

8.2 Lineare Gleichungssysteme

in der Physik oft: eine Grösse hängt linear (d.h. 1^{te})
von einer anderen ab

→ falls Abhängigkeit komplizierter: vielleicht reicht

in einem gewissen Bereich eine lineare Näherung aus? (vgl. Potenzreihe)

allg.: Wenn m Grössen $y_1, y_2, \dots, y_m$ von n Grössen $x_1, x_2, \dots, x_n$
linear abhängen, ist ein lineares Gleichungssystem erfüllt:

$$y_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \dots + A_{1n}x_n$$

$$y_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \dots + A_{2n}x_n$$

$\vdots$

$$y_m = A_{m1}x_1 + A_{m2}x_2 + \dots + A_{mn}x_n$$

$\therefore A_{jk} = \text{Konstanten,}$
z.B. $\in \mathbb{R}$ oder $\in \mathbb{C}$

bzw.: $y_j = \sum_{k=1}^n A_{jk} x_k$

oder, die Konstanten A_{jk} als $m \times n$ -Matrix aufgefasst, $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$
 $\vec{y} = A \vec{x}$: $\vec{y}$ hängt linear von $\vec{x}$ ab.

Bsp $m=n=2$, $y_1 = 2x_1 - 3x_2$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}}_{=: A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{y} = A \vec{x}$
 $y_2 = 4x_1 + 5x_2$

→ fassen wir $\vec{y}$ auch als Konstante auf, stellt sich die
Frage nach der Lösbarkeit des Gleichungssystems: $\vec{x} = ?$

Bezeichnung: $A \vec{x} = \vec{0}$ heisst homogenes lineares Gleichungssystem

$A \vec{x} = \vec{b}$ $\therefore$ inhomogenes $\therefore$

(wobei $A = \overset{\text{Zeilen}}{m \times n}$ -Matrix, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ oder $\mathbb{C}^m$) $\Rightarrow$ allg. $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m$

falls $m=2$, also A quadratische Matrix, heisst das System
quadratisch

→ was sind die grundlegenden Eigenschaften der Lösungen?

• homogenes lineares Gleichungssystem: $A\vec{x} = \vec{0}$

→ klar: falls $A\vec{x} = \vec{0}$ und $A\vec{y} = \vec{0}$,

dann auch $A(\vec{x} + \lambda\vec{y}) = \vec{0}$ mit beliebigem Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$

⇒ Lösungsmenge ("allgemeine Lösung") ist daher ein Vektorraum

↳ Bsp: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n=2$: Lösungsmenge ist ein Punkt (= Ursprung $\vec{0}$)
oder eine Gerade (durch $\vec{0}$)
oder der ganze $\mathbb{R}^2$

↳ Bsp: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n=3$: ist $\vec{0}$
oder Gerade durch $\vec{0}$
oder Ebene durch $\vec{0}$
oder der ganze $\mathbb{R}^3$

((als VR besitzt die Lsg-Menge immer eine wohldef. Dimension))

→ für ein quadratisches System gilt: (ausrechnen: s. unten)

Ist A invertierbar (d.h. $\exists A^{-1}$ mit $A^{-1}A = \mathbb{1}$, vgl. Kap. 8.1, S. 77),

dann: $A\vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{x} = \mathbb{1}\vec{x} = \vec{x} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0}$

⇒ $\vec{x} = \vec{0}$ ist die eindeutige Lsg

• inhomogenes lineares Gleichungssystem: $A\vec{x} = \vec{b}$

→ entweder gibt es keine Lösung (d.h. Lösungsmenge ist leer, $\emptyset$),

oder die allgemeine Lsg ist

$$\vec{x} = \vec{x}_{inh} + \vec{x}_{hom}$$

↑
↑ allg. Lsg. von $A\vec{x}_{hom} = \vec{0}$
↑ eine spezielle Lsg. von $A\vec{x}_{inh} = \vec{b}$

((denn: $A(\vec{x}_{inh} + \vec{x}_{hom}) = A\vec{x}_{inh} + A\vec{x}_{hom} = A\vec{x}_{inh} + \vec{0} = \vec{b}$))

→ für quadratische Systeme mit invertierbarem A gilt

es existiert die eindeutige Lsg $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Def der Rang einer $m \times n$ -Matrix A ist

die Maximalzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren
bzw. die $\vdots$ Spaltenvektoren $\left. \vphantom{\begin{matrix} \text{die Maximalzahl linear unabhängiger} \\ \text{Zeilenvektoren} \end{matrix}} \right\} \text{gleiche Zahl!}$

$\rightarrow$ also ist $0 \leq \text{Rang}(A) \leq \min(m, n)$

Bsp $\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = 1$, denn $3 \cdot (1, 2) + (-1) \cdot (3, 6) = (0, 0)$
bzw. $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
(s. auch Ü 77)

$\Rightarrow A \vec{x} = \vec{b}$ ist eindeutig lösbar, falls $\text{Rang}(A) = n$

$\vdots$ hat mindestens eine Lsg, falls $\text{Rang}(A) = m$

$\rightarrow$ Lösungsmethode in der Praxis?

Gauss'sches Eliminationsverfahren $\leftarrow$ (sehr geeignet für z.B. Computer-Algorithmen)
 $\leftarrow$ ist ein "Rezept". hier: Bsp anschauen

Bsp Bestimme die Lsg des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 4x_2 + 4x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 16 \\ -3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= -2 \\ 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 14 \\ 4x_1 - x_2 - 9x_3 - 2x_4 - x_5 &= -5 \end{aligned}$$

1. Schritt Reihenfolge der Gl. egal

$\Rightarrow$ wähle als erste Gl. eine mit x_1 -Term

$\rightarrow$ wähle schrittweise Darst.

$$A \left\{ \begin{array}{ccccc|c} \begin{matrix} "x_1" \\ \downarrow \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} "x_2" \\ \downarrow \\ -3 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \dots \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ -2 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ -2 \\ 16 \\ 14 \\ -5 \end{matrix} & \begin{matrix} "b" \\ \downarrow \\ -2 \\ 16 \\ 14 \\ -5 \end{matrix} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} | \cdot (-\frac{1}{3}) \\ \\ \\ \end{array}$$

2. Schritt Normierung der Kopfzeile

(d.h. jede Zeile mit bel.

Faktor multiplizieren, ohne Lsg. zu ändern)

$$\left\{ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 4 & -1 & -9 & -2 & -1 & -5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ \\ | -4 \cdot \text{Zeile}_1 \\ \end{array}$$

3. Schritt Elimination von x_1 aus allen

Gl. bis auf die erste

(d.h. Gl. voneinander abziehen,

ohne Lsg. zu ändern)

$$\left\{ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 4 & 4 & 3 & -2 & 16 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ 0 & -5 & -5 & -\frac{11}{3} & -\frac{11}{3} & -\frac{23}{3} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ | \cdot \frac{1}{4} \\ \\ \end{array}$$

→ ab jetzt bleiben $\left\{ \begin{array}{l} \text{1. Zeile} \\ \text{1. Spalte} \end{array} \right\}$ unverändert; nicht mehr hinschreiben

4. Schritt Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 14 \\ -5 & -5 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{23}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} | -2 \cdot \text{Zeile}, \\ | +5 \cdot \text{Zeile}, \end{array}$$

5. Schritt Elimination von x_2

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} | \cdot \frac{2}{3} \end{array}$$

→ x_3 -Koeff zufällig auch 0; betrachte wieder nur Restsystem $\left(\begin{array}{cc|c} \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array} \right)$

6. Schritt Normierung der Kopfzeile des Restsystems

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ \frac{37}{12} & -\frac{37}{6} & \frac{37}{3} \end{array} \quad | -\frac{37}{12} \cdot \text{Zeile},$$

7. Schritt Elimination von x_4

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

8. Schritt Ergebnis zusammenfassen
"Zeilenstufenform"

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{11}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

⇒ 3 Gln. für 5 Variablen ($x_1, \dots, x_5$)

kann zwei Variablen frei wählen: nehme x_3, x_5

Gln jetzt "von unten" lösbar:

3. Zeile ⇒ $x_4 = 4 + 2x_5$ ← x_4 -Lsg eingesetzt

2. Zeile ⇒ $x_2 = 4 + \frac{1}{2}x_5 - \frac{3}{4}(4 + 2x_5) - x_3 = 1 - x_3 - x_5$

1. Zeile ⇒ $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x_5 + \frac{1}{3}(4 + 2x_5) + x_3 - (1 - x_3 - x_5) = 1 + 2x_3 + x_5$

⇒ allg. Lsg. ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ "2D Ebene im 5D Raum"

Berechnung der inversen Matrix (gilt genauso: nur " $\vec{b}$ " → $\mathbb{1}$)

Bsp Inverse von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$?

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 12 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 & -2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -38 & 11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -2 & 1 \end{array} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -38 & 11 & -5 \\ 8 & -2 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$