Übung

bezeichne dieses x mit $g(y)$; haben also Abbildung $g: N \to M$, und es ist $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$

sowie $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$

g nennt man deshalb Umkehrabbildung zu f

((Bezeichnung ist üblicherweise f^{-1} [nicht verwechseln mit $\frac{1}{f}$!]))

Diese Umkehrabbildung g ist auch bijektiv:

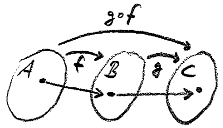
- g surjektiv, da $g(f(x)) = x$
- g injektiv, denn aus $g(y_1) = g(y_2)$

  folgt $y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$ ▪ "Beweisende"

Seien $f: A \to B$ und $g: B \to C$ zwei Abbildungen.

Man nennt dann $g \circ f: A \to C$

mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für $x \in A$



die Komposition von g mit f

(bzw. Hintereinanderausführung)

lese $g \circ f$ als "g nach f"

Bsp $f: \mathbb{R} \to]0,\infty],\ x \mapsto e^x$ ((Funktionen: s. später))
$g:]0,\infty] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$
$\Rightarrow g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ ist die Identität auf $\mathbb{R}$: $g \circ f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow$ entsprechend ist $f \circ g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}>0}$

1.3 Zahlen

→ brauchen wir z.B. zur Darstellung von Messwerten!

Bem.: eine physikalische Größe besteht aus Messwert und Maßeinheit (= Zahlenwert + Dimension)

↑ über Maßstab definiert
z.B. Meter ~ Lichtstrecke
Sekunde ~ Periodendauer Cs-133

Zahlen! ← Gegenstand der Mathematik

Abstraktion: "Geisteswissenschaft"

└ logische Struktur, Verallgemeinerungen

((für Messwerte hätte $\mathbb{Q}$ genügt))

$\boxed{\mathbb{N}}$: Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
nützlich zum Zählen: # Teilchen etc.

Zwei innere Verknüpfungen, die $a, b \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{N}$ zuordnen:

- Addition $a + b = x \in \mathbb{N}$
  mit $a + b = b + a$ (Kommutativität)
  und $a + (b+c) = (a+b) + c$ (Assoziativität)
- Multiplikation $a \cdot b$ oder $ab = x \in \mathbb{N}$
  mit $ab = ba$ (Komm.)
  und $a(bc) = (ab)c$ (Ass.)
  sowie $1a = a$ (neutrales Element; Eins)

→ sind verbunden durch $(a+b)c = ac + bc$ (Distributivgesetz)

((Bem: oft sinnvoll, die Null 0 hinzuzunehmen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$;
dann hat auch Addition ein eindeutig bestimmtes
neutrales Element: $0 + a = a$ (neutr. Element; Null)))

die "elementarsten" natürlichen Zahlen:
eine Primzahl $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat nur triviale Teiler: 1 und p.

→ "Fundamentalsatz der Zahlentheorie" (ohne Beweis):
Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ lässt sich bis auf die
Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Bedeutung der Primzahlen: z.B. Kryptographie (RSA-Verschlüsselung)

$\boxed{\mathbb{Z}}$: Menge der ganzen Zahlen $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
nützlich für Haben/Soll: Schulden ...
$a + x = b$ hat nicht für alle $a, b \in \mathbb{N}$ Lsg $x \in \mathbb{N}$
z.B. $2 + x = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

→ Die Gleichung $a + x = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ genau
eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ (denn $x = b + \underbrace{(-a)}_{\text{"Inverses" zu a}}$).
Man sagt, $\mathbb{Z}$ sei abgeschlossen bezüglich der Addition.

→ zentraler Begriff in der Mathematik: z.B.
eine Gruppe ist eine Menge von Objekten $\downarrow$ $\mathbb{Z}$
die abgeschlossen ist bzgl. einer inneren Verknüpfung, "+"
für welche ein assoziatives Gesetz gilt, $a+(b+c)=(a+b)+c$
die genau ein neutrales Element besitzt, "0"
und die zu jedem Element genau ein Inverses hat. "$-a$"

((Bem: gilt auch ein kommutatives Gesetz, $a+b=b+a$
nennt man die Gruppe abelsch))

→ Gruppen haben große Bedeutung in Physik: Symmetrien!

$\boxed{\mathbb{Q}}$: Menge der rationalen Zahlen $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$
nützlich beim Teilen
wollen auch Gleichung $a \cdot x = b$ innerhalb der Menge lösen

→ damit gibt es auch ein inverses Element bzgl.
der Multiplikation, nämlich a' mit $a \cdot a' = 1$.
$\mathbb{Q}$ ist also (abelsche) Gruppe bzgl. Addition und Multiplikation

((Bem: wenn noch das Distributivgesetz gilt,
nennt man dies einen Körper;
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper))

Bem.: streng genommen wird eine rationale Zahl immer durch eine ganze Klasse von $\frac{p}{q}$ dargestellt, z.B. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$; wir wollen jeweils gekürzte Brüche als Darstellung wählen

Die Ausdivision von $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ führt auf endliche oder (alternativ) periodische Dezimalzahlen (← Beweis s. Übung 7)

Bsp.: $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{11} = 0{,}090909\ldots = 0{,}\overline{09}$

Bem.: Physik → Messwerte mit Fehler

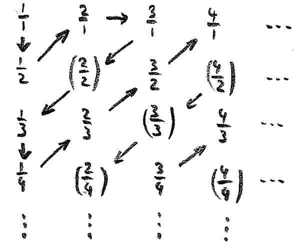
z.B. bedeutet $x = 2{,}472(12)$

dass $x = 2{,}472 \pm 0{,}012$ ist

bzw. dass x mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $2{,}460 \leq x \leq 2{,}484$ liegt.

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (d.h. die rationalen Zahlen lassen sich durchnummerieren)

$\Rightarrow$ das heisst auch, dass $\mathbb{Q}$ nicht mehr Elemente als $\mathbb{N}$ hat.



← Schema zur Nummerierung von $\mathbb{Q}_{>0}$: Pfeilen folgen, doppelte (eingeklammerte) Darstellungen übergehen

$\rightarrow r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = 2,\ r_4 = 3,\ r_5 = \frac{1}{3}, \dots$

$\mathbb{Q}$ ist dann $\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper, d.h. für jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt genau eine der Relationen $x > 0,\ x = 0,\ -x > 0$, so dass $(x > 0, y > 0) \Rightarrow \begin{cases} x + y > 0 \\ x \cdot y > 0 \end{cases}$.

Rechnen mit Relationen (Ungleichungen): (s. auch Übung 8)

$x > y \Leftrightarrow x - y > 0$

$x < y \Leftrightarrow y > x$

$x \leq y \Leftrightarrow x < y$ oder $x = y$

$x < y \Leftrightarrow -x > -y$

$x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

$x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$

(Ungleichungen dürfen addiert werden)

$0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1},\ \frac{y}{x} > 1$

$\boxed{\mathbb{R}}$: Menge der reellen Zahlen $\mathbb{Q} \cup \{$unendliche Dezimalzahlen$\}$

Zusätzlich: stopft die $\mathbb{Q}$-Lücken auf Zahlengerade, enthält π, e, Wurzeln (d.h. Lsn von $x^2 = a$ etc)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein angeordneter Körper

→ es gelten alle bisherigen Rechenregeln wie für $\mathbb{Q}$.

Zahlen $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \mathbb{Q}$ nennt man irrational

→ warum reicht $\mathbb{Q}$ nicht aus?

gibt es überhaupt irrationale Zahlen?

→ Ja! (sogar "viel mehr" als in $\mathbb{Q}$ sind, vgl. Übung 5)

Behauptung: für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $p \in \mathbb{N}$ Primzahl ist $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: (durch Widerspruch)

Annahme: $\sqrt[n]{p} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow p b^n = a^n$

$a \in \mathbb{Z}$

$b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$a \neq 0,\ a \neq 1$ denn $p \geq 2$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA): $a, b > 0$

Fall 1 $(b \neq 1)$: $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Fund. Satz: a, b haben eindeutige Primfaktorzerlegung

$p b^n, a^n$ haben identische Primfaktorzerlegung

$p b^n, a^n$ können aber nicht gleichviele p enthalten.

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Annahme!

Fall 2 $(b=1)$: $p = a^n$

Fund.Satz: beide Seiten haben identische Primfaktorzerlegung aber a^n hat mindestens 2 Faktoren $\Rightarrow$ Widerspruch!

$\Rightarrow$ da also die Annahme $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$ zum Widerspruch führt, muss $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$ gelten

((Bem.: Der Widerspruchsbeweis ist eine sehr wichtige Methode; vgl. Ü5))

Bezeichnungen: Intervalle. seien $a<b$ in $\mathbb{R}$

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ geschlossenes Int.

$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$, analog $[a,b[$ halboffenes Int.

$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Int.

benutzen oft auch das Symbol ∞ (Unendlich), wobei ∞ "größer als jede Zahl" ist.

$\Rightarrow$ $a < \infty$ bedeutet also, dass a endlich ist.

z.B.: $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ etc.

$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

Im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R}$ "vollständig", d.h. die reellen Zahlen stellen den Zahlenstrahl "lückenlos" dar.

((Bem.: mathematisch benötigt man das Supremumsaxiom, um diese Lückenlosigkeit zu zeigen; hier sind wir mit der Darstellung von $\mathbb{R}$ als Dezimalzahlen zufrieden.))

- diese Lückenlosigkeit ermöglicht dann die Analysis: differenzieren etc, s. später
- $\mathbb{Q}$ liegt "dicht" in $\mathbb{R}$, d.h. in jedem (noch so kleinen) Intervall $]a,b[$ gibt es unendlich viele rationale Zahlen!

  Beweis: s. Übung 6

  $\Rightarrow$ die "Lücken" auf der Zahlengerade sind unendlich klein.

  ((Bem.: zwischen zwei rationalen Zahlen liegt eine (sogar ∞ viele) weitere, denn $p,q \in \mathbb{Q}$, $p<q$ $\Rightarrow$ $p < \frac{p+q}{2} < q$))

---

weitere oft verwendete Bezeichnungen:

- $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_+ :=]0,\infty[$; $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}_- :=]-\infty,0[$

  $\mathbb{R}_0^+ := [0,\infty[$; $\mathbb{R}_0^- :=]-\infty,0]$
- Betrag: $|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \ge 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

  es gelten eine Reihe von Eigenschaften, wie z.B. die Dreiecksungleichungen $\big||a|-|b|\big| \le |a \pm b| \le |a|+|b|$

  (vgl. Übung 8)
- Summenzeichen $\sum_{i=1}^{n} x_i := x_1 + x_2 + \dots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$

  Produktzeichen $\prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 x_2 \cdots x_n$

  Fakultät $0! := 1$, $n! := 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k$
- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

Erinnerung: Rechenregeln für Potenzen

schreibe $b^n := \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Stück}}$, nenne n "Exponent"

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow b^n b^m &= b^{n+m} \\ (b^n)^m &= b^{n \cdot m} \\ (ab)^n &= a^n b^n \end{aligned}\right\} \text{ anschaulich klar über obige Definition.}$$

definiere $b^0 := 1$, $b^{-n} := \frac{1}{b^n}$

dann gelten diese Rechenregeln anschaulich für alle $n,m \in \mathbb{Z}$

(später: noch allgemeiner)

Es gilt $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (← für Übung 9b)

((denn: $\Leftrightarrow \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$

$\Leftrightarrow \frac{k\ n!}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\ (n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)\ n!}{k!\,(n-k+1)!}$ $\Leftrightarrow k + (n-k+1) = n+1$ ■))

eine weitere wichtige (und nützliche) Beweismethode:

Vollständige Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und sei $A(n)$ eine Aussage, die für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ definiert ist.
Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ richtig, falls man beweisen kann, dass

(a) Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist richtig

(b) Aus der Induktionsannahme, dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ richtig ist, folgt die Induktionsbehauptung, dass $A(n+1)$ richtig ist

Bsp: Es gilt $n! > 2^n$ für alle $n \geq n_0 = 4$, denn

(a) $4! = 24 > 16 = 2^4$ ✓

(b) gelte $n! > 2^n$

$\Rightarrow (n+1)! = (n+1)\, n! > (n+1) 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ ∎

Bsp (Bernoulli-Ungl.) $(1+h)^n \geq 1 + nh$ für $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$

(a) $n=0$: $(1+h)^0 = 1 = 1+0$ ✓

(b) gelte $(1+h)^n \geq 1+nh$

$\Rightarrow (1+h)^{n+1} = (1+h)^n (1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$ ∎

Bsp (endliche geometrische Reihe) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Bsp (binomische Formel) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

} Beweis in Übung 9

Bsp Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2.

(a) $n=1$: $1 = 1^2$ ✓

(b) gelte $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

$\Rightarrow 1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ ∎

1.4 Folgen und Reihen

≈ [Heft, Kap. 3]

wichtig für Begriffe und Gesetze der Grenzprozesse
→ grundlegende Bedeutung in Physik

Folge: unendliche, durchnummerierte Menge von Zahlen
$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definiert durch ein Bildungsgesetz

Bsp: (F1) $1, 2, 3, 4, \ldots = (n)_{n \in \mathbb{N}}$: Folge der nat. Zahlen

(F2) $1, -1, 1, -1, \ldots = ((-1)^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$: eine "alternierende" Folge

(F3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$: Folge der inversen Fakultäten

(F4) $q, q^2, q^3, q^4, \ldots = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $q \in \mathbb{R}$: die "geometrische" Folge

(im Folgenden weggelassen) → z.B. Zinseszins

meist interessieren uns drei Eigenschaften von Folgen:
Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz !

nützliche logische Symbole:
$\exists$ "es existiert ein"
$\exists!$ "es existiert genau ein"
$\forall$ "für alle"

(a_n) ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists B : a_n \leq B \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists A : a_n \geq A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bsp: (F1) $A=1$ (F2) $A=-1$, $B=1$ (F3) $A=0$, $B=1$

(F4) A, B abhängig von $|q|$; z.B. $0<q<1$: $A=0$, $B=q$

(a_n) ist monoton steigend $\Leftrightarrow a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

streng mon. steigend $<$

monoton fallend $\geq$

streng mon. fallend $>$

Bsp: (F1) streng monoton steigend (F2) nicht monoton

(F3) streng monoton fallend (F4) abh. von $|q|$

Manche Folgen haben Häufungspunkte: beliebig viele Folgenglieder a_n häufen sich um einen Wert a

Bsp: (F1) kein H.P. (F2) zwei H.P.: ± 1 (F3) ein H.P.: 0

((klar: jede nach oben und unten beschr. Folge hat mind. einen H.P.))

Falls eine Folge nur einen H.P. a hat, kann dieser Grenzwert sein:

$$\boxed{\begin{array}{l} (a_n) \text{ ist konvergent, d.h. } \exists a : \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \end{array}}$$

← oft auch: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

N_ε bzw. $N(\varepsilon)$: kann jedem ε eine nat. Zahl N zuordnen

Bsp: (F3) ist konvergent, und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$

denn: sei $\varepsilon > 0$, dann ist $|a_n - 0| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > [\frac{1}{\varepsilon}]$

((haben hier $N_\varepsilon = [\frac{1}{\varepsilon}]$: größte ganze Zahl $\leq \frac{1}{\varepsilon}$; $\mathrm{INT}(\frac{1}{\varepsilon})$))

Eine Folge heisst divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

In der Physik sind unendliche Summen, sog. Reihen, wichtig,

z.B. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

→ die Teilsummen $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, $m \in \mathbb{N}$

können wir als Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auffassen,

um so Grenzwert bzw. Konvergenz zu behandeln

$$\boxed{\text{Die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n = s < \infty}$$

"Grenzwert" der Reihe

Bsp: Die Reihe aus den Teilsummen von (F1)

$s_m = \left(\sum_{n=1}^{m} n\right)_{m\in\mathbb{N}} = 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ ist divergent

---

wichtige Reihen: Potenzreihen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Bsp: geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$

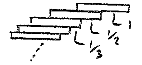
deren Teilsummen $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ (Übung 9a)

so dass der $\lim_{n\to\infty}$ für $|x|<1$ ausführbar ist:

die Reihe konvergiert also, und

$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ für $|x|<1$ ((und divergiert für $|x| \geq 1$))

Bsp: harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$



(keine Potenzreihe)

die Folge ihrer Teilsummen ist unbeschränkt,

denn $s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n})$

$> 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \ldots + 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2}$

also divergiert die Reihe.

Um zu entscheiden, ob eine gegebene Reihe konvergiert, hilft oft das

Majorantenkriterium: wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt so dass $\forall k \geq N$ $|a_k| \leq b_k$ gilt, und ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

(o.B., aber anschaulich klar)

Bsp: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergiert für jedes $x \in \mathbb{R}$

Beweis: wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > 2|x|$.

für $k \geq N$ gilt dann:

$$\left|\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\frac{x^N}{N!}\right| \underbrace{\frac{|x|}{N+1} \cdots \frac{|x|}{k}}_{(k-N)\text{ Faktoren}} \leq \frac{|x|^N}{N!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-N} = \underbrace{\frac{|2x|^N}{N!}}_{\text{const.}} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=: b_k}$$

und die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergiert

↳ (= geometrische Reihe mit $x = \frac{1}{2}$)

↳ wird oft als "Majorante gewählt

$e \approx 2{,}718\ldots$

Bem: man nennt $e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ die Exponential-Reihe

((und die Zahl e ist irrational ← Widerspruchsbeweis s. [Hoffi 3.5]))

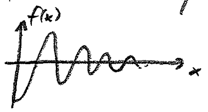
2. Funktionen

sind $\underset{\sim}{\text{Abbildungen}}$, z.B. $f: A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$ mit Vorschrift $x \mapsto f(x)$

→ untersuche z.B. experimentell die Abhängigkeit zweier physikalischer Größen : notiere eine Messgröße $f(x)$ (z.B. Pendelausschlag) in Abhängigkeit der Variablen x (z.B. Zeit ; schreibe dann meist $f(t)$).

Die Menge aller Punkte $(x, f(x))$ der x-y-Ebene heisst dann Graph von f

→ z.B. für Pendel :



↱(s. Kap. 1.2)

Somit gilt alles (injektiv / surjektiv / bijektiv) wie bei Abbildungen

anschaulich: jede Parallele zur x-Achse schneidet Graph höchstens einmal

Von den Folgen (s. Kap. 1.4) übertragen wir Monotonie und Beschränktheit, z.B.

$y = f(x)$ monoton steigend in $[a,b] \Leftrightarrow \left(x_1, x_2 \in [a,b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\right)$

monoton fallend $\geq$

Bsp $y(x) = ax + b$ ist für $a > 0$ monoton steigend

→ erstaunlicherweise kommt man in der Physik ($\hat{=}$ Natur ?!) mit sehr wenigen grundlegenden Funktionen aus.

(Die wichtigsten wollen wir nun einführen) ((Trigonometrische: später in $\mathbb{C}$, §6))

Polynome : $P_m(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k x^k$

↖ "Grad" des Polynoms

Konstanten: $m = 0$; Geraden: $m = 1$; Parabeln: $m = 2$; ...

Rationale Funktionen : $y(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ mit Polynomen $P_m(x)$, $Q_n(x)$

↖ Vorsicht : kann Null werden !

→ solche x aus Definitionsbereich ausschließen

Bsp : $y(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

((Bem.: kann manchmal $\frac{P}{Q}$ durch Kürzen vereinfachen : Polynomdivision))

2.1 Exponentialfunktion (die wichtigste$^{(?)}$ Fkt der Physik)

definieren wir durch $\exp(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

(dass die Reihe $\forall x \in \mathbb{R}$ konvergiert, war in Kap. 1.4 gezeigt worden)

wichtigste Eigenschaften:

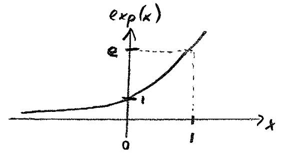
$\exp(0) = 1$ (klar aus Def.)

$\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$ (← s. Übung 12)

$\Rightarrow \exp(x) > 0$

$\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

Funktionsgraph :



2.2 Stetigkeit

"die Natur macht keine Sprünge"

→ der Graph einer "stetigen Funktion" macht keine Sprünge

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \text{ stetig bei } x_0 \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \end{array}}$$

anschaulich : Punkte in der Nachbarschaft von x_0 werden auf Bildpunkte in der Nachbarschaft von $f(x_0)$ abgebildet.

Bsp: $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf $\mathbb{R}^+$ (und auf $\mathbb{R}^-$)

zeige Stetigkeit an der Stelle $x_0 > 0$:

für $x \geq \frac{x_0}{2}$ gilt $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x\, x_0}\right| \leq \frac{2}{x_0^2}|x - x_0|$

so dass $\forall x$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt : $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \frac{2}{x_0^2}\delta$

also ist mit $\delta_\varepsilon := \min\left(\frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2}\varepsilon\right)$ die obige Stetigkeitsbedingung erfüllt.

Bem:
- Polynome sind stetig auf $\mathbb{R}$, $\exp(x)$ ebenso. (s. z.B. Übung 15 für Geraden)
- mit stetigen Funktionen kann man "rechnen": Summe / Differenz / Produkt / Quotient stetiger Funktionen sind auch stetig
- insbesondere sind also rationale Funktionen auch stetig

Für stetige Funktionen gilt der

Zwischenwertsatz: (ohne Beweis; anschaulich klar)
Ist f stetig im Intervall I und sind $a, b \in I$, dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.
Gilt insbesondere $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$, so hat f zwischen a und b eine (oder 3, 5, ...) Nullstelle.

Bsp: hat die Gleichung $\exp(x) = x+2$ eine Lösung $x_0 \in [0,2]$?

$\rightarrow$ Ja; für $f(x) := \exp(x) - x - 2$ gilt $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1 < 0$

und $f(2) = \exp(2) - 4 > 0$ $\left(\left(\exp(2) = \underbrace{\exp(1)}_{= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} > \sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!} = 2} \cdot \exp(1) > 4\right)\right)$

$\Rightarrow$ da exp und $x+2$ stetig, hat f zwischen 0 und 2 eine NS ∎

2.3 Symmetrien

wichtig in Naturwissenschaften: ein "symmetrisches" Problem hat meist eine symmetrische Lösung (z.B. Kristalle, ...)

Funktionen können auch Symmetrie-Eigenschaften haben, z.B.

Spiegelsymmetrie (an y-Achse):

$f(x)$ gerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$ Bsp: x^2; $|x|$

$f(x)$ ungerade $\Leftrightarrow$ $f(-x) = -f(x)$ Bsp: x^3; $\frac{1}{x}$

Jede Funktion kann als $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ geschrieben werden, wobei $f_{g/u}$ gerade/ungerade ist ($\leftarrow$ s. Übung 14b)

wie auch schon bei den Abbildungen, kann man für injektive Funktionen die jeweilige Umkehrfunktion definieren:

- Auflösen der Glg. $y = f(x)$ nach x gibt $x = f^{-1}(y) =: g(y)$

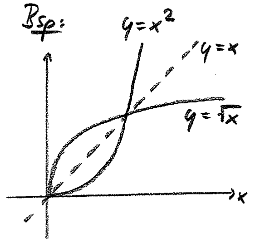
((Bem: Definitionsbereich und Wertevorrat tauschen die Rolle: $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow A$; $f^{-1}(f(x)) = x$ wie in Kap. 1.2))

- nach Auflösen wird die unabhängige Variable y meist wieder x genannt:

$\Rightarrow$ im Funktionsgraphen ergibt sich die Umkehrfunktion f^{-1} einfach durch Spiegelung von f an der Geraden $y = x$.

$((\text{klar: } (x, f(x)) \rightarrow (f(x), x)))$

Bsp:



- erhalten durch Spiegelung / Umkehrung aller bisherigen (injektiven) Funktionen also viele weitere.

2.4 Logarithmus, allgemeine Potenzen

$\rightarrow$ Exponentialfunktion hat eine so hohe Bedeutung, dass selbst verwandte Funktionen eigene Namen bekommen (hier: Log., Potenz; Übg: hyperbol.; später: trig.).
$\hookleftarrow$ (Ü 16, 20, 24)

(vgl. Kap 2.1): $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

streng monoton steigend $\Rightarrow$ injektiv

stetig

$\exp(x \rightarrow -\infty) \rightarrow 0$, $\exp(x \rightarrow +\infty) \rightarrow \infty$

$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ $\Rightarrow$ surjektiv (wegen Zwischenwertsatz) es existiert also eine Umkehrfkt. $\exp^{-1}(x)$

$\underset{\sim}{\ln}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ "<u>l</u>ogarithmus <u>n</u>aturalis"

$x \mapsto \ln(x) := \exp^{-1}(x)$

also: $\exp(\underbrace{\ln(x)}_{\in\mathbb{R}^+}) = x$, $\ln(\underbrace{\exp(x)}_{\in\mathbb{R}}) = x$

für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

((denn: $\ln(x \cdot y) = \ln(\exp(\ln x) \cdot \exp(\ln y)) = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) = \ln x + \ln y$))

└ Schreibweise: oft $\ln x$ statt $\ln(x)$

Funktionsgraph:

durch Spiegelung

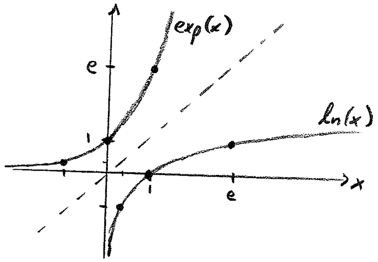
an Winkelhalbierender

$\exp(0) = 1 \Rightarrow \ln(1) = 0$

$\exp(1) = e \Rightarrow \ln(e) = 1$

$\exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \ln(\frac{1}{e}) = -1$



Nun kann man allgemeine Potenzen definieren (vgl. Kap 1.3 : b^n, $n \in \mathbb{N}$)

Für $b \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$ sei $b^x := \exp(x \cdot \ln b)$ die <u>x-te Potenz von b</u>

└ Exponent
└ Basis

Eigenschaften der Potenz : ($a, b \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$b^x \cdot b^y = b^{(x+y)} = b^{x+y}$ (und $b^0 = 1$ wegen $\exp(0) = 1$)

$(b^x)^y = b^{(x \cdot y)} = b^{xy}$ (Vorsicht: $b^{(x^y)} \neq (b^x)^y$)

$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$

(folgen alle aus Def. und exp- Eigenschaften)

<u>Bem.</u>:
- für $x \in \mathbb{N}$ also alles konsistent mit b^n aus Kap. 1.3
- für $n \in \mathbb{N}$: $b^n = \prod_{k=1}^{n} b$, $b^0 = 1$, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

  $\Rightarrow (b^{\frac{1}{n}})^n = b$, d.h. $\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}$ ist diejenige positive Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert b ergibt
- beachte $b \in \mathbb{R}^+$ in Potenz-Def!

  Potenzgesetze für $b<0$ nicht gültig, z.B. $[(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \neq (-1)^1 = -1$
- während $b^{1/n}$ immer eindeutig definiert ist, kann die Glg. $b = x^n$ mehrere Lsn. haben

  <u>Bsp</u>: $4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$
- b^x wird oft <u>Exponentialfunktion zur Basis b</u> genannt

Einige Folgerungen: ($x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^+$)

$e^x = \exp(x)$ <u>Beweis</u>: $e^x = \exp(x \overset{=1}{\widetilde{\ln e}}) = \exp(x)$

$[\exp(x)]^y = \exp(x \cdot y)$ <u>Beweis</u>: $[\exp(x)]^y = (e^x)^y = e^{xy} = \exp(xy)$

$\ln(z^x) = x \ln(z)$ <u>Beweis</u>: $\ln(z^x) = \ln(\exp(x \cdot \ln z)) = x \cdot \ln(z)$

<u>Bsp</u> $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x \cdot y^{-1}) = \ln(x) + \ln(y^{-1}) = \ln(x) - \ln(y)$

Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sei $\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$x \to \log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$

der <u>Logarithmus zur Basis b</u>

Spezialfälle: $ld(x) := \log_{10}(x)$ "logarithmus decimalis"

$lb(x) := \log_2(x)$ "logarithmus dualis" (<u>b</u> ⇔ "<u>b</u>inär")

$\ln(x) := \log_e(x)$ "logarithmus naturalis" s.o.

((<u>Bem.</u>: In der Literatur wird $\log(x)$ manchmal für $\ln(x)$, manchmal aber auch für $ld(x)$ benutzt))

<u>Bsp</u> $\log_7(49) = \log_7(7^2) = \frac{\ln(7^2)}{\ln(7)} = \frac{2 \cdot \ln(7)}{\ln(7)} = 2$

<u>Bsp</u> $\log_{143}(143) = \frac{\ln(143)}{\ln(143)} = 1$

→ (s. auch Übungen 17, 18, 19)

3. Differentialrechnung (in $\mathbb{R}$)

≈ theoretische Physik : 17. Jh, Leibniz + Newton
exakte Formulierung der Gesetze, die den beobachteten physikalischen Phänomenen zugrunde liegen

z.B. Mechanik ⇔ Newton - Gleichungen
Elektrodynamik ⇔ Maxwell - Gleichungen
Quantenmechanik ⇔ Schrödinger - Gleichung
Gravitation ⇔ Einstein - Gleichungen
} "Differentialgleichungen"

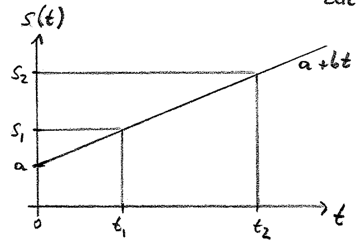
Lösung solcher Glg. : brauchen Analysis, insbesondere Differential- und Integralrechnung !

⇒ "Werkzeugkasten" des Physikers !

3.1 Die Ableitung

Bsp gleichförmige Bewegung eines Massenpunktes auf einer Geraden :

zurückgelegter Weg $s(t) = a + b \cdot t$ ← Zeit



Position zum Zeitpunkt t=0 ist $s(0) = a$

wollen Geschwindigkeit wissen: $v = \frac{\text{Wegabschnitt}}{\text{Zeitabschnitt}} = \frac{s(t) - a}{t} = b$

brauchen also Steigung des Funktionsgraphen

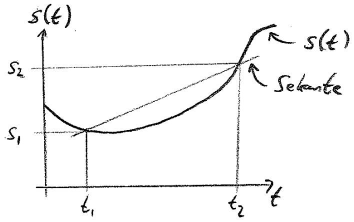
hätten auch ein anderes Zeitintervall nehmen können, z.B. $t_2 - t_1$:

$v = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1} = b$ (gleiches Ergebnis, da Gerade)

allgemein : $v = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t}$

bzw. $(t \to x)$ $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ heisst Differenzenquotient

Bsp allgemeine geradlinige Bewegung mit zeitlich variierender Geschwindigkeit : beliebiges $s(t)$



Differenzenquotient gibt hier Steigung der Sekante durch $(t_1, s(t_1))$ und $(t_2, s(t_2))$ an

bekommen hier die Durchschnittsgeschwindigkeit während des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$: $v_{\text{mittel}} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

→ Physikalisch am wichtigsten ist oft die Momentangeschwindigkeit.
Diese ergibt sich im Grenzübergang $t_1 \to t_2$;
bei einer stetigen Funktion geht dann auch $s(t_1) \to s(t_2)$,
und die Sekante → Tangente

Tangentensteigung $v(t_2) = \frac{ds}{dt}\Big|_{t_2} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

→ dieser Grenzwert eines Quotienten heisst

Differentialquotient $\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} = \lim_{\underset{\uparrow > 0 \text{ oder } < 0}{\Delta x \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

verschiedene Schreibweisen :

$$\frac{df(x)}{dx}\Big|_{x_0} \equiv f'(x_0) \equiv \left(\frac{d}{dx}\right) f(x)\Big|_{x_0} \equiv \left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x_0)$$

eine Physiker - Eigenart :
falls unabh. Variable Zeit ist : $\dot{f}(t_0) \equiv \frac{df(t)}{dt}\Big|_{t_0}$

Der Differentialquotient als Grenzwert existiert natürlich nicht bei allen Funktionen an allen Stellen; deshalb nennt man:

$f(x)$ heisst differenzierbar bei x_0
⟺ der Grenzwert des Differentialquotienten existiert

→ dazu müssen die Grenzwerte "von oben" und "von unten" existieren und übereinstimmen mathematisch präzise:

> eine Funktion $f: A \to B$ heisst <u>differenzierbar am Ort $x_0 \in A$</u>
>
> $\Leftrightarrow$ $\exists$ eine Zahl $\frac{df}{dx}(x_0) \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:
>
> $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0$, so dass
>
> $\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - \frac{df}{dx}(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall\, x \in A$ mit $0 < |x-x_0| < \delta$

↑ („Ableitung von f am Ort x_0“)

((anschaulich: Funktionsgraph hat keine „Ecken und Kanten“))

Bsp $f(x) = |x|$

ist überall stetig* (Beweis s.u.), aber bei $x=0$ nicht differenzierbar,

weil $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x-0} = +1$, und $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|-|0|}{x-0} = -1$ ist.

Bem: Die Funktion heisst <u>differenzierbar auf $C \subset A$</u>, falls sie an jedem Ort $x_0 \in C$ differenzierbar ist.

Die Funktion heisst <u>stetig differenzierbar auf C</u>, falls die Ableitung $\frac{df}{dx}(x_0)$ an jedem Ort $x_0 \in C$ stetig ist.

<u>Höhere Ableitungen</u> sind rekursiv definiert:

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x)\right) \equiv \underbrace{\frac{d^n}{dx^n} f(x) \equiv \left(\frac{d}{dx}\right)^n f(x)}_{\text{alternative Schreibweisen}} \qquad \text{„n-te Ableitung“}$$

Bsp

$\frac{d^2 f}{dx^2}(x) := \frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}(x)\right)$ bzw $f''(x)$ bzw $\ddot{f}(t)$

$\frac{d^3 f}{dx^3}(x) := \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 f}{dx^2}(x)\right)$ bzw $f'''(x)$ bzw $\dddot{f}(t)$

$\vdots$

(n-te Ableitung) bzw $f^{(n)}(x)$ bzw $f^{(n)}(t)$

$*$ Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon$. $\Rightarrow \forall\, x$ mit $|x| < \delta$:

↑ (Stetigkeit bei $x_0 = 0$) $\quad |f(x) - f(x_0)| = \big||x| - |x_0|\big| = |x| < \varepsilon$ ∎

Bsp Gerade $a + bx$ ist diff'bar auf $\mathbb{R}$,

mit erster Ableitung $= f'(x) = b =$ „Steigung“

Also: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) := a + bx$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow\;\uparrow \in \mathbb{R}$ (beliebig aber fest)

Stetigkeit war in Übung 15 gezeigt worden.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := 1$. $\Rightarrow \forall\, x$ mit $0 < |x-x_0| < 1$:

$$\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{a+bx-(a+bx_0)}{x-x_0} - b \right| = \left| \frac{b(x-x_0)}{x-x_0} - b \right| = 0 < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, ist $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar.

Bem Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

((klar aus Def.: falls $|x - x_0| \to 0$, dann auch

$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right| \cdot |x-x_0| \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$))

aber: Stetigkeit $\not\Rightarrow$ Diff'barkeit (s. Bsp $|x|$ oben)

Die Ableitung (Steigung) an Extrema der Fkt. ist Null:

Sei $f: A \to B$ differenzierbar am Ort $x_0 \in A$

und x_0 sei ein (lokales oder globales) <u>Maximum oder Minimum</u> von f.

Dann gilt $\underline{f'(x_0) = 0}$

<u>Widerspruchsbeweis</u>: Angenommen, $f'(x_0) \neq 0$.

wähle $\varepsilon := \frac{|f'(x_0)|}{2}$ (>0). da f diff'bar bei x_0, $\exists\, \delta > 0$

mit $\left| \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall\, x$ mit $0 < |x-x_0| < \delta$.

$\Leftrightarrow \quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < f'(x_0) + \varepsilon = f'(x_0) + \frac{|f'(x_0)|}{2} \qquad (*)$

und $\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > f'(x_0) - \varepsilon = f'(x_0) - \frac{|f'(x_0)|}{2} \qquad (**)$

Falls x_0 Min, dann $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $\begin{cases} \geq 0 \text{ für } x > x_0 \overset{(*)}{\Rightarrow} f'(x_0) > 0 \\ \leq 0 \text{ für } x < x_0 \overset{(**)}{\Rightarrow} f'(x_0) < 0 \end{cases}$ ↯

Falls x_0 Max analog; Also ist Annahme $f'(x_0) \neq 0$ <u>falsch</u>! ∎

3.2 Ableiten als Handwerk

↳ aus der Def. der Ableitung kann man allgemeine **Regeln** herleiten; am besten also alle bisher bekannten Funktionen ableiten, und in **Tabelle** sammeln …
Aus einfachen Beispielen kann man sich die Ableitungen komplizierterer Funktionen systematisch berechnen:

Die Funktionen f, g seien beide am Ort $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.
$\Rightarrow$ Dann sind auch $f+g$, $f\cdot g$ und $\frac{f}{g}$ ((falls $g(x) \neq 0$)) am Ort x diff'bar, und es gilt:

Summenregel $\quad (f(x)+g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Produktregel $\quad (f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

Quotientenregel $\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Die Funktion g sei am Ort x und die Funktion f am Ort $g(x)$ diff'bar $\Rightarrow$ Dann ist auch $f \circ g$ am Ort x diff'bar, und es gilt:

(vgl. Ü 23) → **Kettenregel** $\quad [(f\circ g)(x)]' = [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

((Bem.: $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg(x)}{dx}\cdot\frac{d}{dg(x)} f(g(x)) = g'(x)\cdot f'(g(x))$ ✓))

Bsp 1: $(x^n)' = n\cdot x^{n-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ (($x \neq 0$ falls $n \leq 0$))

Beweis:
- für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:
  Ind.-Anfang: für $n=1$: $(x^1)' = x' \overset{\text{(s. Gerade, S. 26)}}{=} 1 = 1\cdot x^0$ ✓✓
  Ind.-Schritt: $(x^{n+1})' = (x\cdot x^n)' \underset{\text{(Produktregel)}}{=} x'\cdot x^n + x\,\underbrace{(x^n)'}_{\text{(Ind.-Annahme)}} = 1\cdot x^n + x\cdot n\cdot x^{n-1} = (n+1)\,x^n$ ✓✓
- für $n=0$: $(x^0)' = 1' \overset{\text{(s. Gerade)}}{=} 0$ ✓✓
- für $n<0$: $(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' \overset{\text{(Quotientenregel)}}{=} \frac{0\cdot x^{-n} - 1\cdot(x^{-n})'}{(x^{-n})^2} \overset{(-n>0)}{=} \frac{-(-n)\,x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n x^{n-1}$ ✓✓

Bsp 2: Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
ist auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar,
und es gilt $\quad P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$

Beweis: Summen- + Produktregel, und Bsp 1

Bsp 3: rationale Fkt. $\quad R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ $\quad$ (P, Q Polynome)
ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich ($Q \neq 0$!) diff'bar,
und es gilt $\quad R'(x) = \frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)}{Q^2(x)}$

Beweis: Quotientenregel, und Bsp. 2

((Bem.: $\Rightarrow$ $P(x)$ und $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sind auf ihrem gesamten Def.-Bereich stetig (dies war in Kap. 2.2, S. 19 dann, nur behauptet worden), und beliebig oft (stetig) diff'bar.))

Für ~~Potenzreihen~~ **Potenzreihen**, d.h. "unendliche Polynome" gilt:

Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ und $|x| < \lim_{k\to\infty} \frac{k\, b_{k-1}}{b_k}$ mit $|a_k| \leq b_k$.
(d.h. die Potenzreihe konvergiert)

$\Rightarrow$ Dann ist $f(x)$ am Ort x (beliebig oft stetig) diff'bar, und zwar gliedweise, d.h.

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{1}{m!} \underbrace{(x^m)'}_{= m\cdot x^{m-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{m}{m!}}_{= \frac{m}{m\cdot(m-1)!}} x^{m-1} \quad , \quad \begin{array}{l} k := m-1 \\ \Leftrightarrow m = k+1 \end{array}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!} \qquad \left(\left(=: \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{\text{neu}} \frac{x^k}{k!} \right)\right)$$

Insbesondere ist die Potenzreihe $f'(x)$ wieder konvergent.
((Beweis: in Analysis-Vorlesung … hier: plausibel ?!))

Bsp $\quad e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, d.h. $a_k = 1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ $\exp'(x) = \exp(x)$

(war schon in Ü 24 benutzt worden)

Bsp $\quad \exp'(c\cdot x) = \exp(c\cdot x)\cdot c$
$\uparrow$ Kettenregel
d.h. $f(x) = f(0)\cdot e^{cx}$ genügt der Glg. $f' = c\cdot f$
(Bsp für "Differentialglg.")

eine weitere nützliche Ableitungsregel:

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f: A \to B$ bijektiv (d.h. f^{-1} existiert)
und diff'bar am Ort $y \in A$ mit $f'(y) \neq 0$

$\Rightarrow$ Dann ist $f^{-1}: B \to A$ am Ort $x := f(y) \in B$ diff'bar

mit $[f^{-1}(x)]' = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Beweis: die Gl. $f(f^{-1}(x)) = x$ nach x ableiten:

$$[f(f^{-1}(x))]' = f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = x' = 1$$

da nach Voraussetzung $f'(\underbrace{f^{-1}(x)}_{\equiv y}) \neq 0$, folgt Behauptung ∎

Bsp $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(\ln(x))} = \dfrac{1}{\exp(\ln(x))} = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Bsp $\operatorname{artanh}'(x) = \dfrac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))} \overset{\uparrow}{=} \dfrac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \dfrac{1}{1-x^2}$

$\ulcorner \tanh = \dfrac{\sinh}{\cosh}, \quad \tanh' = \dfrac{\sinh'\cosh - \sinh\cosh'}{\cosh^2} = \dfrac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \urcorner$

$\sinh = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \sinh' = \cosh$

$\cosh = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad \cosh' = \sinh$

→ analog zum Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (vgl. Kap. 2.2) haben auch differenzierbare Funktionen einige allgemeine Eigenschaften:

3.3 Mittelwertsätze und Regel von de l'Hospital

Seien zwei Funktionen $f, g: A \to B$ auf einem Intervall $[a,b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $x_0 \in]a,b[$, so dass

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0)$$

allgemeiner Mittelwertsatz

Beweis: wir betrachten die Hilfsfunktion

$h(x) := [f(b) - f(a)]\, g(x) - [g(b) - g(a)]\, f(x)$

und müssen zeigen: $h'(x) = 0$ irgendwo zwischen a, b

es gilt (Summenregel): h diff'bar in $[a,b]$

und $h(a) = [f(b) - \cancel{f(a)}]\, g(a) - [g(b) - \cancel{g(a)}]\, f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$

$h(b) = [\cancel{f(b)} - f(a)]\, g(b) - [\cancel{g(b)} - g(a)]\, f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a)$

$\Rightarrow$ also ist entweder $h(x)$ konstant auf $[a,b]$

und somit $h'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$

oder $h(x)$ besitzt (mind. ein) Extremum, z.B. bei $x_0 \in]a,b[$

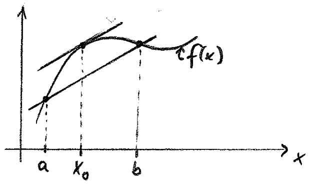
und somit $h'(x_0) = 0$ ∎

Setzt man $g(x) = x$ in den allg. Mittelwertsatz ein, folgt der

Mittelwertsatz: Sei $f: A \to B$ auf $[a,b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $x_0 \in]a,b[$, so dass $\dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(x_0)$

anschaulich:



((die Steigung der Sekante wird zwischen (a,b) auch angenommen))

einige Folgerungen: (seien $f, g: A \to B$ diff'bar auf $[a,b] \subset A$)

- falls $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad f$ ist monoton wachsend auf $[a,b]$

$>$	streng mon. ↗
$\leq$	monoton fallend
$<$	streng monoton ↘
$=$	$f(x) = \text{const.}$
$= g'(x)$	$f(x) = g(x) + \text{const.}$

((<u>Bew.:</u> "$\geq$": Seien $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$.

dann existiert laut Mittelwertsatz ein $\vartheta \in]x_1, x_2[$

mit $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\vartheta)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \geq 0$ q.e.d.

"$>, \leq, <$" : genauso

"$=$" : folgt aus "$\geq$" und "$\leq$"

"$= g'(x)$": $[f(x) - g(x)]' = 0 \overset{\text{"="}}{\Rightarrow} f(x) - g(x) = \text{const.}$))

Anwendung des Mittelwertsatzes: Grenzwerte wie "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$" ausrechnen

Seien $f, g : A \to B$ auf $[a,b] \subset A$ diff'bar

und $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ auf $]a,b]$.

$\Rightarrow$ Dann gilt $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ <u>Regel von de l'Hospital</u>

((<u>Bem:</u> wenn der Grenzwert existiert; beide Limites "von oben";
Grenzwerte $\frac{\infty}{\infty}$ genauso: nehme $\frac{1/f(x)}{1/g(x)}$))

<u>Bew.:</u> laut allg. Mittelwertsatz $\exists$ zu jedem $x \in]a,b[$ ein $x_0 \in]a,x[$

so dass $[f(x) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(x) - g(a)]\, f'(x_0)$.

wegen $f(a) = g(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) g'(x_0) = g(x) f'(x_0)$

wegen $g'(x) \neq 0$ auf $]a,b]$ muss $g(x)$ streng mon. wachsen oder fallen

jedenfalls (da $g(a) = 0$) ist $g(x) \neq 0$ auf $]a,b]$

$\Rightarrow$ dürfen Dividieren: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

da $x_0 \to a$ für $x \to a$ folgt die Behauptung qed

$\frac{0}{0}$ <u>Bsp</u> $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

((daraus folgt $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^1 = e$

$\Leftrightarrow$ die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen e (!)))

Auch Grenzwerte wie "$\frac{\infty}{\infty}$" oder "$0 \cdot \infty$" etc per de l'Hospital:

Sei $\lim\limits_{x \to a} f(x) \to \infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \to \infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

((<u>denn:</u> $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{1/g(x)}{1/f(x)} \overset{\text{(de l'Hosp.)}}{=} \lim\limits_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)'}{\left(\frac{1}{f}\right)'} = \lim\limits_{x \to a} \frac{-g'/g^2}{-f'/f^2}$

$= \lim\limits_{x \to a} \frac{g'}{f'} \frac{f^2}{g^2}$ $\quad \Big| \cdot \frac{f'}{g'} \cdot \frac{g}{f}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ $\checkmark$))

$0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}$ <u>Bsp</u> $(a > 0)$ $\lim\limits_{x \to 0} x^a \cdot \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x^{-a}} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{-1}}{-a x^{-a-1}} = \lim\limits_{x \to 0} -\frac{x^a}{a} = 0$

0^0 <u>Bsp</u> $\lim\limits_{x \to 0} x^x = \lim\limits_{x \to 0} e^{x \ln(x)} \overset{\text{obiges Bsp}}{=} e^0 = 1$

Auch das "a" in der Regel von de l'Hospital darf ∞ sein:

Sei entweder $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$

oder $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \to \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) \to \infty$

$\Rightarrow$ dann gilt wieder $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

((<u>denn:</u> setze $y := \frac{1}{x}$, dann $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{y \to 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \overset{\text{(de l'Hosp. + Kettenregel)}}{=} \lim\limits_{y \to 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}$

$= \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$))

<u>Bsp</u> in den Übungen (Ü28b) wurde gezeigt, dass

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^a} \to \infty$ für alle $a > 0$

((z.B. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{1} \to \infty$))

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} \to 0$ für alle $a > 0$

((z.B. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1/x}{1} = 0$))

4. Integralrechnung in $\mathbb{R}$

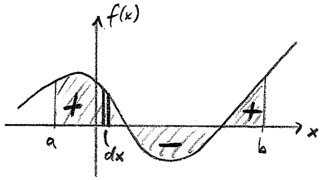
[≈ Schulz §6.1]

↳ Für alle zentralen Begriffe (Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) gibt es jeweils eine "strenge" (ε-δ..) Definition sowie eine geometrische Veranschaulichung;

bisher (K, S, D) beides gemacht;

hier (I) nur geometrisch-anschaulich

4.1 Das bestimmte Integral



die so gezählte Fläche zwischen Funktionsgraph und $[a,b]$ auf x-Achse heisst (bestimmtes) Integral

$$\begin{pmatrix}\text{Fläche}\\ \text{zw. } a,b\end{pmatrix} = \underbrace{\lim \Sigma}_{\int} \left(dx \cdot f(x)\right) =: \int_a^b dx\, f(x)$$

Bem.: x ist hier wieder ein "Laufindex", wie bei Summe $\left(\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{m=0}^{n} x_m = \ldots\right)$,

also $\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dy\, f(y) = \int_a^b d\xi\, f(\xi) = \ldots$

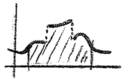
Bem.: für welche Funktionen ist eine sinnvolle Definition solcher Flächen möglich?

((sicher nicht für z.B. (Dirichlet-Fkt) $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$,

denn Graph lässt sich nicht zeichnen; → Fläche ??))

→ sicher ~~OK~~ für stetige Funktionen

((sowie "stückweise stetige", wie z.B.



(höchstens endlich viele Punkte unstetig, aber beschränkt))

→ ab jetzt nur noch solche $f(x)$ betrachten!

(Vertieftg. in Analysis-Vorl.: Riemann-, Lebesgue-Integral))

oft verwendete Schreibweise: $\int dx :=$ Integral über alle $x = \int_{-\infty}^{\infty} dx$

in Physik: Dimension $\left[\int_a^b dx\, f(x)\right] = [x]\cdot[f]$, $[a] = [b] = [x]$

$\int$-Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch erhältlich ist)

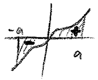
oder $f = \partial_x(\ldots)$, s.u. "Hauptsatz"

Eigenschaften:
↳ (alle anschaulich klar!)

$$\int_b^a dx\, f := -\int_a^b dx\, f$$

$$\int_a^a dx\, f = 0$$

$$\int_a^b dx\, \text{const}_x = (b-a)\cdot\text{const}_x \qquad \left(\Rightarrow \int_a^{a+\varepsilon} dx\, f(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0} \varepsilon f(a)\right)$$



$$f \text{ ungerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 0$$

$$f \text{ gerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 2\int_0^a dx\, f$$

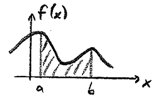
$$\int_a^b dx\,(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx\, f + \beta \int_a^b dx\, g$$

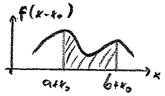
$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b],\ a \leq b \quad \Rightarrow \int_a^b dx\, f(x) \leq \int_a^b dx\, g(x)$$

$$\left|\int_a^b dx\, f(x)\right| \leq \int_a^b dx\, |f(x)|$$

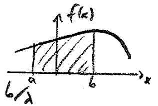
Tricks: Verschieben

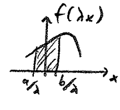




$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x-x_0) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l}\text{Grenzen} \to \text{Grenzen} + x_0 \\ f(x) \to f(x-x_0)\end{array}\right)\right)$$

Skalieren





$$\int_a^b dx\, f(x) = \lambda \int_{a/\lambda} dx\, f(\lambda x) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} x \to \lambda x,\ dx \to \lambda\, dx \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen}/\lambda \end{array}\right)\right)$$

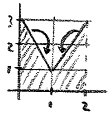
dimensionslos z.B. $\int_0^{t_1} dt\, v(t) = \int_0^{t_1} dt\, v_0 f(\omega t)$, Skalieren $t \to t/\omega$

$= \frac{v_0}{\omega} \int_0^{\omega t} dt\, f(t)$

Bsp

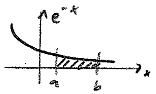
$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 dx\ (2|x-1|+1) && , x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\ (2|x|+1) && , x \to \tfrac{1}{2}x \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^2 dx\ (|x|+1) && , \text{gerade Fkt} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 dx\ (|x|+1) = \int_0^2 dx\,(x+1) && , x \to x+1 \\ &= \int_{-1}^1 dx\ (x+2) && , x \text{ ist ungerade Fkt} \\ &= 2\int_{-1}^1 dx = 2\cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

((als Check: zeichnen



$f \to 2$, $I = 2\cdot 2 = 4$ ✓))

Bsp $\int$ aus Σ (Scheibchen) berechnen, z.B.



$$\begin{aligned} \int_a^b dx\ e^{-x} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{b-a}{N}\, e^{-(a+n\frac{b-a}{N})} \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N}\, e^{-a} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \left(e^{-\frac{b-a}{N}}\right)^n}_{= \frac{1-e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1-e^{-\frac{b-a}{N}}} = \frac{1-e^{-(b-a)}e^{-\frac{b-a}{N}}}{1-e^{-\frac{b-a}{N}}}} \end{aligned}$$

, vgl. (endl.) geom. Reihe, Ü9a

$$= e^{-a} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon\left(1-e^{-(b-a)}e^{-\varepsilon}\right)}{1-e^{-\varepsilon}} \qquad \text{mit } \varepsilon := \frac{b-a}{N}$$

Zähler: $(\ldots) \to (1-e^{-(b-a)})$; Rest: $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon}} \sim$ "$\frac{0}{0}$" de l'Hosp!

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{+e^{-\varepsilon}} \to 1$$

(hieraus folgt $\int_0^\infty dx\ e^{-x} = 1$) $\rightsquigarrow$

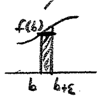
$$\begin{aligned} &= e^{-a}\left(1-e^{-(b-a)}\right) = e^{-a} - e^{-b} \\ &= \left[-e^{-x}\right]_{x=b} - \left[-e^{-x}\right]_{x=a} \end{aligned}$$

((geht das immer ?! s.a.))

4.2 Hauptsatz der Integralrechnung

Berechne die Ableitung eines Integrals nach der oberen Grenze per Differenzialquotient:

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b dx\ f(x)\right) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\ f(x) - \int_a^b dx\ f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\ f(x)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon\cdot f(b)}{\varepsilon} = f(b)$$



⇒ Kennt man zu f(x) eine Stammfunktion F(x), d.h. eine Lösung der (Differential-) Gleichung $F'(x) = f(x)$, dann ist also

$$\begin{aligned} \frac{d}{db}\left(\int_a^b dx\ f(x)\right) &= \frac{d}{db} F(b) \\ \Leftrightarrow \quad \int_a^b dx\ f(x) &= F(b) + C \quad \leftsquigarrow \text{(Konstante)} \\ b \to a: \qquad 0 &= F(a) + C \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b dx\ f(x) = F(b) - F(a)}$$

$$=: \left[F(x)\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b \qquad \text{(andere Schreibweisen)}$$

Der Hauptsatz: falls f(x) am Ort x_0 stetig ist, dann ist $F(x) := \int_a^x dy\, f(y)$ am Ort x_0 diff'bar, mit $F'(x_0) = f(x_0)$

Bem.:

- F(x) Stammfkt ⇒ F(x) + const. auch. ⟵ ((schlechte Notation! $\int_{-\infty}^{?}$? $\int_{?}^{x}$?))
  Die Menge aller Stammfkt. heisst "$\int dx\, f(x)$" (unbestimmtes Integral)
- Hauptsatz hilft nur, falls man $f = \frac{d}{dx}F$ lösen kann
  (($f = \sinh(x^3)$, $F = ???$))
- "Beweis": $\int_a^b dx\ \frac{F(x)}{dx}$ = F-Zunahme ab F(a)
- Anwendungsmuster: $\int_a^b dx\ ▨ = \int_a^b dx\ \frac{d}{dx}[\,??\,] = [\quad]_a^b = [\quad]_{x=b} - [\quad]_{x=a}$
- Wunschtabelle $\frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx}\,\mathrm{artanh}(x)$ etc.
  wenn jedoch (s. Bronstein etc.) "$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \mathrm{artanh}(x)$",
  dann lese dies als Tabelle ((nicht als Glg: C = ?!))
- F in Tabelle gefunden
  → Zitieren, z.B. [Bronstein, Nr. 157]
  → Probe, also $\frac{d}{dx}$(rhs) bilden ⟵ ("right hand side")
- $\int_a^\infty dx\ f(x) := \lim_{b\to\infty} \int_a^b dx\ f(x)$ nennt man uneigentliches Integral
  wenn endlich, dann: "es existiert"

Im Gegensatz zum Ableiten gibt es für das Integrieren kein "allgemeines Rezept" ((s. jedoch § 4.3)).

Daher verfährt man beim Anwenden des Hauptsatzes meist so:

Bsp $(|b| \leq 1)$

$$I = \int_0^b dx \; \mathrm{artanh}(x) = \int_0^b dx \; \frac{d}{dx}[\,?\,]$$

geeignete Kandidaten-Funktionen für $[\,?\,]$? ← "Stammfunktion"

$$\frac{d}{dx}\, x \cdot \mathrm{artanh}(x) = \mathrm{artanh}(x) + \underbrace{x \cdot \frac{1}{1-x^2}}_{= \frac{d}{dx}(?)}$$ (nach Produktregel)

$$\frac{d}{dx} \ln(1-x^2) = \frac{-2x}{1-x^2}$$ (nach Kettenregel)

$$\Rightarrow [\,?\,] = x \cdot \mathrm{artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C$$ ← irgendeine Konstante

$$= b \cdot \mathrm{artanh}(b) + \frac{1}{2}\ln(1-b^2) + \cancel{C} - (0 + 0 + \cancel{C})$$

(vereinf.: Notation)

Bsp $(n \in \mathbb{N})$

$$\int dx\, x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

denn $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = (n+1)\,\frac{x^{(n+1)-1}}{n+1} = x^n$

Bsp $(\alpha \in \mathbb{R})$

$$\int dx\, x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{für } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = -1 \end{cases}$$

denn $\begin{cases} x > 0: & \ln'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \\ x < 0: & \ln'(-x) = \frac{-1}{-x} = x^{-1} \end{cases}$

Bsp $(\alpha \neq 0)$

$$\int dx\, e^{\alpha x} = \int dx \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C\right]$$

denn $\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}\right)' = e^{\alpha x}$

Bsp

$$\int dx \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_n \frac{x^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k!}$$, wobei $a_{-1} := C \in \mathbb{R}$ beliebig

((Ann. $|x| < \lim_{k\to\infty} \frac{k b_{k-1}}{b_k}$ mit $|a_k| \leq b_k$, so dass Reihe konvergent))

denn $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k!}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$

insbesondere: ist die Reihe (der Stammfkt.) wieder konvergent

---

4.3 Integrations-Verfahren

↳ gibt keine allg. Regeln; eher: Erfahrung / Intuition / Raten / Ausprobieren ... "Kunst"

→ Die meisten der (für die Physik) relevanten Integrale kann man in Integrations-Tabellen nachschlagen, z.B.

Bronstein (genügt meist; s. z.B. online-Link auf webpage)

Gradshteyn / Ryzhik (sehr umfangreich; s. z.B. Bibliothek)

→ "Differenzieren immer machbar; Integrieren nur in einigen Glücksfällen"

Manche "harmlos" aussehenden $f(x)$ besitzen zwar Stammfkt'n, diese lassen sich aber nicht durch "elementare" Funktionen (d.h. x^α, e^x, $\ln(x)$, ...) darstellen;

Bsp $\int dx\, e^{-x^2} = \; ?$ (($f(x) = e^{-x^2}$ stetig $\Rightarrow F(x)$ existiert!))

→ Einige besonders wichtige solcher Stammfunktionen haben deshalb eigene Namen bekommen (sog. "spezielle Funktionen")

Bsp $\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy\, e^{-y^2}$ "error function"

↳ ist also diejenige Fkt, deren Ableitung $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ gibt
↳ (Gaussverteilung)

Zum Umformen / Vereinfachen von Integralen werden oft einige der folgenden Verfahren angewandt:

Man "erkennt", dass es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen...

... als Partialbruch

Bsp

$$f = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]\right)$$

... als $g' \cdot g^{n(\neq -1)}$

$f(x) = g'(x) \cdot g^n(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}\, g^{n+1}(x)\right)$ (Kettenregel "rückwärts")

Bsp $\int_a^b dx\, \frac{1}{x} \cdot \ln^n(x) = \underset{g(x)=\ln(x)}{\int_a^b} dx\, \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(x)\right) = \left[\frac{\ln^{n+1}(x)}{n+1}\right]_a^b$

... als g'/g

$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx}\left(\ln|g(x)|\right)$ (Kettenregel "rückwärts")

Bsp $\int_a^b dx\, \frac{3x^2}{1+x^3} \underset{g(x)=1+x^3,\ g'(x)=3x^2}{=} \int_a^b dx\, \frac{d}{dx}\left(\ln|1+x^3|\right) = \left[\ln|1+x^3|\right]_a^b$

Bsp $\int_a^b dx\, \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \underset{g(x)=\ln(x),\ g'(x)=\frac{1}{x}}{=} \left[\ln|\ln(x)|\right]_a^b$

Bsp $\int_a^b dx\, \tanh(x) = \int_a^b dx\, \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \underset{g(x)=\cosh(x),\ g'=\sinh}{=} \left[\ln(\cosh(x))\right]_a^b$

... als $u'v$ (partielle Integration, PI)

$f(x) = u'(x)\, v(x) = \frac{d}{dx}\left(u(x)\,v(x)\right) - u(x)\,v'(x)$

Bsp $\int_0^1 dx\, \underbrace{2x}_{u'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{v} = \left[x^2 \ln(x)\right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 dx\, x^2 \cdot \frac{1}{x}}_{=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1} = 0 - 0 - \frac{1}{2} + 0$

$u = x^2,\ v' = 1/x$

Bsp $\int_0^\infty dx\, \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{u'} = \left[-x e^{-x}\right]_0^\infty - \underbrace{\int_0^\infty dx\, 1 \cdot (-e^{-x})}_{=\left[e^{-x}\right]_0^\infty} = 0 - 0 - 0 + 1$

$v' = 1,\ u = -e^{-x}$

Bsp $\int_a^b dx\, \underbrace{x^2}_{v} \cdot \underbrace{\sinh(x)}_{u'} = \left[x^2 \cosh(x)\right]_a^b - \int_a^b dx\, \underbrace{2x}_{v} \cdot \underbrace{\cosh(x)}_{u'}$

$v' = 2x,\ u = \cosh$ $\qquad$ $v' = 2,\ u = \sinh$

(2mal partiell integrieren)

$= \left[x^2 \cdot \cosh(x) - 2x \cdot \sinh(x)\right]_a^b + \int_a^b dx\, 2 \sinh(x)$

$= \left[x^2 \cdot \cosh(x) - 2x \cdot \sinh(x) + 2 \cdot \cosh(x)\right]_a^b$

Bsp $\int_a^b dx\, \cosh^2(x) = \left[\sinh(x)\cosh(x)\right]_a^b - \int_a^b dx\, \underbrace{\sinh^2(x)}_{=\cosh^2 - 1}$

$u' = \cosh,\ v = \cosh$

$u = \sinh,\ v' = \sinh$

$= \left[\sinh(x)\cosh(x) + x\right]_a^b - \underbrace{\int_a^b dx\, \cosh^2(x)}_{\text{auf lhs bringen!}}$

$\Rightarrow \int_a^b dx\, \cosh^2(x) = \left[\frac{\sinh(x)\cosh(x) + x}{2}\right]_a^b$

... als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei diff'bar und bijektiv (⇒ dann ex. Umkehrfkt $t = t(x)$)
also $x(t(a)) = a$ etc.

$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{dx}{dt}\, f(x(t))$

((Beweis : $\int_a^b dx\, f(x) = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$, mit $\mathcal{F}'(x) = f(x)$

$= \mathcal{F}(x(t(b))) - \mathcal{F}(x(t(a)))$

$= \left[\mathcal{F}(x(t))\right]_{t(a)}^{t(b)}$

$= \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{d}{dt}\, \mathcal{F}(x(t)) \overset{\text{(Kettenregel)}}{=} \int_{t(a)}^{t(b)} dt\, \frac{dx}{dt} \cdot \overset{=f}{\frac{d\mathcal{F}}{dx}}$ qed))

→ "Substitution ist Umkehrung der Kettenregel"

Bsp $\int_a^b dx\, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = ?$ Substitution : $x(t) =: \sinh(t)$
Umkehrung ⇔ $t(x) = \sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

$= \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt\, \cosh(t)\, \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}}$

(benutze $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$) $\rightsquigarrow$

$= \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt \cdot 1$

$= \operatorname{arsinh}(b) - \operatorname{arsinh}(a)$

(($\Rightarrow \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ als Nebenresultat))

((check: $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$ nach x ableiten

$\Rightarrow \underbrace{\sinh'(\operatorname{arsinh}(x))}_{= \cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))} = \sqrt{1+x^2}} \cdot \operatorname{arsinh}'(x) = 1$ qed))

Bsp $\int_0^1 dx\, 2x \ln(x) = ?$ Subst. $x =: e^t$ ⇔ $t = \ln(x)$

((vgl. PI, S.39))

$= \int_{-\infty}^0 dt\, e^t\, 2e^t\, t$, $t \to -t/2$ (Skalierungs-Trick, $\lambda = -\frac{1}{2}$)

$= -\frac{1}{2}\int_\infty^0 dt\, 2\left(-\frac{t}{2}\right) e^{-t} = -\frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty dt\, t\, e^{-t}}_{=1,\ \text{via PI, s. Bsp S.39}}$

$= -\frac{1}{2}$ ↯

Bsp $\int_0^\infty dx\, \underbrace{e^{-x}}_{=:t,\ x=-\ln(t)} = \int_1^0 dt\,\left(-\frac{1}{t}\right) t = \int_0^1 dt = 1$

... als $\frac{d}{d\alpha}$ von ... (Differentiation nach Parameter)

Bsp $\int_0^\infty dx\, x^n e^{-x} = \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \underbrace{\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}}_{=\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty dx\, e^{-x} = \frac{1}{\alpha}} \Big|_{\alpha=1}$
$(n\in\mathbb{N})$

$\left[\left(-\frac{d}{d\alpha}\right)\frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2}\ ;\ \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)\frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3}\ ;\ \dots\ ;\ \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\right.$

$= \frac{n!}{\alpha^{n+1}}\Big|_{\alpha=1} = n!$

... als Parameter-abhängig

Bsp $-\beta\frac{d}{d\beta}\ln\left(\int_0^\infty dx\,\frac{x}{e^{\beta x}+1}\right) \overset{x\to x/\beta}{=} -\beta\frac{d}{d\beta}\ln\left(\frac{1}{\beta^2}\int_0^\infty dx\,\frac{x}{e^{x}+1}\right)$

$= -\beta\frac{d}{d\beta}\left[-2\ln(\beta) + \underbrace{\ln\left(\int\dots\right)}_{=\,const}\right]$

$= -\beta\left[-2\frac{1}{\beta}+0\right] = 2$

→ Was tun, wenn gar nichts hilft?

- Integral "analog" auswerten: Fläche aussägen + wiegen
- weitere Integraltabellen wälzen (s. Bibliothek), z.B.
  Abramowitz / Stegun (enthält auch viele spezielle Funktionen)
  Gröbner / Hofreiter (gibt nicht nur Ergebnisse, sondern auch Lösungs-Weg)
- per Computer auswerten
  → analytisch (Mathematica: Integrate[f[x], x]; Maple; ...)
  → numerisch (" : NIntegrate[f[x], {x,0,1}]; ...)
- Integral näherungsweise ausrechnen
  → finde integrierbare Fkt'n $f_{+/-}$ mit $f_+(x) \geq f(x) \geq f_-(x)$
  $\Rightarrow \int_a^b dx\, f_+(x) \geq \int_a^b dx\, f(x) \geq \int_a^b dx\, f_-(x) \qquad (a<b)$
  ((s. auch Reihen- / Taylor-Entwicklung, später in Kap. 5))
- das Integral als neue spezielle Funktion (mit ihrem Namen ?!) definieren ...

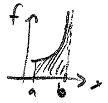
4.4 Uneigentliche Integrale

((sind eigentlich eigentliche, vgl. Bsp. S. 40 unten))

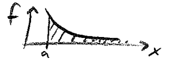
→ haben bisher auf $[a,b]$ stetige $f(x)$ betrachtet

→ kann man Def. von $\int_a^b dx\, f(x)$ sinnvoll erweitern auf Fälle, wo

- $f(x)$ für $x\to b$ divergiert ?
  (d.h. bei $x=b$ nicht def. ist)



- $b\to\infty$ geht ?



$(b\to\infty)$

Ja: Falls $f(x)$ $\forall \beta\in\,]a,b[$ auf $[a,\beta]$ integrierbar ist (also insbes. def.)
und $\int_a^\beta dx\, f(x)$ für $\beta\to b$ konvergiert, dann heisst

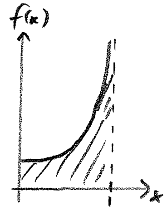
$\int_a^b dx\, f(x) := \lim_{\beta\to b}\int_a^\beta dx\, f(x)$ uneigentliches Integral (von f auf $[a,b]$)

Bem. $b\in\mathbb{R}$ oder $b=+\infty$ OK

Bem. analog für $a\to-\infty$; oder beide gleichzeitig

Bsp $\int_0^\beta dx\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \int_0^\beta dx\,\underbrace{\frac{d}{dx}\left[-2\sqrt{1-x}\right]}_{\text{denn } = +2\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}}$

$= -2\sqrt{1-\beta} + 2\sqrt{1-0}$

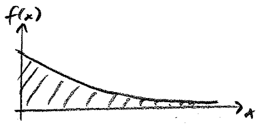


harmlos für $\beta\in\,]0,1[$; kvgt. für $\beta\to1$

$\Rightarrow \int_0^1 dx\,\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2$, obwohl $f(x)$ bei $x=1$ nicht definiert ist!

Bsp $\int_0^\beta dx\, e^{-x} = \int_0^\beta dx\,\underbrace{\frac{d}{dx}\left[-e^{-x}\right]}_{\text{denn } = +e^{-x}}$

$= -e^{-\beta} + e^0 = 1 - e^{-\beta}$, OK für $\beta\in\,]0,\infty[$; kvgt für $\beta\to\infty$

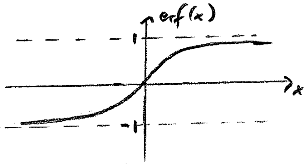


$\Rightarrow \int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1$

Bsp $\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x dy\, e^{-y^2}$ OK $\forall x>0$; kvgt für $x\to\infty$ (gegen 1)
((Beweis: Analysis I))

$\Rightarrow \mathrm{erf}(\infty) = 1$, $\mathrm{erf}(-\infty) = -1$

((endlich einmal zeichnen: ungerade,



))

Bsp $\int_0^\beta dx \sqrt{x} = \int_0^\beta dx \frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\beta^{3/2} - 0$

ok für $\beta \in]0,\infty[$

aber für $\beta \to \infty$ divergent "gegen $+\infty$"

Schreibweise: $\int_0^\infty dx \sqrt{x} = \infty$

4.5 Vorbereitung auf Taylor

Falls $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x $(n+1)$-mal stetig diff'bar,

gilt: $$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\, \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}$$

Beweis: durch vollständige Induktion

Ind.-Anfang: $n=0$: $\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\, \frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0$

$= \frac{f(x_0)}{0!}\cdot 1 + [f(t)]_{x_0}^{x} = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x)$ ✓

Ind.-Annahme: Formel stimmt bis $n-1$

Zu zeigen: Formel stimmt für n

$$\Leftrightarrow f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\, \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{=\frac{d}{dt}u(t)}\underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{=v(t)} \quad , u(t) = f^{(n)}(t), \dot{v} = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\overset{PI}{=} \underbrace{\left[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x}}_{= f^{(n)}(x)\frac{0^n}{n!} - f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} + \int_{x_0}^{x} dt\, f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\, \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$= f(x)$ laut Annahme qed

---

5. Potenzreihen - Entwicklungen

Kennzeichen: Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ sind einfach ($n \to \infty \Rightarrow$ Potenzreihe)

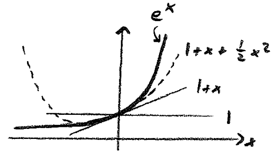
(Werte berechnen ✓ Differenzieren ✓ Integrieren ✓)

→ Approximation einer "beliebigen" Fkt. durch Polynome möglich?

[Antwort: Ja, das geht sehr oft]

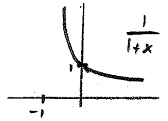
→ kennen schon ein Bsp:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$



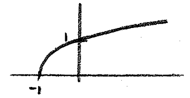
⇒ geht das auch für andere Fkt'n? $\boxed{f(x) \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$

sicher auch bei



$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots$

oder



$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - x^2 + \ldots$

Wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt"

- funktioniert das immer? → fast; bei Physiker-Funktionen ✓
  aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius
- wann nicht? → an "pathologischen" Stellen (Sprünge, Knicke, Pole, ...)
  entwickle nicht $|x|, \frac{1}{x}, e^{-1/x^2}$ um $x=0$
- wozu? → können x^n gut differenzieren und integrieren
  → kann Grenzfälle ansehen, Resultate diskutieren...
  → kenne f nicht, habe nur Gln für f
  setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ an
  und bestimme $c_0, c_1, c_2, \ldots$ aus den Gln.

Bsp $f = 1 + xf$ "Differentialgleichung nullter Ordnung"

hat die Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \overset{!}{=} 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1} \quad \text{, setze } m = n-1$$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \overset{!}{=} 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

⇒ Lsg: $c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ ⇒ alle $c_n = 1$

also $\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{geometrische Reihe}, \quad |x| < 1}$

((wiederentdeckt; vgl. Kap. 1.4))

→ wie bekommt man die Koeffizienten c_n systematisch?

Umgang mit Potenzreihen-Entwicklungen ("Trickkiste", Verfahrensweisen)

- Abspalten ((hier: Bsp v. oben nochmal; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist wilde Fkt))

Bsp
$$\frac{1}{1-x} = 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$$
$$= 1 + x \cdot \left[1 + x \cdot \frac{1}{1-x}\right]$$
$$= \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^N}_{= \frac{1-x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x} \quad \text{(vgl. Ü9a)}$$

- algebraische Umformung

Bsp $\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

⇔ $1 + x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2)x^2 + \dots$

⇒ $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots$

- aus Ableitung ("Int. einer Reihe")

Bsp $\frac{d}{dx}\left[-\ln(1-x)\right] = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$

⇔ $-\ln(1-x) = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$x = 0$: $-\ln(1) = C$ ⇒ $C = 0$

⇒ $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

- aus Stammfunktion ("Diff. einer Reihe")

Bsp $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{d}{dx}\left[2\sqrt{1+x}\right] = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

- Addition von Reihen

Bsp $\cosh(x) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \left[e^x\right]_{\text{gerader Anteil}}$

$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Bsp $\sinh(x) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \left[e^x\right]_{\text{ungerader Anteil}}$

$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ((oder aus Stammfkt: $\sinh = \frac{d}{dx}[\cosh] = \dots$))

Bsp $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \overset{!}{=} \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = \left[\ln(1+x)\right]_{\text{ungerader Anteil}}$

$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

- aus (Differential-) Gleichungen (s. Bsp S. 45 oben)

Bsp Reihe von $f(x) = 3e^{2x}$ aus $f'(x) = 2f(x)$, $f(0) = 3$:

$(3 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)' = 2(3 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

$c_1 + 2c_2 x + \dots = 6 + 2c_1 x + \dots$ ⇒ $c_1 = 6$, $c_2 = c_1$

⇒ $3e^{2x} = 3 + 6x + 6x^2 + \dots$

- aus Multiplikation / Division von Reihen

Bsp $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

⇔ $(\sinh\text{-Reihe}) = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots) \cdot (\cosh\text{-Reihe})$

ausmultiplizieren ⇒ $c_0, c_1, \dots$

- aus $f(f^{-1}(x)) = x$

- Taylor-Reihe

$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$

$f(0) = c_0$; $f'(0) = c_1$; $f''(0) = 2c_2$; $f'''(0) = 2 \cdot 3 c_3$; …

⇒ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

((Bem: warum nicht gleich Taylor? → oft unrentabel!

Bsp $f = \frac{\ln(1+\sinh(x))}{\cosh(x) + x^2}$ → $f'' \sim$ halbe Seite ...

aber: $= \frac{\ln(1+x+0\cdot x^2+..)}{1+0\cdot x+ .. +x^2} = \frac{x+0\cdot x^2+... -\frac{1}{2}(x+0\cdot x+..)^2+...}{1+0\cdot x+...} = x - \frac{1}{2}x^2 + ...$))

Bsp $f = (1+x)^\lambda \;,\; f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1} \;,\; f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2} \;,\; ...$

$$\overset{\text{Taylor}}{\Rightarrow} \underbrace{(1+x)^\lambda = 1+\lambda x}_{\text{oft gebraucht}} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + ... \qquad ((\text{vgl. Ü 43a}))$$

Bem: kann $f(x)$ auch "um $x = x_0$ entwickeln" ((bisher: $x_0 = 0$))

$g(x) := f(x+x_0)$

falls $g(x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$$\Rightarrow \underline{f(x)} = g(x-x_0) = \sum_{n=0}^\infty \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n \underset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}}$$

(($g'(x) = f'(x+x_0)$, $g''(x) = f''(x+x_0)$, ..., $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+x_0)$))

Konvergenz der Potenzreihen / Taylorreihen?

→ oft nützlich: geom. Reihe als "Majorante" (vgl. Kap 1.4, S.16)

$\Rightarrow \sum_k a_k$ ist konvergent, falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ "Quotienten-
divergent ≥ 1 kriterium"

((denn: falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|, ... \le q \Rightarrow |a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le ... \le q^k|a_n|$,
daher ist die geom. Reihe $\sum_n q^n$ (kvgt. für $|q|<1$) eine Majorante))

→ konvergiert $\sum_n c_n x^n$? ⇒ untersuche ob $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}\, x^{n+1}}{c_n\, x^n}\right| < 1$

$\Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \equiv$ "Konvergenzradius"

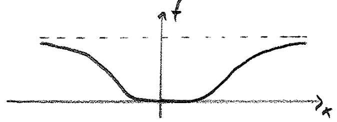
→ konvergiert $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$? ⇒ untersuche ob $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{f^{(n+1)}(0)\, x^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{f^{(n)}(0)\, x^n}\right| < 1$

(viele Bsp in Ü 45) → $\Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n\, f^{(n-1)}(0)}{f^{(n)}(0)}\right| =$ "Konvergenzradius"

Für $|x| <$ "Konvergenzradius R" ist die Konvergenz also garantiert.
Für andere x $(x = \pm R)$ kann die Reihe auch konvergieren; muss man zeigen.

Wogegen konvergieren diese Potenzreihen / Taylorreihen?

Bsp (als Warnung) $f(x) = e^{-1/x^2}$



$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, $f'(0) = 0$

$f''(x) = (...) e^{-1/x^2}$, $f''(0) = 0$; ... ; $f^{(n)}(0) = 0$

Taylor $= 0 + 0 + 0 + ... \ne f(x)$

Grund : $x = 0$ ist "pathologische" Stelle
(("wesentliche Singularität"))

→ bei solchen (sehr exotischen) Ausnahmen ist in der Regel sofort klar, dass Potenzreihe stark von $f(x)$ abweicht.

→ meist: falls Taylorreihe existiert
(d.h. f beliebig oft diff'bar und Reihe konvergent)
dann ist sie gleich $f(x)$

Wie schnell konvergieren die Reihen gegen f(x)?

Würde gern jedes $f = \text{Polynom}_m + \text{Rest}_m$ schreiben, wobei Rest "klein" ist.

$$= \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{m+1})$$

↑ "Ordnung": weggelassene Terme haben mindestens m+1 Faktoren x

Bsp zur Notation: $(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \mathcal{O}(x^2)$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$

$(1+\lambda x + \mathcal{O}(x^2)) \cdot (1 + x + \mathcal{O}(x^2)) = 1 + (\lambda+1)x + \mathcal{O}(x^2)$

Wie groß ist aber der "Fehler" in $f \approx \text{Polynom}_m$?

→ müssen die Größe des "Restgliedes" $\text{Rest}_m = f - \text{Polynom}_m$ abschätzen.

dazu dient der

Satz von Taylor

Sei $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x $(m+1)$ mal stetig diff'bar.

Dann gibt es ein y zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{=: f_m(x) \ \text{Taylor-Polynom}} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(y)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}}_{= f(x)-f_m(x) =: R_m(x) \ \text{Restglied}}$$

Bem.: $n=0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(y)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(y)$ Mittelwertsatz! ((vgl. Kap. 3.3) S.30)

$\Rightarrow$ Taylor-Entwicklung ist Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

((Beweis: wissen aus Kap. 4.5, dass die Behauptung wahr ist für

$R_m(x) = \int_{x_0}^{x} dt \, \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t)$. (via vollst. Induktion)

Falls $x \geq x_0$: sei t_{max} das Maximum von $f^{(m+1)}(t)$ auf $[x_0, x]$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{x_0}^{x} dt \, \frac{(x-t)^m}{m!}}_{= \left[-\frac{1}{m!}\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}} f^{(m+1)}(t_{max}) = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{max})$$

$\geq R_m(x)$

analog zeigt man: $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{min}) \leq R_m(x)$

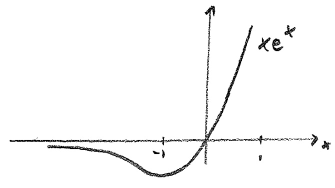
$\Rightarrow$ (Zwischenwertsatz): da $f^{(m+1)}$ stetig, existiert

ein $y \in [x_0, x]$ mit $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(y) = R_m(x)$

Falls $x < x_0$: analog

~~qed~~))

Bsp $f(x) = x e^x$



$f'(x) = xe^x + e^x$

$f''(x) = xe^x + 2e^x$

$\vdots$ (vollst. Ind.)

$f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x$

$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n$, $f^{(n)}(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{n}{e}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n$

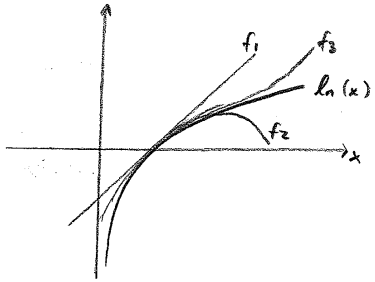
$= 0 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + O(x^4)$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{e \cdot n!}(x+1)^n$

$= -\frac{1}{e} + 0 \cdot (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2e} + \frac{(x+1)^3}{3e} + O((x+1)^4)$

$\rightarrow$ Mathematica : Manipulate[...] zeigt Güte der Näherung.

Bsp $f(x) = \ln(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$



$f'(x) = x^{-1}$

$f''(x) = (-1)\, x^{-2}$

$f'''(x) = (-1)(-2)\, x^{-3}$

$\vdots$ (vollst. Ind.)

$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\, x^{-n}$

$\Rightarrow$ Entwicklung um $x_0 = 1$: $f^{(0)}(x_0) = \ln(1) = 0$

$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$ für $n \geq 1$

$$\ln(x) = \ln(1 + \underbrace{(x-1)}_{=: z \to x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

(vgl. S. 45; dort aus geom. Reihe)

$\Leftrightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5)$

$= \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_m(x) =: f_m(x) + R_m(x)$

Restglied $R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(y)}{(m+1)!} x^{m+1} = \frac{(-1)^m m!}{(m+1)!} \frac{x^{m+1}}{y^{m+1}} = \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{x^{m+1}}{(1+\vartheta_x)^{m+1}}$

$y \in [1, 1+x]$ $\vartheta \in [0,1]$

Konvergenz? $|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+1}{n}\right| = 1$

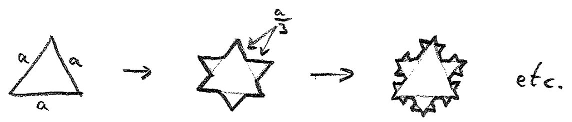
(Taschenrechner macht's im Prinzip auch so!) $\rightarrow$ aber z.B. $\ln(2) = -\ln(2^{-1}) = -\ln(1-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \ldots$

$= 0.693 \ldots$

$0.5 \quad 0.625 \quad 0.\bar{6} \quad 0.682$

Bsp (geom. Reihe) Koch'sche Schneeflocke

Konstruktionsvorschrift



Frage: Flächeninhalt = ?

$$F(a) = \frac{a}{2}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{4-1} = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$F_0 = F(a)$$

$$F_1 = F_0 + 3\cdot F\left(\frac{a}{3}\right)$$

$$F_2 = F_1 + 3\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3}\right)$$

$$F_3 = F_2 + 3\cdot 4\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3\cdot 3}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_\infty = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot \frac{a^2}{3^{2n}}\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{3}{4}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1$$

geom. Reihe! (S. 42) $\left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right.$

$$= \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{8}{5} = a^2\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Frage: Umfang = ?

$$U_0 = 3a$$

$$U_1 = \frac{4}{3}U_0$$

$$U_2 = \frac{4}{3}U_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U_0$$

$$\vdots$$

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0 \qquad \Rightarrow U_\infty = \infty \; !$$

---

6. Komplexe Zahlen

Warum? → $\mathbb{R}$ abgeschlossen bzgl. $+, -, \cdot, \div$

aber *nicht* bzgl. Wurzelziehen aus neg. Zahlen:

$x^2 = -1$ für $x \in \mathbb{R}$ *nicht* lösbar $\quad (x\cdot x \geq 0$ in $\mathbb{R})$

also $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

bzw. Polynom $P(x) = x^2+1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$

$\mathbb{C}$ (NS)

allgemein:

- $b^q \notin \mathbb{R}$ falls $b<0$, $q \notin \mathbb{Z}$
- nicht jedes Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ hat NS in $\mathbb{R}$

→ komplexe Zahlen beheben beide "Defizite"

→ " vereinfachen viele Rechnungen

→ " machen viele Zusammenhänge klarer

6.1 Grundlagen

Def. $\quad i := \sqrt{-1}$ $\quad$ imaginäre Einheit $\quad \left(\text{s.o.: } \begin{matrix} x^2+1=0 & \Rightarrow x = \pm i \\ \text{und} & i \notin \mathbb{R} \end{matrix}\right)$

Def. $\quad \mathbb{C} := \{ a+ib \mid a,b \in \mathbb{R} \}$ $\quad$ komplexe Zahlen

→ jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = a+ib$ schreiben,

mit eindeutigen $a, b \in \mathbb{R}$

(d.h. falls $z_1 = z_2$, $z_1 = a_1+ib_1$, $z_2 = a_2+ib_2$ $\Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

→ Bezeichnung: $\left.\begin{matrix} \text{„Realteil von } z\text{"} : & a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ \text{„Imaginärteil von } z\text{"} : & b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\}$ $\underline{z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)}$

→ Rechnen in $\mathbb{C}$ per Rechenregeln in $\mathbb{R}$; und $i^2 = -1$ setzen

Bsp $\quad z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1+a_2) + i(b_1+b_2)$

Bsp $\quad z_1 \cdot z_2 = (a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2) = a_1a_2 + a_1 i b_2 + ib_1a_2 + i^2 b_1 b_2$

$\quad = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

Bsp sei $z = a+ib \neq 0$ (d.h. $a \neq 0$ und/oder $b \neq 0$, also $a^2+b^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{(-b)}{a^2+b^2}$$

((Test: $z^{-1}\cdot z = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\cdot(a+ib) = \frac{a^2-(ib)^2}{a^2+b^2} = 1$ ✓))

Bsp $i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ \dots \quad \Rightarrow i^{n+4}=i^n$

$i^{-1}=-i,\ i^{-2}=-1,\ i^{-3}=i,\ i^{-4}=1,\ \dots$

→ da alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$, gilt z.B. auch

$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad \forall z_1,z_2 \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0$ (binomische Formel)

$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \sum_{k=0}^{n} z^k \quad \forall z \neq 1,\ n \in \mathbb{N}_0$ (geom. Reihe)

etc.

→ Bezeichnung: $\mathrm{Im}(z)=0 \Rightarrow z = a+i\cdot 0 \in \mathbb{R}$ heisst "(rein) reelle Zahl" →((also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$))

$\mathrm{Re}(z)=0 \Rightarrow z = 0+ib$ heisst "(rein) imaginäre Zahl"

Def. $z^* := a-ib$ heisst die zu $z=a+ib$ (komplex) konjugierte Zahl

↑((manchmal auch als $\bar{z}$ geschrieben))

Bsp

$z+z^* = a+ib+a-ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2}$

$z-z^* = a+ib-(a-ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z) \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{z-z^*}{2i}$

$z\cdot z^* = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2 \Rightarrow z^{-1} = \frac{z^*}{z\cdot z^*}$

Bem.: Die "Ordnungsstruktur" von $\mathbb{R}$ (d.h. für $a,b \in \mathbb{R}$ gilt immer entweder $a<b$, oder $a>b$, oder $a=b$) macht auf $\mathbb{C}$ keinen Sinn mehr

→ definiere daher Betragsfunktion auf $\mathbb{C}$ als

$$|\cdot|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+,\quad z \mapsto |z| := \sqrt{z\cdot z^*} = \underbrace{\sqrt{\underbrace{[\mathrm{Re}(z)]^2}_{\mathbb{R}_0^+} + \underbrace{[\mathrm{Im}(z)]^2}_{\mathbb{R}_0^+}}}_{\mathbb{R}_0^+}$$

⇒ Eigenschaften wie in $\mathbb{R}$, s. Ü51

6.2 Fundamentalsatz der Algebra

Für jedes komplexe Polynom $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$

(Grad $n \in \mathbb{N}_0$, Koeff's $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$; $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

gilt es Zahlen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^{n}(z-z_k) = a_n(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$

((Beweis: für $n=0,1$ trivial; $n=2$: Ü52; $n \geq 3$: Analysis-Vorl...))
└(Funktionentheorie)

Bem.:
- die z_k sind also die (komplexen) NS von $P_n(z)$: $P_n(z_k)=0$; Mehrfach-NS möglich, z.B. $P_2(z) = z^2-2z+1 = (z-1)^2$

  ⇒ jedes Polynom vom Grade $n \geq 1$ hat mind. eine NS in $\mathbb{C}$
- $P_n(z)$ ist sowohl durch die $(n+1)$ Zahlen $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ als auch durch $\{z_1, \dots, z_n, a_n\}$ vollständig festgelegt.
- analog zum Fund.-Satz der Zahlentheorie (vgl. Kap. 1.3,5,7) (Primfaktorzerlegung): Faktorisierung von $P(z)$ viel schwieriger als "Ausmultiplizieren".

→ Folgerung: Für "reelle Polynome" (d.h. $a_k \in \mathbb{R}$) gilt

$$[P_n(z)]^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* (z^k)^* = \sum_{k=0}^{n} a_k (z^*)^k = P_n(z^*)$$

$\Rightarrow P_n(z_k^*) = [P_n(z_k)]^* = 0^* = 0$

⇒ falls $z_k = a+ib$ NS, dann auch $z_k^* = a-ib$!

(d.h. NS sind komplex-konjugierte Paare oder rein reell.)

kann ((wegen $(z-z_k)(z-z_k^*) = z^2 - \underbrace{(z_k+z_k^*)}_{\mathbb{R}} z + \underbrace{z_k z_k^*}_{\mathbb{R}}$)) schreiben:

$$P_n(z) = a_n \underbrace{(z^2+A_1 z+B_1)\cdots(z^2+A_m z+B_m)}_{\text{komplex konj. NS}} \underbrace{(z-C_1)\cdots(z-C_{n-2m})}_{\text{reelle NS}}$$

mit $a_n, A_j, B_j, C_j \in \mathbb{R}$ und $A_j^2 < 4B_j$ (vgl. Ü52)

→ wie *bestimmt* man die *NS* z_k ?

- $n=1$: trivial
- $n=2$: "p-q-Formel" für quadratische Gln. (vgl. *Ü52*)
- $n=3$: es gibt komplizierte / unpraktische Lösungsformeln für kubische Gln.
- $n \geq 3$: in der Praxis müssen NS *erraten* werden (bzw. näherungsweise / numerisch / … bestimmt)
  ((man kann sogar *beweisen*, dass es *keine* allgemeine Formel gibt))
  $\overset{n\geq4}{\swarrow}$

Bsp $P(z) = 2i\,z^3 + (2-6i)z^2 + (-6+4i)z + 4$

raten: $P(0) = 4\,;\quad P(1) = \cancel{2i} + \cancel{2} - \cancel{6i} - \cancel{6} + \cancel{4i} + \cancel{4} = 0 \quad \Rightarrow \underline{z_1 = 1}$

$P(2) = \cancel{16i} + \cancel{8} - \cancel{24i} - \cancel{12} + \cancel{8i} + \cancel{4} = 0 \quad \Rightarrow \underline{z_2 = 2}$

statt weiterzuraten: laut Fund.-Satz $P(z) = 2i(z-1)(z-2)(z-\underset{\text{noch unbekannt}}{z_3})$

$z=0$: $4 = 2i(-1)(-2)(-z_3) = -4iz_3$

$\Leftrightarrow \underline{z_3 = i}$

→ weitere Bsp in Übung

6.3 Komplexe Funktionen

(hier: das Wichtigste ; (*viel*) mehr: Analysis / Funktionentheorie

→ übertrage alle Def's für Folgen, Reihen, Konvergenz von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$; z.B. :

Eine *komplexe Potenzreihe* $\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{z^k}{k!}$ $\quad (c_k, z \in \mathbb{C})$

konvergiert für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert aus $\mathbb{C}$,

wenn $|z| < \lim_{k\to\infty} \frac{k\,\tilde{c}_{k-1}}{\tilde{c}_k}$ wobei: $\underset{\in \mathbb{R}^+}{\tilde{c}_k} \geq \underset{\in \mathbb{C}}{|c_k|}$

Bsp $$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ n+1 & \text{für } z = 1 \end{cases}$$

hier ist $c_k = k!$,

also folgt mit $\tilde{c}_k := c_k$: $\frac{k\,\tilde{c}_{k-1}}{\tilde{c}_k} = \frac{k(k-1)!}{k!} = 1$,

also $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ falls $|z| < 1$

Für *komplexe Funktionen* (d.h. Abb. $f: A \to B$ mit $A, B \subset \mathbb{C}$; $z \mapsto f(z)$) können ebenfalls die (ε-δ-) Def's von Stetigkeit, Ableitung aus dem reellen übernommen werden ;

→ insbesondere gelten weiterhin alle Ableitungsregeln

→ geometrische Veranschaulichung der Def's oft nicht mehr möglich / sinnvoll

Bsp $\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergent $\forall z \in \mathbb{C}$

$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ gilt $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Beweis genau wie in *Ü12*)

→ die "hyperbolischen" Funktionen erfüllen auch alles wie in $\mathbb{R}$:

$$\cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

→ Für Potenzreihen mit *reellen* Koeff's , d.h. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!}$, $c_k \in \mathbb{R}$

folgt wieder $[f(z)]^* = f(z^*)$ ((vgl. reelle Polynome, S.54))

Bsp $[\exp(z)]^* = \exp(z^*)$ etc.

→ konvergente komplexe Potenzreihen sind beliebig oft (stetig) diff'bar, und zwar gliedweise : $f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n} \frac{z^k}{k!}$

Bsp $\frac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$; $\frac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z)$ etc.

wichtigste Unterschiede zu reellen Funktionen:

((alle Beweise ⇒ Analysis-Vorlesung, Funktionentheorie))

- $f(z)$ diff'bar ⇒ sogar beliebig oft diff'bar
- Eigenschaften, welche Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ $(<,>,=)$ brauchen, sind nicht übertragbar.
  z.B. Monotonie, Extrema, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz
- Def von Integration muss abgeändert werden:
  haben in $\mathbb{C}$ kein "oben"/"unten", also keine "Fläche unter dem Graphen"

wichtig für die Physik sind komplexwertige Fkt'n mit reellem Argument,

d.h. $f: \begin{matrix} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{C}$

also ist f von der Form $f(x) = u(x) + iv(x)$,

$u: \begin{matrix} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x) \end{matrix}$; $v: \begin{matrix} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto v(x) \end{matrix}$

und $u(x) = \mathrm{Re}(f(x))$, $v(x) = \mathrm{Im}(f(x))$ sind zwei ganz normale reelle Fkt'n.

⇒ geometr. Veranschaulichung, Kurvendiskussion, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz und insbesondere Integration wie üblich:

$$\int_a^b dx\, f(x) := \int_a^b dx\, u(x) + i \int_a^b dx\, v(x) =$$  $+\, i$ 

können also rechnen wie gewohnt, insbes. gilt Hauptsatz

$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a)$, falls $f(x)$ stetig und $F'(x) = f(x)$

((⇔ $u(x), v(x)$ stetig und $F(x) = U(x) + iV(x)$ mit $U'(x) = u(x)$, $V'(x) = v(x)$))

(hier noch $\exp(z)$; $= e^z$ erst in Kap. 6.6)

Bsp $\int_{-a}^{a} dx\, i\exp(ix) = \int_{-a}^{a} dx\, \frac{d}{dx}[\exp(ix)] = [\exp(ix)]_{-a}^{a} = \exp(ia) - \exp(-ia) = 2\sinh(ia)$

Bsp $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!}$, $c_k = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \int_a^b dx\, f(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k!}\right]_a^b + i \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} \frac{x^k}{k!}\right]_a^b$

Bsp $\left[\int_a^b dx\, f(x)\right]^* = \int_a^b dx\, u(x) - i \int_a^b dx\, v(x) = \int_a^b dx\, f^*(x)$

6.4 Trigonometrische Funktionen ((endlich..))

für beliebige komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ machen wir die

Def $\cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$, $\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$

⇒ $\cos(z) + i\sin(z) = \exp(iz)$ "Euler'sche Formel"

Bem.: vgl. mit Def von cosh, sinh

⇒ $\cos(z) = \cosh(iz)$, $\sin(z) = \frac{\sinh(iz)}{i}$

Potenzreihen direkt aus exp-Reihe (oder cosh/sinh Reihen),

(($\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = [\exp(z)]_{\text{gerader Anteil}} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right]_{\text{gerader Anteil}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$))

($(iz)^{2k} = (i^2)^k z^{2k} = (-1)^k z^{2k}$)

$$\cos(z) = \cosh(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(z) = \frac{\sinh(iz)}{i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Eigenschaften (folgen direkt aus Def, oder von cosh/sinh)

- $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$
  (gerade Funktion) (ungerade Funktion)
- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
- $\frac{d}{dz}\cos(z) = -\sin(z)$, $\frac{d}{dz}\sin(z) = \cos(z)$
- sämtliche "Additionstheoreme" folgen aus Def
  z.B. $\sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) = \sin(z_1 + z_2)$
  $\cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) = \cos(z_1 + z_2)$
  (Spezialfall: $z_1 = z$, $z_2 = -z$
  $\Rightarrow \cos(z)\cos(-z) - \sin(z)\sin(-z) \overset{\text{gerade/ungerade}}{=} \underline{\cos^2(z) + \sin^2(z)} = \cos(0) = \underline{1}$
  ("Trigonometrischer Pythagoras")
- für $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ folgt z.B.

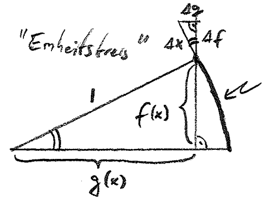
$\sin(a+ib) = \sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)$

$\cos(a+ib) = \cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)$

$\exp(a+ib) = \exp(a)\,[\cos(b) + i\sin(b)]$

Nachholbedarf: müssen noch $\cos(x), \sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ "kennenlernen":

"Einheitskreis"



Bogenlänge x , $\underset{\text{Bogenmass}}{2\pi} \mathrel{\hat=} \underset{\text{Gradmass}}{\text{"}360°\text{"}}$

$f \mathrel{\hat=} s$
$g \mathrel{\hat=} c$

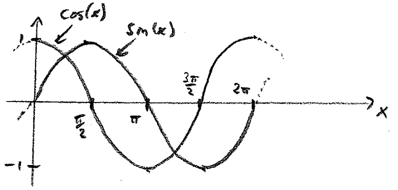
es gilt $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{g(x)}{1}$ (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke)

$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{-f(x)}{1}$

$\Rightarrow f'(x) = g(x) \ , \ g'(x) = -f(x)$
$f(0) = 0 \ , \ g(0) = 1$ } genau die Eigenschaften von S.58!
$\Rightarrow \underline{f(x) = \sin(x), \ g(x) = \cos(x)}$

$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$

$\cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$



aus obiger $\triangleleft$-Skizze: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0 \ , \ \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \ , \ \ldots$

aus Funktions-Skizze: $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin(x) \ , \ \sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos(x)$

$\Rightarrow \cos(x+\pi) = -\cos(x) \ , \ \sin(x+\pi) = -\sin(x)$
$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \ , \ \sin(x+2\pi) = \sin(x)$

aus $\exp(a+ib) = \exp(a)[\cos(b) + i\sin(b)]$ (s.S.58) folgt

$\underline{\exp(i\pi) = -1} \ , \ \underline{\exp(2\pi i) = 1}$

und wegen $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$ ist

$\underline{\exp(z+2\pi i) = \exp(z)}$, "exp ist $\underset{\sim}{2\pi\text{-periodisch}}$ in imaginärer Richtung"

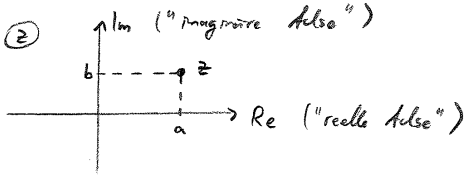
also: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht injektiv

$\Rightarrow \exists$ keine Umkehrabbildung
(erst nach Einschränkungen)

((auch nicht surjektiv: $\exp(z) \neq 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$))

6.5 Gauss'sche Zahlenebene (komplexe Ebene)

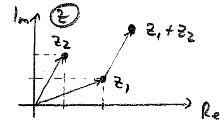
"lese" eine komplexe Zahl $z = a+ib \in \mathbb{C}$ als Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene



→ Rechenoperationen geometrisch veranschaulichbar:

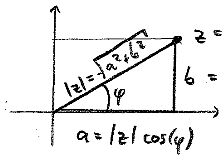
z.B. $z^* = a - ib$ $\mathrel{\hat=}$ Spiegelung an Re-Achse
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\mathrel{\hat=}$ Abstand zum Ursprung ((§7: Vektorbetrag))

Addition:



(($\hat=$ Vektoraddition, vgl. §7))

→ alternative Koordinatenwahl in $\mathbb{R}^2$. Polarkoordinaten



$z = a+ib \mathrel{\hat=} (a,b) \mathrel{\hat=} (|z|, \varphi)$

$\varphi \in [0, 2\pi[$ im Bogenmass!

$\varphi := \arg(z)$ "Argument von z"

$\arg(0) := 0$ ((damit arg auf $\mathbb{C}$ def))

Bem: • die Fkt $\arg: \mathbb{C} \to [0, 2\pi[$ ist unstetig (springt um 2π) entlang der positiven reellen Achse

• manchmal andere Konventionen, z.B. $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$

• in $\underline{\ddot{U}56}$: $\frac{b}{a} = \tan(\varphi) \Rightarrow \arg(z) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}\right) + n(z)\cdot\pi$, $n(z) \in \{0,1,2\}$

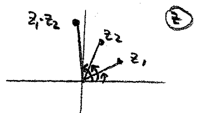
$\Rightarrow \underline{z = a+ib} = |z|\cos(\varphi) + i|z|\sin(\varphi) = |z|\exp(i\varphi) = \underline{|z|\exp\{i\cdot\arg(z)\}}$

→ $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \exp\{i[\arg(z_1) + \arg(z_2)]\}$

aber auch $= |z_1 \cdot z_2| \exp\{i \cdot \arg(z_1 \cdot z_2)\}$

$\Rightarrow \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi \cdot n$

((fast wie ln)) (($n \in \{0,1\}$ so dass $\arg \in [0, 2\pi[$))



Mult. $\mathrel{\hat=}$ Drehstreckung

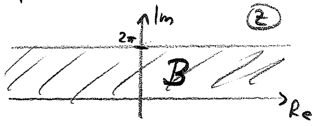
6.6 Logarithmus und Potenzen

wieder als Umkehrfunktion von exp definieren ?!

Kap. 6.4, S. 59: exp ist 2π-periodisch auf Im-Achse

→ beschränken uns auf Streifen

$B := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in [0, 2\pi[\}$



Def $\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B$

$$z \mapsto \underline{\ln(z) := \ln|z| + i \arg(z)}$$

↑ "reeller ln, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, vgl. Kap. 2.4, S.21

→ es folgt $\ln(z_1 \cdot z_2) \overset{!}{=} \ln|z_1 \cdot z_2| + i \arg(z_1 \cdot z_2)$

$$\overset{!}{=} \ln|z_1| + \ln|z_2| + i\,[\arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi n]$$

$$= \ln(z_1) + \ln(z_2) - 2\pi i n$$

(($\in \{0,1\}$ so dass $[\ldots] \in [0, 2\pi[$))

Bem.:
- falls $z \in \mathbb{R}^+$: $|z| = z$, $\arg(z) = 0$ ⇒ reeller Log aus Kap 2.4
- $\underline{\underline{\exp(\ln(z))}} \overset{!}{=} \exp(\ln|z| + i \arg(z)) = \exp(\ln|z|)\exp(i \arg(z))$

  $\overset{!}{=} |z| \exp(i \cdot \arg(z)) \overset{[\text{vgl. S.60}]}{=} \underline{\underline{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

  also ist die "eingeschränkte Exponentialfkt" $\exp : B \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ umkehrbar (im Gegensatz zu $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

  $\ln(\exp(z)) = z \quad \forall z \in B$
- es gibt verschiedene Def's; hier nur eine davon gezeigt; kann $\ln(z)$ auch als mehrwertige Fkt behandeln ("Blätter")

---

allgemeine (komplexe) Potenzen werden nun analog zu Kap. 2.4 (S.21) via exp definiert:

Def für $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$

$$\underline{b^z := \exp(z \ln(b))}$$

sowie $0^z := \lim_{b \to 0} b^z = 0$ für $z \neq 0$

und $0^0 := 1$

Schreibweise: $\sqrt[n]{b} := b^{1/n}$

→ die Def von b^x in Kap 2.4 ist Spezialfall ($|b| = b$, $\arg(b) = 0$)

→ die Potenzgesetze folgen wieder aus Def (mit exp-Eigenschaften):

$b^{z_1} \cdot b^{z_2} = b^{z_1 + z_2}$ ($\Rightarrow b^{-z} = \frac{1}{b^z}$ für $z_1 = z$, $z_2 = -z$)

$(b^{z_1})^{z_2} = b^{z_1 z_2} \cdot \exp(2\pi i n z_2)$ so, dass $\mathrm{Im}(z_1 \ln b) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$

$a^z b^z = (ab)^z \exp(2\pi i n z)$ so, dass $\arg(a) + \arg(b) - 2\pi n \in [0, 2\pi[$

$\ln(z_1^{z_2}) = z_2 \ln(z_1) + 2\pi i n$ so, dass $\mathrm{Im}(z_2 \ln(z_1)) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$

→ wegen $\ln(e) = 1$ folgt

$e^z = \exp(z \cdot \ln(e)) = \exp(z)$

$\Rightarrow (\exp(z_1))^{z_2} = \exp(z_1 z_2 + 2\pi i n z_2)$ so, dass $\mathrm{Im}(z_1) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$

s.o. (→ wegen $\exp(i\pi) \overset{\text{Euler}}{=} \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$ $\Rightarrow \underline{e^{\pi i} + 1 = 0}$

$\exp(2\pi i) = \exp(i\pi) \cdot \exp(i\pi) = 1$ $\Rightarrow \underline{e^{2\pi i} = 1}$

((überraschend einfache Verknüpfung von $e, \pi, 1, 0, i$)))

7. Vektoren und Felder

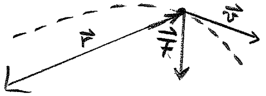
bisher: Funktionen von reellen Variablen
+ deren Eigenschaften, Rechenregeln, ...
komplexe Zahlen (→ Ebene $\mathbb{R}^2$)

jetzt: 3-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^3$, "Physik spielt sich hier ab"

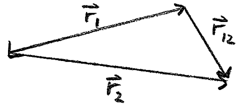
→ Beschreibung durch Richtungsangaben, Pfeile!

Bezugspunkt vereinbaren: Ursprung

Ortsvektor $\vec{r}$: Pfeil Ursprung → Physik



Verschiebungsvektor:
Pfeil Punkt → Punkt



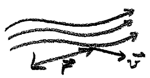
((Einheiten? Bsp: $\vec{v}$ in m/s ? ↔ Übersetzungsregel (cm auf Papier ↔ m/s)))

Betrag: Länge des Pfeils, z.B. $|\vec{r}| = r$, $|\vec{v}| = v$, $|\vec{F}| = F$

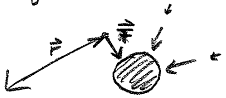
→ Pfeil hat Richtung, Betrag, Anfangspunkt

Bsp Ball hat bei $\vec{r}$ die Geschwindigkeit $\vec{v}$

Bsp Wasser-Strömung $\vec{v}(\vec{r})$



Bsp Erd-Gravitationsfeld $\vec{F}(\vec{r})$

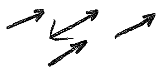


⇒ anschauliche (Physiker-) Def:

Vektoren sind Pfeile bzgl. Betrag und Richtung, die mit einer Zahl zu multiplizieren und die zu addieren physikalisch sinnvoll ist.

Bem: • ≠ Mathematiker-Vektor (s. unten: bilden Vektor-Raum)
• Physik-Pfeil ist real (Verhalten bei Drehungen)

• 1. Def-Zeile: Vektor ≙ Gesamtheit der Pfeile mit ...
→ kann Repräsentanten wählen



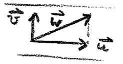
• 2. Def-Zeile: 1,7 · ↗ = ↗ ; (−1) · ↗ = ↙ etc anschaulich klar
→ Einheitsvektor $\frac{1}{a} \cdot \vec{a} = \vec{e}$, $|\vec{e}| = 1$; $\vec{a} = a\vec{e}$

• 3. Def-Zeile: (vgl. Bild oben) $\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$
funktioniert mit Vektoren gleicher Dimension (Übersetzungs-Regel)
Reihenfolge egal: $\underset{\vec{a}}{↗} + \underset{\vec{b}}{↘}$ = ◇ = $\underset{\vec{b}}{↘} + \underset{\vec{a}}{↗}$

→ Nullvektor $\vec{0} := \vec{a} + (-\vec{a})$

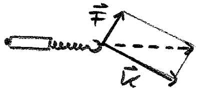
• "physikalisch sinnvoll"? → (an Bsp verstehen):

Bsp Geschwindigkeiten: Mult. ✓ Add.? → Fluss:
$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ✓



⇒ Ja, sind Vektoren.

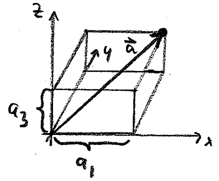
Bsp Kräfte: → Federwaage
⇒ Ja, sind Vektoren.



Bsp Drehungen: ((rechte-Hand-Regel: Daumen ≙ Drehachse,
Finger ≙ Drehrichtung, Betrag ≙ Winkel))
Test: ↑ + ← $\overset{?!}{\neq}$ ← + ↑
⇒ Nein, sind keine Vektoren

7.1 Komponentendarstellung, Eigenschaften, Vektorraum

→ bisher: Vektor ≙ Pfeil; Addition ≙ aneinander basteln
Vereinfachung?! Vektor $\vec{a}$ gegeben; wähle Repräsentant ab Ursprung.
messe Höhe der Spitze → a_3, etc



Komponenten $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ((oder $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$))

<u>Bem.:</u> • Systematik: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ ← ausnahmsweise

• alle Komponenten haben gleiche Dimension , $[a_1] = [a_2] = [a_3] = [a] = [\vec{a}]$

<u>Bsp</u> $[v_3] = \text{Länge}/\text{Zeit} = m/s$, $[y] = \text{Länge} = m$

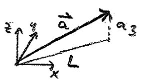
$\vec{v} = (1\,m/s,\ 0,\ 2\,m/s) = (1, 0, 2)\ m/s$

• hier meist $\mathbb{R}^3$; Verallg. auf $\mathbb{R}^n$ einfach: $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

→ die oben eingeführten Pfeil-Eigenschaften in Komponenten-Sprache (gleich für $\mathbb{R}^n$):

Betrag : $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

((n=3 : wegen Pythagoras: $a^2 = a_3^2 + L^2$, $L^2 = a_1^2 + a_2^2$))



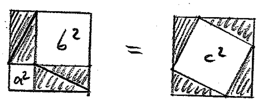
Mult. : $c \cdot \vec{a} = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$

((anschaulich klar: z.B. c=2 ⇒ Schatten-Verdopplung))

Add. : $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

((anschaulich klar ; für z-Komponente gilt z.B. $z = a_3 + b_3$ ✓))

<u>Bem:</u> Pythagoras ist einfach, geometrischer Beweis



<u>Verallgemeinerung</u>: mathematisch abstrahiert haben unsere Vektoren (des $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$) die Struktur eines Vektorraumes :

<u>Def</u> <u>Vektorraum</u> heisst ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus

(i) einer Menge V (mit Elementen $\vec{v}, \vec{w}, \dots$, genannt "<u>Vektoren</u>")

(ii) einer Abbildung $+ : V \times V \to V$

"<u>Addition</u>" $(\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} + \vec{w}$

(iii) einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

"<u>äussere Multiplikation</u>" $(x, \vec{v}) \mapsto x\vec{v} \equiv x \cdot \vec{v}$ ← Punkt egal

mit den folgenden Eigenschaften ("<u>Vektorraum-Axiome</u>") :

((hier $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$; $x, y \in \mathbb{R}$))

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Kommutativgesetz
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ Assoziativgesetz
(3) $\exists\ \vec{0} \in V$ mit $\vec{v} + \vec{0} + \vec{v}$ Nullvektor
(4) $\exists\ (-\vec{v}) \in V$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ inverser Vektor

} d.h. $(V, +)$ ist abelsche Gruppe

(5) $x(y\vec{v}) = (xy)\vec{v}$ Assoziativgesetz
(6) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ neutrales Element
(7) $x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$
(8) $(x+y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v}$

} Distributivgesetze

<u>Bem:</u>

- die Elemente aus $\mathbb{R}$ heissen <u>Skalare</u> ,
  die aus V heissen Vektoren ; Bezeichnung ... $\vec{v}, \vec{w} \mathrel{\hat{=}} \underline{v}, \underline{w} = \mathbf{v}, \mathbf{w} = |v\rangle, |w\rangle$
- haben oben einen Vektorraum (VR) über $\mathbb{R}$ definiert;
  können z.B. auch überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen, dann Skalare $\in \mathbb{C}$
- unsere anschauliche Def. war der Spezialfall des sogenannten <u>Euklidischen</u> (Vektor-) <u>Raums</u> ,
  $$V = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}} = \{ (v_1, v_2, \dots, v_n) \mid v_k \in \mathbb{R} \} , n \in \mathbb{N}$$
- benutzen dasselbe Symbol für Add. und Mult. in V und $\mathbb{R}$;
  a priori sind dies aber völlig verschiedene Dinge!
- es gibt in Physik/Mathematik viele weitere (ausser $\mathbb{R}^n$) wichtige VR's . z.B. Polynome (vgl. <u>Ü59</u>), Hilbert-Raum (QM), ...

<u>Def</u> Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_d \in V$ heissen eine <u>Basis</u> des VR's , wenn jedes $\vec{v} \in V$ als $\vec{v} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_d\vec{e}_d = \sum_{k=1}^{d} x_k \vec{e}_k$ mit eindeutigen Zahlen $x_k \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. (Bsp: <u>Ü59</u>)

<u>Bem:</u>

- d heisst dann <u>Dimension</u> von V; $d \in \mathbb{N}$, aber auch $d = \infty$ mögl.
- unser <u>kartesisches Koordinatensystem</u> des $\mathbb{R}^3$ oben hatte als Basis $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$; $d = n = 3$

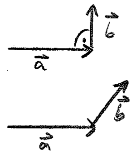
Bsp für Vektorräume in Physik [≈ Embacher, §15]

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: Ebene + Raum
  Geschwindigkeit, Impuls, elektrische Feldstärke, ...
- $\mathbb{R}^4$: Raum-Zeit, spezielle Relativitätstheorie
  (setze Lichtgeschw. $c=1$ ⇒ kann Zeit in Längeneinheiten messen)
  $\{(x,y,z) ; \text{Zeit } t\} \to (x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit $x_0 := ct$
- $\mathbb{R}^6$: "Phasenraum" der klassischen Mechanik:
  Teilchen-Beschreibung durch {Ort; Impuls} → (x,y,z,p_x,p_y,p_z)
- $\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^{12}$: Beschreibung von zwei Teilchen
  Menge aller Konfigurationen $(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$ "Konfigurationsraum"
  → Phasenraum sogar $\mathbb{R}^{12}$
- $\mathbb{R}^{3N}, \mathbb{R}^{6N}$: statistische Physik, Beschreibung sehr vieler ($N \sim 10^{23}$)
  Teilchen; z.B. Gaskinetik
- komplexe VR's : Quantenmechanik (QT) beschreibt physikalische
  Systeme durch "Zustandsvektoren" oder "Wellenfunktionen"
  aus einem komplexen VR ("Hilbert-Raum")
- Lösungsmengen linearer Probleme sind VR's
  Bsp $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$ (mit $A, B, \in \mathbb{R}$)
  erfüllt die (homogene, lineare, Differential-) Gleichung $f''(x) = f(x)$.
  → die Summe zweier verschiedener Lsn. von $f''=f$
  ist auch wieder Lsg; ebenso jedes Vielfache einer Lsg;
  also sind "+" und "·" für alle VR-Elemente (Lsn) def.
  → die Menge der reellen Lsn von $f''=f$ ist also ein VR,
  in diesem Falle der $\mathbb{R}^2$ ((Lsg durch (A,B) eindeutig festgelegt))

7.2 Skalarprodukt

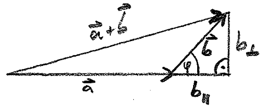
(wieder erst Nützlichkeit entdecken, anschaulich im $\mathbb{R}^n$;
dann mathematisch-axiomatische Verallgemeinerung)

Motivation



$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)

$\Rightarrow |\vec{a}+\vec{b}|^2 - a^2 - b^2 = 2 \cdot \text{Rest} =: 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$



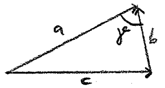
können $\vec{b}$ zusammensetzen:
$\vec{b} = \vec{b}_\perp + \vec{b}_{\parallel}$ (parallel zu $\vec{a}$; "Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$")

$$\Rightarrow \text{also} \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a+b_{\parallel})^2 + b_\perp^2}_{\text{Pythagoras}} - a^2 - b_\perp^2 - b_{\parallel}^2\Big] = a b_{\parallel}$$

Def $\vec{a}\cdot\vec{b} := a b_{\parallel} = a_{\parallel} b = ab\cos(\varphi)$ heisst Skalarprodukt von $\vec{a}$ mit $\vec{b}$

↑ definiert Cosinus; vgl. Kap. 6.4

↑ Gleichberechtigung: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

Bem:
- 

  "Cosinus-Satz" $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$
  folgt aus Vektorrechnung: $= (\vec{a}-\vec{b})^2 = a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$
- Winkel dimensionslos messen! (vgl. Kap. 6.4)
  

  $\varphi = s/R = \text{Länge}/\text{Länge}$;
  rechter Winkel $= \frac{\pi}{2}$ (nachmessen: , $\frac{s}{R} \approx 3{,}14159\ldots =: \pi$)

Eigenschaften des Skalarprodukts: (alle anschaulich klar)

$\vec{a}^2 := \vec{a}\cdot\vec{a} = a^2$; $|\vec{a}| = a = \sqrt{\vec{a}^2}$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$; $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = ab$

$|\vec{a}+\vec{b}| \leq a+b$; $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq ab$ (Schwarz'sche Ungleichung)

$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

$r_{12} = r_{21} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(\vec{r}_1-\vec{r}_2)^2} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2}$

Bem.:
- Schreibweise oft $\vec a \cdot \vec b = \vec a \vec b$
- brauche oft Klammern: $\vec a (\vec b \vec c) \neq (\vec a \vec b) \vec c$!
- nie durch einen Vektor teilen, "$\cancel{\frac{1}{\vec a}}$" nicht def.
- in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl; $\overrightarrow{\text{Vektor}} = \overrightarrow{\text{Vektor}}$

$\vec a \cdot \vec b$ in Komponentenschreibweise:

mit kartesischen Einheitsvektoren $\vec e_1 = (1,0,0), \ldots$ als Basis:

$\vec a = (a_1, a_2, a_3) = a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec a \cdot \vec b}} = (a_1 \vec e_1 + a_2 \vec e_2 + a_3 \vec e_3) \cdot (b_1 \vec e_1 + b_2 \vec e_2 + b_3 \vec e_3)$$
$$= a_1 b_1\, \vec e_1 \cdot \vec e_1 + a_2 b_1\, \vec e_2 \cdot \vec e_1 + a_3 b_1\, \vec e_3 \cdot \vec e_1$$
$$+ a_1 b_2\, \vec e_1 \cdot \vec e_2 + a_2 b_2\, \vec e_2 \cdot \vec e_2 + a_3 b_2\, \vec e_3 \cdot \vec e_2$$
$$+ a_1 b_3\, \vec e_1 \cdot \vec e_3 + a_2 b_3\, \vec e_2 \cdot \vec e_3 + a_3 b_3\, \vec e_3 \cdot \vec e_3$$
$$= \underline{\underline{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}}$$

Verallgemeinerung: mathematisch abstrahiert lautet diese Struktur

Def Skalarprodukt (oder inneres Produkt) ist Abbildung $\cdot : V \times V \to \mathbb{R}$, $(\vec v, \vec w) \mapsto \vec v \cdot \vec w$

mit den Eigenschaften ("Skalarprodukt-Axiome")

(1) $\vec v \cdot \vec w = \vec w \cdot \vec v$ Symmetrie

(2) $\vec v \cdot \vec v \geq 0$; $\vec v \cdot \vec v = 0 \Leftrightarrow \vec v = \vec 0$ Positivität

(3) $(x \vec v) \cdot \vec w = x (\vec v \cdot \vec w)$

(4) $(\vec u + \vec v) \cdot \vec w = \vec u \cdot \vec w + \vec v \cdot \vec w$

} Linearität

Bem.:
- ein Vektorraum mit einem so def. Skalarprodukt heisst "Prä-Hilbertraum"
- unsere anschauliche Def war Spezialfall $V = \mathbb{R}^3$
  → kann für $V = \mathbb{R}^n$ $\vec v \cdot \vec w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n$ nehmen (s. Ü60)
- ganz andere Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ möglich

  (in QM z.B. $\vec v \cdot \vec w \leftrightarrow \langle v | w \rangle \mathrel{\hat=} \int dx\, v^*(x) \cdot w(x)$)

Def Die Norm (oder Länge, oder (Absolut-)Betrag) eines Vektors $\vec v \in V$ ist $|\vec v| := \sqrt{\vec v \cdot \vec v}$

Bem.:
- Schreibweisen (vgl. oben) $|\vec v| = v = \|\vec v\|$, $\vec v^2 = \vec v \cdot \vec v = |\vec v|^2 = v^2$
- aus den Skalarprodukt-Axiomen (1)-(4) folgen die Eigenschaften des Betrags, so wie auf S.67 unten, die "Norm-Eigenschaften":

"Norm-Axiome"
(a) $|\vec v| \geq 0$; $|\vec v| = 0 \Leftrightarrow \vec v = \vec 0$
(b) $|x \vec v| = |x|\, |\vec v|$
(c) $|\vec v + \vec w| \leq |\vec v| + |\vec w|$ Dreiecksungl.

folgen
(d) $|\vec v \cdot \vec w| \leq |\vec v|\, |\vec w|$ Schwarz'sche Ungl.
(e) $|\vec v - \vec w| \geq \big| |\vec v| - |\vec w| \big|$ Abstand zw. $\vec v, \vec w$

- für $V = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ist Norm anschauliche geometrische Länge des Vektorpfeils
- für $V = \mathbb{R}^{n \geq 4}$ keine geom. Veranschaulichung mehr möglich
- für $\vec v \neq \vec 0$ ist $\vec e_v := \frac{\vec v}{|\vec v|}$ Einheitsvektor in Richtung von $\vec v$
- falls $\vec v \cdot \vec w = 0$ (und $\vec v \neq \vec 0, \vec w \neq \vec 0$) sagt man, die Vektoren $\vec v, \vec w$ stehen zueinander orthogonal (oder senkrecht; rechtwinklig)
- für $V = \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec e_j \cdot \vec e_k = (0..0\underset{\substack{\uparrow \\ j\text{-te Stelle}}}{1}0..0) \cdot (0..0\underset{\substack{\uparrow \\ k\text{-te Stelle}}}{1}0..0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j = k \\ 0 & \text{falls } j \neq k \end{cases}$

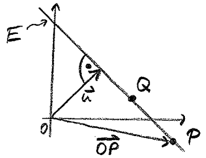
  d.h. die kartesischen Basisvektoren sind alle normiert und orthogonal zueinander ⇒ sog. Orthonormalbasis
- der Winkel zwischen zwei Vektoren $\vec v, \vec w \in V \setminus \{\vec 0\}$ ist allg. (und eindeutig) def. durch

  $$\cos(\varphi) := \underbrace{\frac{\vec v \cdot \vec w}{|\vec v|\, |\vec w|}}_{\in [-1,1]} , \quad \varphi \in [0, \pi]$$

  → für $V = \mathbb{R}^n$ wieder geometrisch klar, s. oben.

Bsp $V = \mathbb{R}^n$; Glg für $\left\{\begin{array}{ll}\text{Gerade} & n=2\\ \text{Ebene} & n=3\\ \text{Hyperebene} & n\geq 4\end{array}\right\}_{\equiv E}$ durch

Punkt $P = (p_1|p_2|\dots|p_n)$, die senkrecht auf Vektor $\vec{u}$ steht?



$\Leftrightarrow$ Menge aller Punkte Q, für die $\vec{PQ} \perp \vec{u}$ $\quad \overset{\uparrow}{=} \vec{OQ} - \vec{OP}$

$\Leftrightarrow$ $E = \{ Q \mid \vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \}$

$\Leftrightarrow$ $E = \{ Q \mid \vec{OQ} \cdot \vec{u} = \vec{OP} \cdot \vec{u} \ (= \text{const.}) \}$

7.3 Kreuzprodukt

oder auch: "Vektorprodukt", oder "äusseres Produkt" ← für …

Besonderheit des $\mathbb{R}^3$! (Verallg. auf $\mathbb{R}^n$ möglich, aber unwichtig)

((hier: erst Def, dann geometrische Veranschaulichung))

Def Kreuzprodukt heisst die Abbildung "$\times$": $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

mit $(\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)) \mapsto \vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2, \\ v_3 w_1 - v_1 w_3, \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$

Bem.: • andere Bezeichnungen: $[\vec{v}, \vec{w}]$, $[\vec{v}\vec{w}]$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, …

direkt aus Def. folgen die Eigenschaften: ((hier $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$; $\lambda \in \mathbb{R}$))

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ — Antisymmetrie

(b) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$ } Linearität

(c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ }

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — "bac-cab", kommt häufig vor!

(e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$ — Jacobi-Identität (zyklische Vertauschung!)

(f) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ — (sog. Spatprodukt)

Bem.:
- Beweis: s. Ü63
- Vorsicht: im allg. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (nicht assoziativ!)

Folgerungen aus den Kreuzprodukt-Eigenschaften:

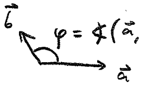
- $\vec{a} \times \vec{a} \overset{(a)}{=} -\vec{a} \times \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}}$
- $\left.\begin{array}{l} \vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \overset{(f)}{=} \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{a}) = 0 \\ \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \overset{(f)}{=} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{b}) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\vec{a} \times \vec{b}$ ist orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$.

  → aha, etwas über Richtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ gelernt.

  → Betrag?

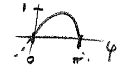
- $(\vec{a} \times \vec{b})^2 = (\underbrace{\vec{a} \times \vec{b}}_{\vec{c}}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \overset{(f)}{=} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\vec{c}}) \overset{(d)}{=} \vec{a} \cdot (\vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{b}))$

  $= (\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{b}}_{= |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\varphi)})^2$

  $\varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \in [0, \pi]$

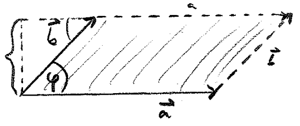
  $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (\underbrace{1 - \cos^2(\varphi)}_{= \sin^2(\varphi)})$, $\sin(\varphi) \in [0, 1]$

  → alles positiv; kann Wurzel ziehen

  $\underline{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\varphi)} = ab \sin(\varphi)$

  ⇝ geometrisch-anschaulich:

  $\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| \hat{=}$ Fläche des von $\vec{a}, \vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms

- anschaulich deshalb sofort klar:

  $\underline{\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel $(\vec{a} \parallel \vec{b})$

  (d.h. $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$), oder $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$

- auch: $\underline{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| = ab} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind orthogonal $(\vec{a} \perp \vec{b})$

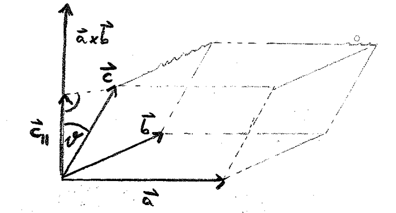
  ((denn dann $\sin(\varphi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$))

- $|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})| = \big| |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos(\vartheta) \big|$

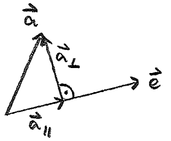
  $= \underbrace{|\vec{c}_{\parallel}|}_{\text{Höhe}} \underbrace{|\vec{a} \times \vec{b}|}_{\text{Grundfläche}}$

  $=$ Volumen des von $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (bzw. Spats)

  ((heisst auch "Spatprodukt"))



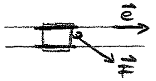
→ Zerlegung eines Vektors $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$
in bezug auf (z.B.) einen Einheitsvektor $\vec{e}$
ist oft nützlich ($\vec{a} \in \mathbb{R}^3$):



$$\Rightarrow \vec{a}_\parallel = (\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e}$$

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = \vec{a}(\vec{e}\cdot\vec{e}) - \vec{e}(\vec{e}\cdot\vec{a}) \overset{\text{bac-cab}}{\overset{\downarrow}{=}} \vec{e}\times(\vec{a}\times\vec{e})$$

Bsp



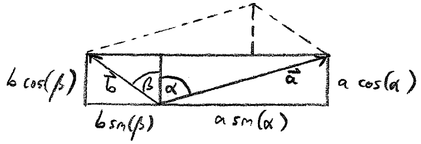
ziehe Schlitten (Kufen in Richtung $\vec{e} := \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$)
mit Kraft $\vec{F} = (3,2,1)\,N$

$\Rightarrow$ nur $\vec{F}_\parallel = (\vec{F}\cdot\vec{e})\,\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3\cdot1+2\cdot1+1\cdot0)N\,\vec{e} = (\frac{5}{4},\frac{5}{4},0)\,N$

sorgt für Beschleunigung (($|\vec{F}| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$

$|\vec{F}_\parallel| = \sqrt{\frac{25}{16}+\frac{25}{16}+0} = \frac{5}{4}\sqrt{2} \approx 1{,}77$))

→ Trigonometrie ? Sinussatz, Cosinussatz etc. ← (s.S.67)
sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung, z.B:



$$\text{Fläche großes Rechteck} \overset{\text{Fläche Parallelogramm}}{\overset{\downarrow}{=}} |\vec{a}\times\vec{b}| = ab\sin(\alpha+\beta)$$

$= $ linkes + rechtes kleines Rechteck

$= b\sin(\beta)\,a\cos(\alpha) + a\sin(\alpha)\,b\cos(\beta)$

(teile durch $a\cdot b$) $\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

→ seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{c} := \vec{a}\times\vec{b}$
wissen (s.o.) Länge von $\vec{c}$: $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\,\sin(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}))$
und Richtung von $\vec{c}$: $\vec{c}\perp\vec{a}$ und $\vec{c}\perp\vec{b}$
aber was ist die Orientierung ?

2 Möglichkeiten:

oder

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ bilden "Rechtssystem" oder "Linkssystem" ?

→ Test: wähle $\vec{a} = \vec{e}_1$, $\vec{b} = \vec{e}_2$

$$\Rightarrow \vec{c} = \vec{e}_1\times\vec{e}_2 = (1,0,0)\times(0,1,0) = (0-0, 0-0, 1-0) = \vec{e}_3$$

$\Rightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ bilden Rechtssystem

rechte-Hand-Regel

bzw

7.4 Felder

bisher: Funktionen $f(x) : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

"Feld" := etwas$(x_1, x_2, x_3, \dots) \overset{\text{z.B.}}{=}$ etwas$(\vec{r},t)$

Physik-Bsp: Temperatur $T(\vec{r},t) : \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}$ "Skalarfeld"
Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r},t) : \mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ "Vektorfeld"

Def Ein Skalarfeld ist Abb. $f: A\to B$, $A\subset\mathbb{R}^n$, $B\subset\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$

$$\vec{x}\mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bsp $f: \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1,x_2,x_3) \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1,x_2,x_3) := e^{-x_1} + x_1^3x_2^2x_3$
((z.B. könnte $f(\vec{x})$ die Temperatur des Raumpunktes $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$ sein))

→ wählt man $x_2, x_3, \dots, x_n$ beliebig aber fest, wird $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine "ganz normale Funktion" von x_1;
insbesondere heisst dann

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} := \lim_{x\to x_1} \frac{f(x, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x - x_1}$$

die „partielle Ableitung" von $f(\vec{x})$ nach x_1
((d.h. das ∂ statt d heisst: $x_2 .. x_n$ beim x_1-Ableiten festhalten))

$\Rightarrow$ können also alle "normalen" Ableitungsregeln (vgl. Kap.)
sofort übertragen (indem wir $x_2, \dots, x_n$ einfach "vergessen") :

Bsp (wie oben) $f(\vec{x}) = e^{-x_1} + x_1^3x_2^2x_3$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \overset{x_2,x_3\ \text{konstant}}{\overset{\downarrow}{=}} -e^{-x_1} + 3x_1^2x_2^2x_3$$

höhere Ableitungen wie gewohnt:

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} = +e^{-x_1} + 6x_1x_2^2x_3$$

$$\frac{\partial^3 f(\vec{x})}{\partial x_1^3} = -e^{-x_1} + 6x_2^2x_3$$

analog für x_2, x_3: $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 2x_1^3x_2x_3$; $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_3^2} = 0$

Schreibweisen: $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \hat{=} \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}) \hat{=} \partial_{x_k} f(\vec{x}) \hat{=} \partial_k f(\vec{x}) \hat{=} \dots$

gemischte Ableitungen: (gleiches Bsp wie oben) ((s. auch Ü65))

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1\,\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[2x_1^3 x_2 x_3\right] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2\,\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[-e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3\right] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

→ allgemein gilt der Satz von Schwarz: (o.B.)

Für $f: A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}$ gilt $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j\,\partial x_k} = \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k\,\partial x_j}$

für beliebige $j,k \in \{1,2,\dots,n\}$, falls beide Ableitungen bei $\vec{x} \in A$ stetig.

Def ein Vektorfeld ist Abb. $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \to B \subset \mathbb{R}^m$ $(n,m \in \mathbb{N})$

mit $\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

$\uparrow = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

→ jede Komponente ist ein Skalarfeld, können also wie gewohnt rechnen!

Bsp $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) := (\sin(x_1) + x_2 x_3,\ e^{-x_3},\ x_2^3)$

((z.B. könnte $\vec{f}(\vec{x})$ eine Strömungsgeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$ sein))

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_1} = (\cos(x_1), 0, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_2} = (x_3, 0, 3x_2^2)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_3\,\partial x_2} = (1, 0, 0)$$

Bsp $\vec{r}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{r}(t) := \left(\frac{1}{1+t^2},\ e^{-t^2},\ \cosh(2t)\right)$

((z.B. könnte $\vec{r}(t)$ der Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt t sein))

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2},\ -2t\,e^{-t^2},\ 2\sinh(2t)\right)$$

((z.B. Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t))

---

8. Matrizen

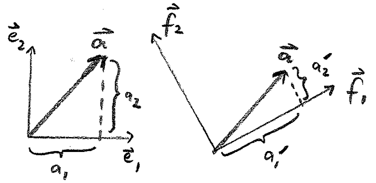
8.1 Drehungen ((hier anschaulich: $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$))

→ Physikalische Gesetze müssen unabhängig von der Betrachtungsweise sein. Darf insbesondere meinen Kopf drehen → was passiert mit Vektoren?

→ Koord.-System-Drehung

Pfeil (= Physik) bleibt stehen

Komponenten ändern sich:



"$\vec{a}'$" $:= (a_1', a_2', a_3')$ mit "neuer" Basis $\vec{f}$ (Einheitsvektoren, wie $\vec{e}$)

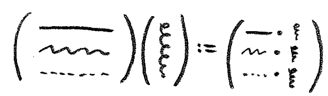
((hier: Vektoren vertikal aufschreiben von Vorteil))

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1\cdot\vec{a}_1 \\ \vec{f}_2\cdot\vec{a}_1 \\ \vec{f}_3\cdot\vec{a}_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f}_1\cdot\vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_1\vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_1\cdot\vec{e}_3 a_3 \\ \vec{f}_2\cdot\vec{e}_1 a_1 + \dots \\ \vec{f}_3\cdot\vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_3\cdot\vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_3\cdot\vec{e}_3 a_3 \end{pmatrix}}_{\text{lese als } = (\vec{f}_3\cdot\vec{e}_1,\ \vec{f}_3\cdot\vec{e}_2,\ \vec{f}_3\cdot\vec{e}_3)\cdot\vec{a}}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{f}_1\vec{e}_1 & \vec{f}_1\vec{e}_2 & \vec{f}_1\vec{e}_3 \\ \vec{f}_2\vec{e}_1 & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \vec{f}_3\vec{e}_1 & \vec{f}_3\vec{e}_2 & \vec{f}_3\vec{e}_3 \end{pmatrix}}_{=:\ D} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \text{"Matrix" } D \text{ angewandt auf } \vec{a}$$

d.h. lese $D\vec{a}$ als (jede D-Zeile)$\cdot\vec{a}$,

allgemein:



Operator · Element = neues Element

kürzer: $\vec{a}' = D\vec{a}$, $D = \begin{pmatrix} - \vec{f}_1 - \\ - \vec{f}_2 - \\ - \vec{f}_3 - \end{pmatrix}$ D-Zeilen: $\vec{f}$'s im alten System

D-Spalten: $\vec{e}$'s im neuen

(sehr) kurz: $\underset{\in\{1,2,3\}}{a_j'} = \sum_{k=1}^{3} D_{jk}\, a_k$ (Zeile, Spalte), $D_{jk} = \vec{f}_j\cdot\vec{e}_k$ (d.h. alles nur reelle Zahlen)

also $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}$, und (z.B.) $D_{23} = \vec{f}_2\cdot\vec{e}_3$

→ einige Rechenregeln für Matrizen sind anschaulich klar:

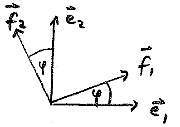
- $(D\lambda\vec{a})_j = \sum_{k=1}^{3} D_{jk}\lambda a_k = \sum_k (\lambda D_{jk}) a_k = \lambda (D\vec{a})_j$
  $\lambda \in \mathbb{R}$
  allg.: $\lambda \cdot \text{Matrix} := \begin{pmatrix} \lambda'' & \lambda'' & \lambda'' \\ \lambda'' & \vdots & \vdots \\ \lambda'' & \lambda'' & \lambda'' \end{pmatrix}$
- $(D(\vec{a}+\vec{b}))_j = \sum_{k=1}^{3} D_{jk}(a_k + b_k) = D\vec{a} + D\vec{b}$

((⇒ Matrix-Anwendung ist "lineare Operation"))

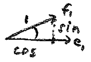
im $\mathbb{R}^3$: 3 elementare Drehungen

$c := \cos(\varphi) \qquad s := \sin(\varphi)$

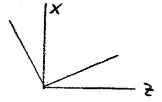
- Drehung um Winkel φ um z-Achse



$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow$$

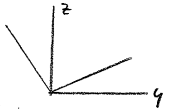


- 〃 um y-Achse



$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

- 〃 um x-Achse



$$D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

zwei Drehungen nacheinander

$$\begin{array}{ccccc} \vec{g}'s & \xleftarrow{(2)} & \vec{f}'s & \xleftarrow{(1)} & \vec{e}'s \\ \vec{a}'' & & \vec{a}' & & \vec{a} \end{array}$$

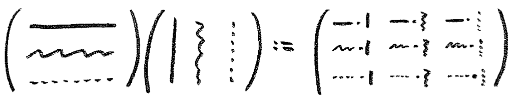
$\vec{a}'' = D^{(2)}\vec{a}' \quad , \quad \vec{a}' = D^{(1)}\vec{a}$

$= D^{(2)}(D^{(1)}\vec{a}) = \text{"}D^{(2)}D^{(1)}\text{"}\,\vec{a}$ = ? was muss hier stehen, damit man $\vec{a}''$ direkt aus $\vec{a}$ erhält?

$$a''_j = \sum_{l=1}^{3} D^{(2)}_{jl} (D^{(1)}\vec{a})_l = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} D^{(2)}_{jl} D^{(1)}_{lk} a_k =: \sum_{k=1}^{3} D^{ges.}_{jk} a_k$$

$$\Rightarrow D^{ges.}_{jk} = \begin{pmatrix} j\text{-te Zeile} \\ \text{von } D^{(2)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } D^{(1)} \end{pmatrix}$$

allgemein



$(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^{3} A_{jl} B_{lk}$; Reihenfolge wichtig: $AB \neq BA$!

---

zum Umgang mit Matrizen (und Indizes)

- $(A\vec{a})_j = A_{j1}a_1 + A_{j2}a_2 + A_{j3}a_3 = \sum_{k=1}^{3} A_{jk} a_k$
- $(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^{3} A_{jl} B_{lk}$
- $(\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$
- $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$
- "Spur": $Sp(A) := A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{k=1}^{3} A_{kk}$
- wegen $\sum_{j=1}^{3} (AB)_{jj} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} A_{jk}B_{kj} = \sum_j \sum_k B_{kj} A_{jk} = \sum_{k=1}^{3} (BA)_{kk}$

  gilt: $Sp(AB) = Sp(BA)$

  und daher auch $Sp(AB\ldots C) = Sp(B\ldots CA)$
- "transponierte Matrix": $(A^T)_{jk} := A_{kj}$

  Bezeichnung: $A^T = A \Leftrightarrow$ "A ist symmetrisch"
  $A^T = -A \Leftrightarrow$ "A ist antisymmetrisch"

  ((vgl. Funktionen: gerade/ungerade))

  Bsp $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (D\vec{a}) \cdot (D\vec{b}) = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} D_{jk}a_k D_{jl} b_l$

  $= \sum_j \sum_k \sum_l a_k (D^T)_{kj} D_{jl} b_l = \vec{a} \cdot (\underbrace{D^T D}_{=\mathbb{1} = \left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right),\text{ s.u.}} \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$

  "Skalarprodukt ist invariant unter Drehungen"
  insbesondere: $\vec{a}'^2 = \vec{a}^2$ ⇝ ((Pfeil-Länge bleibt unverändert!))
- "inverse Matrix": $A^{-1} :=$ die $A^{-1}A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix}$ erfüllende Matrix

Drehachse und Drehwinkel

es gilt: $DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1- \\ -\vec{f}_2- \\ -\vec{f}_3- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

$D^TD = \begin{pmatrix} -\vec{e}_1{}'- \\ -\vec{e}_2{}'- \\ -\vec{e}_3{}'- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{e}_1{}' & 2 & 3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

((wegen Orthonormierung der jeweiligen Basisvektoren $\vec{f}, \vec{e}$))

→ Drehachse? ((Idee: jeder auf der Drehachse liegende Vektor verändert sich nicht bei einer Drehung))

$D\vec{b} = \vec{b}$, Def. Drehachse als $\vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

→ Drehwinkel? ((Idee: obdA die elementaren Drehungen, S.76, betrachten))

$Sp(D) = 1 + 2\cos(\varphi)$

Behauptung: die allg. Drehmatrix um eine Achse $\vec{e} = (u,v,w)$ ist

$$D_{\vec{e},\varphi} = \begin{pmatrix} c+(1-c)u^2 & (1-c)uv+sw & (1-c)uw-sv \\ (1-c)vu-sw & c+(1-c)v^2 & (1-c)vw+su \\ (1-c)wu+sv & (1-c)vw-su & c+(1-c)w^2 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} c := \cos(\varphi) \\ s := \sin(\varphi) \end{matrix}$$

((Test 1: $Sp(D_{\vec{e},\varphi}) = 3c + (1-c)\underbrace{(u^2+v^2+w^2)}_{=\vec{e}^2=1} = 2c+1$ ✓

Test 2: $\vec{e} = (0,0,1) \Rightarrow D_{\vec{e},\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_{z,\varphi}$ ✓))

Bem.: Drehungen erhalten natürlich Rechtssysteme: $D = \begin{pmatrix} - \vec{f}_1 - \\ - 2 - \\ - 3 - \end{pmatrix}$, $\vec{f}_1 \cdot (\vec{f}_2 \times \vec{f}_3) = 1$

oft tritt die folgende Frage auf: $D \rightarrow$ Achse ?

dazu muss die Glg. $D\vec{b} = \vec{b} \Leftrightarrow \underline{(D-\mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}}$ gelöst werden.

→ Glg. legt $|\vec{b}|$ nicht fest; also folgt zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$ eine der drei Gln. $(D-\mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus den beiden anderen.
((ist "linear abhängig"))

→ $(D-\mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist Spezialfall des sog. "Eigenwertproblems",
d.h. der Frage, welche Elemente sich bei Operator-Anwendung reproduzieren:

(linearer Operator) (Element) = Faktor (gleiches Element)

(Quanten-mechanik) → z.B. $\underset{\text{gegeben}}{H} \; \vec{\psi} = E \; \vec{\psi}$

gesucht: "Eigenvektor" (EV) $\vec{\psi}$
"Eigenwert" (EW) E

→ hier: Drehmatrix hat stets den EW +1
und die Drehachse als zugehörigen EV.

8.2 Lineare Gleichungssysteme

in der Physik oft: eine Grösse hängt linear (d.h. $\propto^1$) von einer anderen ab

→ falls Abhängigkeit komplizierter: vielleicht reicht in einem gewissen Bereich eine lineare Näherung aus? (vgl. Potenzreihe)

allg.: wenn m Grössen $y_1, y_2, \dots, y_m$ von n Grössen $x_1, x_2, \dots, x_n$ linear abhängen, ist ein lineares Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{aligned} y_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n \\ y_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n \end{aligned} \qquad ; \; A_{jk} = \text{Konstanten, z.B.} \in \mathbb{R} \text{ oder } \in \mathbb{C}$$

bzw.: $y_j = \sum_{k=1}^{n} A_{jk} x_k$

oder, die Konstanten A_{jk} als m×n-Matrix aufgefasst, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ A_{m1} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}$

$\vec{y} = A\vec{x}$: $\vec{y}$ hängt linear von $\vec{x}$ ab.

Bsp $m=n=2$, $\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 3x_2 \\ y_2 &= 4x_1 + 5x_2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = A\vec{x}$

→ fassen wir $\vec{y}$ auch als Konstante auf, stellt sich die Frage nach der Lösbarkeit des Gleichungssystems: $\vec{x} = ?$

Bezeichnung: $A\vec{x} = \vec{0}$ heisst homogenes lineares Gleichungssystem
$A\vec{x} = \vec{b}$ 〃 inhomogenes 〃

((wobei $A = \overset{\text{Zeilen}}{m} \times \overset{\text{Spalten}}{n}$-Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ $\mathbb{C}^m$)) allg: $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$

falls $m=n$, also A quadratische Matrix, heisst das System quadratisch

→ was sind die grundlegenden Eigenschaften der Lösungsmengen?

- homogenes lineares Gleichungssystem: $A\vec{x}=\vec{0}$

→ klar: falls $A\vec{x}=\vec{0}$ und $A\vec{y}=\vec{0}$,
dann auch $A(\vec{x}+\lambda\vec{y})=\vec{0}$ mit beliebigem Skalar $\lambda\in\mathbb{K}$

⇒ Lösungsmenge ("allgemeine Lösung") ist daher ein Vektorraum

↳ Bsp: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $n=2$: Lösungsmenge ist ein Punkt (= Ursprung $\vec{0}$)
oder eine Gerade (durch $\vec{0}$)
oder der ganze $\mathbb{R}^2$

↳ Bsp: $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $n=3$: 〃 ist $\vec{0}$
oder Gerade durch $\vec{0}$
oder Ebene durch $\vec{0}$
oder der ganze $\mathbb{R}^3$

((als VR besitzt die Lsgs-Menge immer eine wohldef. Dimension))

→ für ein quadratisches System gilt: ((ausrechnen: s. unten))
Ist A invertierbar (d.h. $\exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A=\mathbb{1}$, vgl. Kap. 8.1, S. 77),
dann: $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x}=\mathbb{1}\vec{x}=\vec{x}=A^{-1}\vec{0}=\vec{0}$

⇒ $\vec{x}=\vec{0}$ ist die eindeutige Lsg

- inhomogenes lineares Gleichungssystem: $A\vec{x}=\vec{b}$

→ entweder gibt es keine Lösung (d.h. Lösungsmenge ist leer, $\emptyset$),
oder die allgemeine Lsg ist

$$\vec{x}=\vec{x}_{inh}+\vec{x}_{hom}$$

⌊ allg. Lsg. von $A\vec{x}_{hom}=\vec{0}$

↑ eine spezielle Lsg. von $A\vec{x}_{inh}=\vec{b}$

((denn: $A(\vec{x}_{inh}+\vec{x}_{hom})=A\vec{x}_{inh}+A\vec{x}_{hom}=A\vec{x}_{inh}+\vec{0}=\vec{b}$ ✓))

→ für quadratische Systeme mit invertierbarem A gibt es wieder die eindeutige Lsg $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$

Def der Rang einer $m\times n$ - Matrix A ist
die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren
bzw. die 〃 Spaltenvektoren
} gleiche Zahl!

→ also ist $0\le \text{Rang}(A)\le \text{Min}(m,n)$

Bsp $\text{Rang}\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}=1$, denn $3\cdot(1,2)+(-1)\cdot(3,6)=(0,0)$
bzw. $2\cdot\binom{1}{3}+(-1)\cdot\binom{2}{6}=\binom{0}{0}$

((s. auch Ü73))

⇒ $\underset{m\times n}{A}\,\underset{n}{\vec{x}}=\underset{m}{\vec{b}}$ ist eindeutig lösbar, falls $\text{Rang}(A)=n$

〃 hat mindestens eine Lsg, falls $\text{Rang}(A)=m$

→ Lösungsmethode in der Praxis?

Gauss'sches Eliminationsverfahren ← ((sehr geeignet für z.B. Computer-Algorithmen))
↳ ist ein "Rezept". hier: Bsp ansehen

Bsp Bestimme die Lsn des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x_2+4x_3+3x_4-2x_5&=16\\ -3x_1-3x_2+3x_3+x_4-2x_5&=-2\\ 2x_2+2x_3+3x_4-4x_5&=14\\ 4x_1-x_2-9x_3-2x_4-x_5&=-5 \end{aligned}$$

1. Schritt Reihenfolge der Gln. egal
⇒ wähle als erste Glg. eine mit x_1-Term
→ wähle schematische Darst.

$$\begin{array}{c|ccccc|c|l} & \text{"}x_1\text{"}\downarrow & \text{"}x_2\text{"}\downarrow & \dots & & & \text{"}\vec{b}\text{"}\downarrow & \\ \text{"}A\text{"} & -3 & -3 & 3 & 1 & -2 & -2 & \mid\cdot(-\tfrac{1}{3})\\ & 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 & \\ & 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 & \\ & 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 & \end{array}$$

2. Schritt Normierung der Kopfzeile
(darf jede Zeile mit bel. Faktor multiplizieren, ohne Lsg. zu ändern)

$$\begin{array}{ccccc|c|l} 1 & 1 & -1 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3} & \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 & \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 & \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 & \mid -4\cdot\text{Zeile}_1 \end{array}$$

3. Schritt Elimination von x_1 aus allen Gln. bis auf die erste
(darf Gln voneinander abziehen, ohne Lsg zu ändern)

$$\begin{array}{ccccc|c|l} 1 & 1 & -1 & -\tfrac{1}{3} & \tfrac{2}{3} & \tfrac{2}{3} & \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 & \mid\cdot\tfrac{1}{4}\\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 & \\ 0 & -5 & -5 & -\tfrac{2}{3} & -\tfrac{11}{3} & -\tfrac{23}{3} & \end{array}$$

→ ab jetzt bleiben $\left\{\begin{matrix}\text{1. Zeile}\\ \text{1. Spalte}\end{matrix}\right\}$ unverändert; nicht mehr hinschreiben

4. Schritt Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \mid -2\cdot\text{Zeile}, \\ \mid +5\cdot\text{Zeile}, \end{array}$$

5. Schritt Elimination von x_2

$$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \mid \cdot\frac{2}{3} \\ \\ \end{array}$$

→ x_3-Koeff zufällig auch 0; betrachte wieder nur Restsystem $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{pmatrix}$

6. Schritt Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\left.\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \mid -\frac{37}{12}\cdot\text{Zeile}, \end{array}$$

7. Schritt Elimination von x_4

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

8. Schritt Ergebnis zusammenfassen "Zeilenstufenform"

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

⇒ 3 Gln. für 5 Variablen $(x_1, \dots, x_5)$

kann zwei Variablen frei wählen: nehme x_3, x_5

Gln jetzt "von unten" lösbar:

3. Zeile ⇒ $x_4 = 4 + 2x_5$

2. Zeile ⇒ $x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{4}\overset{x_4\text{-Lsg eingesetzt}}{(4+2x_5)} - x_3 = 1 - x_3 - x_5$

1. Zeile ⇒ $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}(4+2x_5) + x_3 - (1 - x_3 - x_5) = 1 + 2x_3 + x_5$

⇒ allg. Lsg. ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ "2D Ebene im 5D Raum"

Berechnung der inversen Matrix (gilt genauso: nur "$\vec{b}$" → $\mathbb{1}$)

Bsp Inverse von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -38 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -38 & 11 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$