Folgerungen aus den Kreuzprodukt-Eigenschaften:

- $\vec a \times \vec a \overset{(a)}{=} -\vec a \times \vec a \quad \Rightarrow \quad \underline{\vec a \times \vec a = \vec 0}$

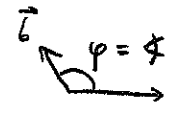
- $\left.\begin{array}{l} \vec a \cdot (\vec a \times \vec b) \overset{(f)}{=} \vec b \cdot (\vec a \times \vec a) = 0 \\ \vec b \cdot (\vec a \times \vec b) \overset{(f)}{=} \vec a \cdot (\vec b \times \vec b) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\underline{\vec a \times \vec b \text{ ist orthogonal zu } \vec a \text{ und zu } \vec b.}$

  → aha, etwas über Richtung von $\vec a \times \vec b$ gelernt.

  → Betrag? ↓

- $$(\vec a \times \vec b)^2 = \underbrace{(\vec a \times \vec b)}_{\vec c} \cdot (\vec a \times \vec b) \overset{(f)}{=} \vec a \cdot \big(\vec b \times \underbrace{(\vec a \times \vec b)}_{\vec c}\big) \overset{(d)}{=} \vec a \cdot \big(\vec a(\vec b \cdot \vec b) - \vec b(\vec a \cdot \vec b)\big)$$

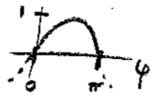
  $$= (\vec a \cdot \vec a)(\vec b \cdot \vec b) - (\underbrace{\vec a \cdot \vec b}_{= |\vec a||\vec b|\cos(\varphi)})^2$$

  $\varphi = \sphericalangle(\vec a, \vec b) \in [0, \pi]$

  $$|\vec a \times \vec b|^2 = |\vec a|^2 |\vec b|^2 \big(\underbrace{1 - \cos^2(\varphi)}_{= \sin^2(\varphi)}\big)$$

  $\sin(\varphi) \in [0, 1]$

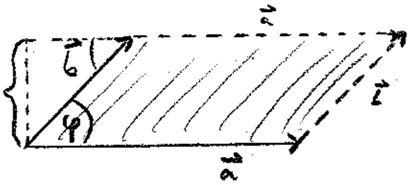
  

  → alles positiv; kann Wurzel ziehen

  $\underline{|\vec a \times \vec b| = |\vec a|\,|\vec b|\,\sin(\varphi)} = a\,b\,\sin(\varphi)$

  ⇝ geometrisch-anschaulich:

  $|\vec b| \sin(\varphi)$

  ⇒ $|\vec a \times \vec b| \;\hat{=}\;$ Fläche des von $\vec a, \vec b$ aufgespannten Parallelogramms

- anschaulich deshalb sofort klar:

  $\underline{\vec a \times \vec b = \vec 0} \;\Leftrightarrow\;$ $\vec a$ und $\vec b$ sind parallel $(\underline{\vec a \parallel \vec b})$

  (d.h. $\vec a = \alpha \cdot \vec b$), oder $\vec a = \vec 0$ oder $\vec b = \vec 0$

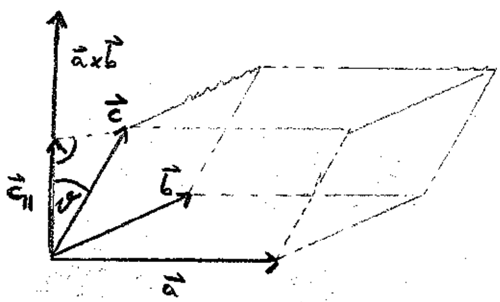
- auch: $\underline{|\vec a \times \vec b| = |\vec a||\vec b| = ab} \;\Leftrightarrow\;$ $\vec a$ und $\vec b$ sind orthogonal $(\underline{\vec a \perp \vec b})$

  ((denn dann $\sin(\varphi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$))

- $$|\vec c \cdot (\vec a \times \vec b)| = \big|\,|\vec c|\,|\vec a \times \vec b|\,\cos(\vartheta)\big|$$

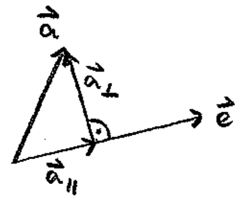
  $$= \underbrace{|\vec c_{\parallel}|}_{\text{Höhe}}\;\underbrace{|\vec a \times \vec b|}_{\text{Grundfläche}}$$

  $=$ Volumen des von $\vec a, \vec b, \vec c$ aufgespannten Parallelepipeds (bzw. Spats)

((heisst auch "Spatprodukt"))

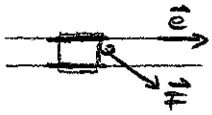
→ Zerlegung eines Vektors $\vec a = \vec a_\perp + \vec a_\parallel$
in Bezug auf (z.B.) einen Einheitsvektor $\vec e$
ist oft nützlich ($\vec a \in \mathbb{R}^3$):



$\Rightarrow \vec a_\parallel = (\vec a\cdot\vec e)\,\vec e$

$\vec a_\perp = \vec a - \vec a_\parallel = \vec a\,(\vec e\cdot\vec e) - \vec e\,(\vec e\cdot\vec a) \overset{\text{bac-cab}}{=} \vec e\times(\vec a\times\vec e)$

Bsp

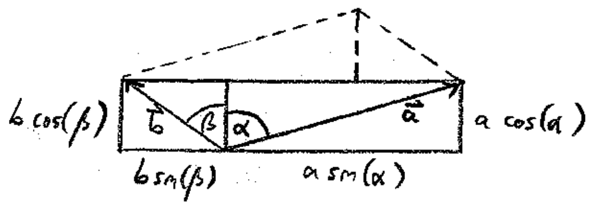


ziehe Schlitten (Kufen in Richtung $\vec e := \frac{1}{\sqrt2}(1,1,0)$)
mit Kraft $\vec F = (3,2,1)\,N$

$\Rightarrow$ nur $\vec F_\parallel = (\vec F\cdot\vec e)\,\vec e = \frac{1}{\sqrt2}(3\cdot1+2\cdot1+1\cdot0)N\;\vec e = (\frac54,\frac54,0)\,N$

sorgt für Beschleunigung (($|\vec F| = \sqrt{3^2+2^2+1^2} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$
$|\vec F_\parallel| = \sqrt{\frac{25}{16}+\frac{25}{16}+0} = \frac54\sqrt2 \approx 1{,}77$))

→ Trigonometrie? Sinussatz, Cosinussatz etc. (s. S. 67)
sind einfache Folgerungen der Vektorrechnung, z.B.:



Fläche großes Rechteck $\overset{\text{Fläche Parallelogramm}}{=} |\vec a\times\vec b| = a\,b\,\sin(\alpha+\beta)$

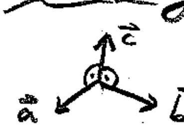
$=$ linkes + rechtes kleines Rechteck

$= b\sin(\beta)\,a\cos(\alpha) + a\sin(\alpha)\,b\cos(\beta)$

(teile durch $a\cdot b$) $\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$

→ seien $\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^3$, $\vec c := \vec a\times\vec b$
wissen (s.o.) Länge von $\vec c$: $|\vec c| = |\vec a|\,|\vec b|\,\sin(\sphericalangle(\vec a,\vec b))$
und Richtung von $\vec c$: $\vec c \perp \vec a$ und $\vec c\perp\vec b$
aber was ist die Orientierung?

2 Möglichkeiten:



oder

$\vec a, \vec b, \vec c$ bilden "Rechtssystem" oder "Linkssystem"?

→ Test: wähle $\vec a = \vec e_1$, $\vec b = \vec e_2$

$\Rightarrow \vec c = \vec e_1\times\vec e_2 = (1,0,0)\times(0,1,0) = (0-0,\,0-0,\,1-0) = \vec e_3$

$\Rightarrow \vec a, \vec b, \vec a\times\vec b$ bilden Rechtssystem

bzw

rechte-Hand-Regel

7.4 Felder

bisher: Funktionen $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

"Feld" $:=$ etwas$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \overset{\text{z.B.}}{=}$ etwas$(\vec{r}, t)$

Physik-Bsp: Temperatur $T(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ "Skalarfeld"

Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ "Vektorfeld"

Def Ein Skalarfeld ist Abb. $f: A \to B$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\vec{x} \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Bsp $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) := e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3$

((z.B. könnte $f(\vec{x})$ die Temperatur des Raumpunktes $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ sein))

$\to$ wählt man $x_2, x_3, \ldots, x_n$ beliebig aber fest, wird $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine "ganz normale Funktion" von x_1; insbesondere heisst dann

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} := \lim_{x \to x_1} \frac{f(x, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{x - x_1}$$

die partielle Ableitung von $f(\vec{x})$ nach x_1

((d.h. das ∂ statt d heisst: $x_2 \ldots x_n$ beim x_1-Ableiten festhalten))

$\Rightarrow$ können also alle "normalen" Ableitungsregeln (vgl. Kap.) sofort übertragen (indem wir $x_2, \ldots, x_n$ einfach "vergessen"):

Bsp (wie oben) $f(\vec{x}) = e^{-x_1} + x_1^3 x_2^2 x_3$

$$\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \overset{x_2, x_3 \text{ konstant}}{\downarrow\hat{=}} -e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3$$

höhere Ableitungen wie gewohnt: $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1^2} = +e^{-x_1} + 6x_1 x_2^2 x_3$

$$\frac{\partial^3 f(\vec{x})}{\partial x_1^3} = -e^{-x_1} + 6x_2^2 x_3$$

analog für x_2, x_3: $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2} = 2x_1^3 x_2 x_3$; $\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_3^2} = 0$

Schreibweisen: $\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_k} \hat{=} \frac{\partial}{\partial x_k} f(\vec{x}) \hat{=} \partial_{x_k} f(\vec{x}) \hat{=} \partial_k f(\vec{x}) \hat{=} \ldots$

gemischte Ableitungen: (gleiches Bsp wie oben) ((s. auch Ü69))

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_1 \, \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial}{\partial x_1}\left[2x_1^3 x_2 x_3\right] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

$$\frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_2 \, \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial}{\partial x_2}\left[-e^{-x_1} + 3x_1^2 x_2^2 x_3\right] = 6x_1^2 x_2 x_3$$

$\rightarrow$ allgemein gilt der Satz von Schwarz: (o.B.)

Für $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_j \, \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x_k \, \partial x_j}$

für beliebige $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, falls beide Ableitungen bei $\vec{x} \in A$ stetig.

Def ein Vektorfeld ist Abb. $\vec{f}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow B \subset \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$

mit $\vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\rightarrow$ jede Komponente ist ein Skalarfeld, können also wie gewohnt rechnen!

Bsp $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto f(\vec{x}) := (\sin(x_1) + x_2 x_3, e^{-x_3}, x_2^3)$

((z.B. könnte $\vec{f}(\vec{x})$ eine Strömungsgeschwindigkeit am Punkt $\vec{x}$ sein))

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_1} = (\cos(x_1), 0, 0)$$

$$\frac{\partial \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_2} = (x_3, 0, 3x_2^2)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{f}(\vec{x})}{\partial x_3 \, \partial x_2} = (1, 0, 0)$$

Bsp $\vec{r}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \vec{r}(t) := \left(\frac{1}{1+t^2}, e^{-t^2}, \cosh(2t)\right)$

((z.B. könnte $\vec{r}(t)$ der Ort eines Teilchens zum Zeitpunkt t sein))

$$\Rightarrow \dot{\vec{r}}(t) := \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^2}, -2t e^{-t^2}, 2\sinh(2t)\right)$$

((z.B. Geschwindigkeit des Teilchens zur Zeit t))