Bsp für Vektorräume in Physik [≈ Embacher, §15]

- $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$: Ebene + Raum
  Geschwindigkeit, Impuls, elektrische Feldstärke, ...
- $\mathbb{R}^4$: Raum-Zeit, spezielle Relativitätstheorie
  (setze Lichtgeschw. $c=1$ ⇒ kann Zeit in Längeneinheiten messen)
  $\{(x,y,z); \text{Zeit } t\} \to (x_0, x_1, x_2, x_3)$ mit $x_0 := ct$
- $\mathbb{R}^6$: "Phasenraum" der klassischen Mechanik:
  Teilchen-Beschreibung durch $\{\text{Ort}; \text{Impuls}\} \to (x,y,z,p_x,p_y,p_z)$
- $\mathbb{R}^6, \mathbb{R}^{12}$: Beschreibung von zwei Teilchen
  Menge aller Konfigurationen $(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2)$ "Konfigurationsraum"
  → Phasenraum sogar $\mathbb{R}^{12}$
- $\mathbb{R}^{3N}, \mathbb{R}^{6N}$: statistische Physik, Beschreibung sehr vieler ($N \sim 10^{23}$)
  Teilchen; z.B. Gasmoleküle
- komplexe VR's: Quantenmechanik (QM) beschreibt physikalische
  Systeme durch "Zustandsvektoren" oder "Wellenfunktionen"
  aus einem komplexen VR ("Hilbert-Raum")

- Lösungsmengen linearer Probleme sind VR's

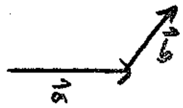
  Bsp $f(x) = Ae^x + Be^{-x}$ (mit $A,B,x \in \mathbb{R}$)
  erfüllt die (homogene, lineare, Differential-) Gleichung $f''(x) = f(x)$.
  → die Summe zweier verschiedener Lsn. von $f''=f$
  ist auch wieder Lsg; ebenso jedes Vielfache einer Lsg;
  also sind "+" und "·" für alle VR-Elemente (Lsn) def.
  → die Menge der reellen Lsn von $f''=f$ ist also ein VR,
  in diesem Falle der $\mathbb{R}^2$ ((Lsg durch (A,B) eindeutig festgelegt))

7.2 Skalarprodukt

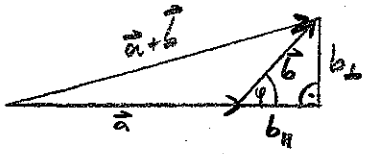
(wieder erst Nützlichkeit entdecken, anschaulich im $\mathbb{R}^n$; dann mathematisch-axiomatische Verallgemeinerung)

Motivation

$\Rightarrow |\vec a+\vec b|^2 - a^2 - b^2 = 0$ (Pythagoras)



$\Rightarrow |\vec a+\vec b|^2 - a^2 - b^2 = 2\cdot$Rest $=: 2(\vec a\cdot\vec b)$



können $\vec b$ zusammensetzen:

$\vec b = \vec b_\perp + \vec b_\parallel$ (parallel zu $\vec a$; "Projektion von $\vec b$ auf $\vec a$")

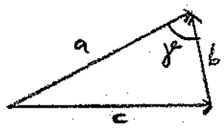
$\Rightarrow$ also $\vec a\cdot\vec b = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(a+b_\parallel)^2+b_\perp^2}_{\text{Pythagoras}} - a^2 - b_\perp^2 - b_\parallel^2\Big] = a\,b_\parallel$

Def $\vec a\cdot\vec b := a b_\parallel = a_\parallel b = ab\cos(\varphi)$ heisst Skalarprodukt von $\vec a$ mit $\vec b$

definiert Cosinus; vgl. Kap. 6.4

Gleichberechtigung: $\vec a\cdot\vec b = \vec b\cdot\vec a$

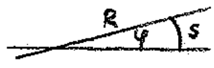
Bem:

- 

  "Cosinus-Satz" $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\gamma)$

  folgt aus Vektorrechnung: $= (\vec a-\vec b)^2 = a^2+b^2-2\vec a\cdot\vec b$

- Winkel dimensionslos messen! (vgl. Kap. 6.4)

  $\varphi = s/R = $ Länge/Länge ;

  rechter Winkel $= \frac{\pi}{2}$ (nachmessen: , $s/R \approx 3{,}14159\ldots =: \pi$)

Eigenschaften des Skalarprodukts: (alle anschaulich klar)

$\vec a^2 := \vec a\cdot\vec a = a^2$; $|\vec a| = a = \sqrt{\vec a^2}$

$\vec a\perp\vec b \Leftrightarrow \vec a\cdot\vec b = 0$; $\vec a\parallel\vec b \Leftrightarrow \vec a\cdot\vec b = ab$

$|\vec a+\vec b| \le a+b$; $|\vec a\cdot\vec b| \le ab$ (Schwarz'sche Ungleichg)

$(\lambda\vec a)\cdot\vec b = \lambda(\vec a\cdot\vec b) = \vec a\cdot(\lambda\vec b)$

$\vec a\cdot(\vec b+\vec c) = \vec a\cdot\vec b + \vec a\cdot\vec c$

$r_{12} = r_{21} = |\vec r_1-\vec r_2| = \sqrt{(\vec r_1-\vec r_2)^2} = \sqrt{r_1^2+r_2^2-2\vec r_1\cdot\vec r_2}$

Bem.:
- Schreibweise oft $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\vec{b}$
- brauche oft Klammern: $\vec{a}(\vec{b}\vec{c}) \neq (\vec{a}\vec{b})\vec{c}$!
- nie durch einen Vektor teilen, "$\cancel{\frac{1}{\vec{a}}}$" nicht def.
- in Gleichungen aufpassen: Zahl = Zahl; $\overrightarrow{\text{Vektor}} = \overrightarrow{\text{Vektor}}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ in Komponentenschreibweise:

mit kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_1 = (1,0,0), \dots$ als Basis:

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3)\cdot(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3)$$

$$\begin{aligned} = \; & a_1b_1\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + a_2b_1\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 + a_3b_1\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1 \\ & + a_1b_2\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + a_2b_2\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 + a_3b_2\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2 \\ & + a_1b_3\,\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3 + a_2b_3\,\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3 + a_3b_3\,\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$= \underline{\underline{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}}$$

Verallgemeinerung: mathematisch abstrahiert lautet diese Struktur

Def Skalarprodukt (oder inneres Produkt) ist Abbildung $\cdot : V\times V \to \mathbb{R}$, $(\vec{v},\vec{w}) \mapsto \vec{v}\cdot\vec{w}$

mit den Eigenschaften ("Skalarprodukt-Axiome")

(1) $\vec{v}\cdot\vec{w} = \vec{w}\cdot\vec{v}$ — Symmetrie

(2) $\vec{v}\cdot\vec{v} \geq 0$; $\vec{v}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$ — Positivität

(3) $(x\vec{v})\cdot\vec{w} = x(\vec{v}\cdot\vec{w})$

(4) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w} = \vec{u}\cdot\vec{w} + \vec{v}\cdot\vec{w}$

} Linearität

Bem:
- ein Vektorraum mit einem so def. Skalarprodukt heisst "Prä-Hilbertraum"
- unsere anschauliche Def war Spezialfall $V = \mathbb{R}^3$

  → kann für $V = \mathbb{R}^n$ $\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + \dots + v_nw_n$ nehmen (s. Ü63)
- ganz andere Skalarprodukte auf $\mathbb{R}^n$ möglich; vgl. z.B. Ü64

  (in QM z.B. $\vec{v}\cdot\vec{w} \leftrightarrow \langle\vec{v}|\vec{w}\rangle$

Def Die <u>Norm</u> (oder <u>Länge</u>, oder <u>(Absolut-)Betrag</u>) eines Vektors $\vec{v} \in V$ ist $|\vec{v}| := \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$

<u>Bem:</u>
- Schreibweisen (vgl. oben) $|\vec{v}| = v = \|\vec{v}\|$, $\vec{v}^2 = \vec{v}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|^2 = v^2$
- aus den Skalarprodukt-Axiomen (1)-(4) folgen die Eigenschaften des Betrags, so wie auf S. 67 unten, die "Norm-Eigenschaften":

$$\text{"Norm-Axiome"}\left\{\begin{array}{lll} (a) & |\vec{v}| \geq 0 \;;\; |\vec{v}| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0} & \\ (b) & |x\vec{v}| = |x|\,|\vec{v}| & \\ (c) & |\vec{v}+\vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}| & \text{Dreiecksungl.} \end{array}\right.$$

$$\text{folgen}\left\{\begin{array}{lll} (d) & |\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq |\vec{v}|\,|\vec{w}| & \text{Schwarz'sche Ungl.} \\ (e) & |\vec{v}-\vec{w}| \geq \big||\vec{v}|-|\vec{w}|\big| & \text{Abstand zw. } \vec{v},\vec{w} \end{array}\right.$$

- für $V = \mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ist Norm anschauliche geometrische Länge des Vektorpfeils
- für $V = \mathbb{R}^{n\geq 4}$ keine geom. Veranschaulichung mehr möglich
- für $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist $\vec{e}_v := \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ <u>Einheitsvektor</u> in Richtung von $\vec{v}$
- falls $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ (und $\vec{v}\neq\vec{0}, \vec{w}\neq\vec{0}$) sagt man, die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ stehen zueinander <u>orthogonal</u> (oder <u>senkrecht</u>; <u>rechtwinklig</u>)
- für $V = \mathbb{R}^n$ gilt: $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_k = (0..0\underset{\substack{\uparrow\\ j\text{-te Stelle}}}{1}0..0)\cdot(0..0\underset{\substack{\uparrow\\ k\text{-te Stelle}}}{1}0..0) = \begin{cases} 1 & \text{falls } j=k \\ 0 & \text{falls } j\neq k \end{cases}$

  d.h. die kartesischen Basisvektoren sind alle normiert und orthogonal zueinander $\Rightarrow$ sog. <u>Orthonormalbasis</u>

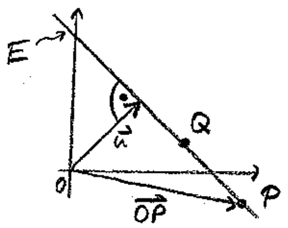
- der <u>Winkel</u> zwischen zwei Vektoren $\vec{v},\vec{w} \in V\setminus\{\vec{0}\}$ ist allg. (und eindeutig) def. durch

  $$\cos(\varphi) := \underbrace{\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}}_{\in[-1,1]}, \quad \varphi \in [0,\pi]$$

  $\rightarrow$ für $V = \mathbb{R}^n$ wieder geometrisch klar, s. oben.

<u>Bsp</u> $V = \mathbb{R}^n$; Glg für $\left.\begin{cases} \text{Gerade} & n=2 \\ \text{Ebene} & n=3 \\ \text{Hyperebene} & n \geq 4 \end{cases}\right\}_{\equiv E}$ durch

Punkt $P = (p_1 | p_2 | \ldots | p_n)$, die senkrecht auf Vektor $\vec{u}$ steht?



$\Leftrightarrow$ Menge aller Punkte Q, für die $\underbrace{\vec{PQ}}_{= \vec{OQ} - \vec{OP}} \perp \vec{u}$

$\Leftrightarrow$ $E = \{ Q \mid \vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0 \}$

$\Leftrightarrow$ $E = \{ Q \mid \vec{OQ} \cdot \vec{u} = \vec{OP} \cdot \vec{u} \ (= \text{const.}) \}$

7.3 Kreuzprodukt

(oder auch: "<u>Vektorprodukt</u>", oder "<u>äusseres Produkt</u>"

Besonderheit des $\mathbb{R}^3$! (Verallg. auf $\mathbb{R}^n$ möglich, aber unwichtig) $\leftarrow F_{\mu\nu} \ldots$

((hier: erst Def, dann geometrische Veranschaulichung))

<u>Def</u> <u>Kreuzprodukt</u> heisst die Abbildung "$\times$": $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

mit $\left(\vec{v} = (v_1, v_2, v_3), \vec{w} = (w_1, w_2, w_3)\right) \mapsto \vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2, \\ v_3 w_1 - v_1 w_3, \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$

<u>Bem.:</u> • andere Bezeichnungen: $[\vec{v}, \vec{w}]$, $[\vec{v}\vec{w}]$, $\vec{v} \wedge \vec{w}$, ...

direkt aus Def. folgen die <u>Eigenschaften</u>: ((hier $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$; $\lambda \in \mathbb{R}$))

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = - \vec{b} \times \vec{a}$ Antisymmetrie

(b) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$ } Linearität

(c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a} \cdot \vec{b})$ "bac-cab", kommt häufig vor!

(e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$ Jacobi-Identität (zyklische Vertauschung!)

(f) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$ (sog. Spatprodukt)

<u>Bem.:</u> • <u>Beweis</u>: s. <u>Ü67</u>

• <u>Vorsicht</u>: im allg. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (<u>nicht</u> assoziativ!)