

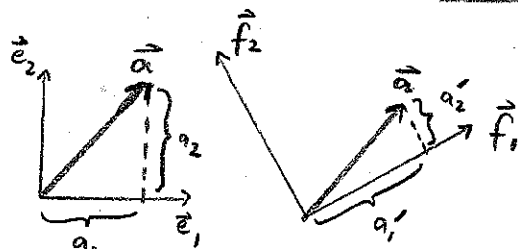
8. Matrizen

75

8.1 Drehungen ((hier anschaulich: $V = \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$))

→ Physikalische Gesetze müssen unabhängig von der Betrachtungsweise sein.
Darf man also immer noch Kopf drehen → was passiert mit Vektoren?

→ Koord.-System-Drehung
Pfeil (= Physik) bleibt stehen
Komponenten ändern sich:



" $\vec{a}'$ " := (a'_1, a'_2, a'_3) mit "neuer" Basis $\vec{f}$ (Einheitsvektoren, wie $\vec{e}$)
((hier: Vektoren vertikal aufschreiben von Vorteil))

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{a} \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 a_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \dots \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 a_1 + \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 a_2 + \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 a_3 \end{pmatrix}$$

lese als $= (\vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1, \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2, \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3) \cdot \vec{a}$

$$= \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_1 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_1 & \dots & \dots \\ \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_1 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_2 & \vec{f}_3 \cdot \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \text{"Matrix"} D \text{ angewandt auf } \vec{a}$$

$\hat{=} D$

d.h. lese $D\vec{a}$ als (jede D-Zeile) $\cdot \vec{a}$,

allgemein: $\begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \\ \text{---} \cdot \text{---} \end{pmatrix}$

Operator $\cdot$ Element = neues Element

kürzer: $\vec{a}' = D\vec{a}$, $D = \begin{pmatrix} \text{---} \vec{f}_1 \text{---} \\ \text{---} \vec{f}_2 \text{---} \\ \text{---} \vec{f}_3 \text{---} \end{pmatrix}$ D-Zeilen: $\vec{f}$'s im alten System
D-Spalten: $\vec{e}$'s im neuen

(sehr) kurz: $a'_j = \sum_{k=1}^3 D_{jk} a_k$, $D_{jk} = \vec{f}_j \cdot \vec{e}_k$ (d.h. alles nur reelle Zahlen)
 $\in \{1, 2, 3\} \rightarrow$ Zeile
Spalte

also $D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}$, und (z.B.) $D_{23} = \vec{f}_2 \cdot \vec{e}_3$

→ einige Rechenregeln für Matrizen sind anschaulich klar:

$$\bullet \quad (D \lambda \vec{a})_j = \sum_{k=1}^3 D_{jk} \lambda a_k = \sum_k (\lambda D_{jk}) a_k = \lambda (D \vec{a})_j$$

$\lambda \in \mathbb{R}$

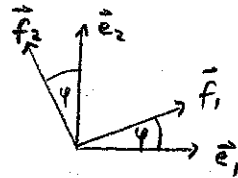
$$\text{allg.: } \lambda \cdot \text{Matrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad (D(\vec{a} + \vec{b}))_j = \sum_{k=1}^3 D_{jk} (a_k + b_k) = D \vec{a} + D \vec{b}$$

($\Rightarrow$ Matrix-Transformation ist "lineare Operation")

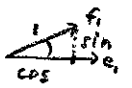
in $\mathbb{R}^3$: 3 elementare Drehungen

- Drehung um Winkel φ
um z-Achse

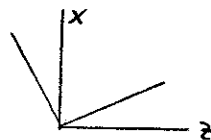


$$c := \cos(\varphi) \quad s := \sin(\varphi)$$

$$D_{z,\varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

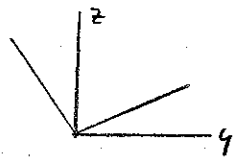


- $\times$
um y-Achse



$$D_{y,\varphi} = \begin{pmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{pmatrix}$$

- $\times$
um x-Achse



$$D_{x,\varphi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix}$$

Zwei Drehungen nacheinander

$$\vec{g}'s \xleftarrow{(2)} \vec{f}'s \xleftarrow{(1)} \vec{e}'s$$

$$\vec{a}'' \quad \vec{a}' \quad \vec{a}$$

$$\vec{a}'' = D^{(2)} \vec{a}', \quad \vec{a}' = D^{(1)} \vec{a}$$

$$= D^{(2)} (D^{(1)} \vec{a}) = \underbrace{D^{(2)} D^{(1)}}_{\text{? was muss hier stehen, damit man } \vec{a}'' \text{ direkt aus } \vec{a} \text{ erhält?}} \vec{a}$$

$$a''_j = \sum_{l=1}^3 D^{(2)}_{jl} (D^{(1)} \vec{a})_l = \sum_{l=1}^3 \sum_{k=1}^3 \underbrace{D^{(2)}_{jl}}_{\text{von } D^{(2)}} \underbrace{D^{(1)}_{lk}}_{\text{von } D^{(1)}} a_k =: \sum_{k=1}^3 \underbrace{D^{(2)}_{jl}}_{\text{von } D^{(2)}} \underbrace{D^{(1)}_{lk}}_{\text{von } D^{(1)}} a_k$$

$$\Rightarrow D^{(2)}_{jk} = \left(\begin{array}{c} j\text{-te Zeile} \\ \text{von } D^{(2)} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} k\text{-te Spalte} \\ \text{von } D^{(1)} \end{array} \right)$$

$$\text{allgemein: } \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \{ \\ \{ \\ \{ \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc} \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \end{array} \right)$$

$$(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^3 A_{jl} B_{lk} \quad ; \quad \text{Reihenfolge wichtig: } AB \neq BA !$$

zum Umgang mit Matrizen (und Indizes)

- $(A\vec{a})_i = A_{i1}a_1 + A_{i2}a_2 + A_{i3}a_3 = \sum_{k=1}^3 A_{ik}a_k$
- $(AB)_{jk} = \sum_{l=1}^3 A_{jl}B_{lk}$
- $(\lambda A)_{jk} = \lambda A_{jk}$
- $(A+B)_{jk} = A_{jk} + B_{jk}$
- "Spur": $Sp(A) := A_{11} + A_{22} + A_{33} = \sum_{k=1}^3 A_{kk}$
- wegen $\sum_{j=1}^3 (AB)_{jj} = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 A_{jk}B_{kj} = \sum_j \sum_k B_{kj}A_{jk} = \sum_{k=1}^3 (BA)_{kk}$

gilt: $Sp(AB) = Sp(BA)$

und daher auch $Sp(AB \dots C) = Sp(B \dots CA)$

- "transponierte Matrix": $(A^T)_{jk} := A_{kj}$

Bezeichnung: $A^T = A \Leftrightarrow$ "A ist symmetrisch"

$A^T = -A \Leftrightarrow$ "A ist antisymmetrisch"

((vgl. Funktionen: gerade/ungerade))

Bsp $\vec{a}' \cdot \vec{b}' = (D\vec{a}) \cdot (D\vec{b}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 D_{jk}a_k D_{jl}b_l$
 $= \sum_j \sum_k \sum_l a_k (D^T)_{kj} D_{jl} b_l = \vec{a} \cdot (\underline{D^T D} \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}$
 $\underline{D^T D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ s.a.}$

"Skalarprodukt ist invariant unter Drehungen"

zusammenfassend: $\vec{a}'^2 = \vec{a}^2 \quad \checkmark$ ((Pfeil-Länge bleibt unverändert!))

- "inverse Matrix": $A^{-1} :=$ die $A^{-1}A = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ aufstellende Matrix

Drehmatrizen und Drehwinkel

es gilt: $DD^T = \begin{pmatrix} -\vec{f}_1 \\ -\vec{f}_2 \\ -\vec{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{f}_1 & \vec{f}_2 & \vec{f}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

$D^T D = \begin{pmatrix} -\vec{e}_1' \\ -\vec{e}_2' \\ -\vec{e}_3' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1' & \vec{e}_2' & \vec{e}_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1}$

((wegen Orthonormierung der jeweiligen Basisvektoren $\vec{f}, \vec{e}$))

→ Drehachse? (Idee: jeder auf der Drehachse liegende Vektor verändert sich nicht bei einer Drehung)

$$D\vec{b} = \vec{b}, \quad \text{Def. Drehachse als } \vec{e} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

→ Drehwinkel? (Idee: obdkt die elementaren Drehungen, S. 76, betrachten)

$$\text{Sp}(D) = 1 + 2 \cos(\varphi)$$

Behauptung: die allg. Drehmatrix um eine Achse $\vec{e} = (u, v, w)$ ist

$$D_{\vec{e}, \varphi} = \begin{pmatrix} c + (1-c)u^2 & (1-c)uv + sw & (1-c)uw - sv \\ (1-c)vu - sw & c + (1-c)v^2 & (1-c)vw + su \\ (1-c)wu + sv & (1-c)vw - su & c + (1-c)w^2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} c := \cos(\varphi) \\ s := \sin(\varphi) \end{matrix}$$

$$\text{((Test 1: } \text{Sp}(D_{\vec{e}, \varphi}) = 3c + (1-c) \underbrace{(u^2 + v^2 + w^2)}_{\vec{e}^2 = 1} = 2c + 1 \quad \checkmark \text{))}$$

$$\text{Test 2: } \vec{e} = (0, 0, 1) \Rightarrow D_{\vec{e}, \varphi} = \begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D_{z, \varphi} \quad \checkmark \quad \text{))}$$

Bem.: Drehungen erhalten natürlich Rechtssysteme: $D = \begin{pmatrix} \vec{f}_1 \\ \vec{f}_2 \\ \vec{f}_3 \end{pmatrix}$, $\vec{f}_i \cdot (\vec{f}_j \times \vec{f}_k) = 1$

oft tritt die folgende Frage auf: $D \rightarrow$ Achse?

dazu muss die Glg. $D\vec{b} = \vec{b} \Leftrightarrow \underline{(D - \mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}}$ gelöst werden.

→ Glg. legt $|\vec{b}|$ nicht fest; also folgt zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$

eine der drei Gln. $(D - \mathbb{1})\begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ aus den beiden anderen.
(ist "linear abhängig")

→ $(D - \mathbb{1})\vec{b} = \vec{0}$ ist Spezialfall des sog. "Eigenwertproblems",

d.h. der Frage, welche Elemente sich bei Operator-Anwendung reproduzieren:

$$\left(\begin{matrix} \text{linear} \\ \text{Operator} \end{matrix} \right) (\text{Element}) = \text{Faktor} \left(\begin{matrix} \text{gleiches} \\ \text{Element} \end{matrix} \right)$$

$$\left(\begin{matrix} \text{Quanten-} \\ \text{mechanik} \end{matrix} \right) \rightarrow \text{z.B.} \quad \underbrace{H}_{\text{gegeben}} \quad \underbrace{\vec{\psi}}_{\text{gesucht: "Eigenvektor" (EV) } \vec{\psi}} = E \quad \underbrace{\vec{\psi}}_{\text{"Eigenwert" (EW) } E}$$

→ hier: Drehmatrix hat stets den EW +1
und die Drehachse als zugehörigen EV.