7. Vektoren und Felder

bisher: Funktionen von reellen Variablen
+ deren Eigenschaften, Rechenregeln, ...
komplexe Zahlen (→ Ebene $\mathbb{R}^2$)

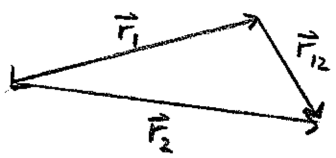
jetzt: 3-dimensionaler Raum, $\mathbb{R}^3$, "Physik spielt sich hier ab"

→ Beschreibung durch Richtungsangaben, Pfeile!

Bezugspunkt vereinbaren: Ursprung

Ortsvektor $\vec{r}$: Pfeil Ursprung → Physik

Verschiebungsvektor:
Pfeil Punkt → Punkt



((Einheiten? Bsp: $\vec{v}$ in m/s? ↔ Übersetzungsregel (cm auf Papier ↔ m/s)))

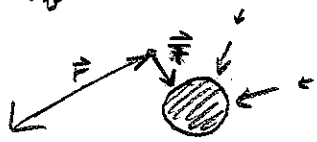
Betrag: Länge des Pfeils, z.B. $|\vec{r}|=r$, $|\vec{v}|=v$, $|\vec{F}|=F$

→ Pfeil hat Richtung, Betrag, Anfangspunkt

Bsp Ball hat bei $\vec{r}$ die Geschwindigkeit $\vec{v}$

Bsp Wasser-Strömung $\vec{v}(\vec{r})$

Bsp Erd-Gravitationsfeld $\vec{F}(\vec{r})$



⇒ anschauliche (Physiker-) Def:

Vektoren sind Pfeile bzgl. Betrag und Richtung, die mit einer Zahl zu multiplizieren und die zu addieren physikalisch sinnvoll ist.

Bem: • ≠ Mathematiker-Vektor (s. unten: bilden Vektor-Raum)
• Physik-Pfeil ist real (Verhalten bei Drehungen)

• 1. Def-Zeile: Vektor ≙ Gesamtheit der Pfeile mit ...
→ kann Repräsentanten wählen

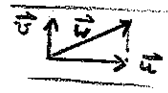
• 2. Def-Zeile: 1,7 · ↗ = ↗ ; (−1) · ↗ = ↙ etc anschaulich klar
→ Einheitsvektor $\frac{1}{a}\cdot\vec{a} = \vec{e}$, $|\vec{e}|=1$; $\vec{a} = a\vec{e}$

• 3. Def-Zeile: (vgl. Bild oben) $\vec{r}_1 + \vec{r}_{12} = \vec{r}_2$
funktioniert mit Vektoren gleicher Dimension (Übersetzungs-Regel)
Reihenfolge egal: ↗ + ↘ =  = ↘ + ↗
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

→ Nullvektor $\vec{0} := \vec{a} + (-\vec{a})$

• "physikalisch sinnvoll"? → (an Bsp verstehen):

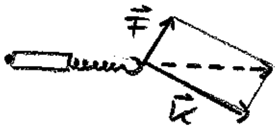
Bsp Geschwindigkeiten: Mult. ✓ Add.? → Fluss:



$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ ✓

⇒ Ja, sind Vektoren.

Bsp Kräfte: → Federwaage

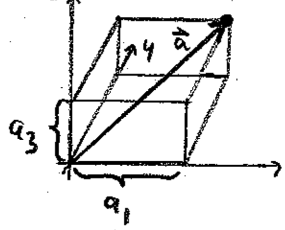


⇒ Ja, sind Vektoren.

Bsp Drehungen: ((rechte-Hand-Regel: Daumen ≙ Drehachse, Finger ≙ Drehrichtung, Betrag ≙ Winkel))
Test: ↑ + ← $\overset{?!}{\neq}$ ← + ↑
⇒ Nein, sind keine Vektoren

7.1 Komponentendarstellung, Eigenschaften, Vektorraum

→ bisher: Vektor ≙ Pfeil ; Addition ≙ aneinander basteln
Vereinfachung?! Vektor $\vec{a}$ gegeben; wähle Repräsentant ab Ursprung.
messe Höhe der Spitze → a_3 , etc.



Komponenten $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\left(\left(\text{oder } \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\right)\right)$

Bem.: • Systematik: $\vec v = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec F = (F_1, F_2, F_3)$

$\vec r = (r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ ← ausnahmsweise

• alle Komponenten haben gleiche Dimension, $[a_1] = [a_2] = [a_3] = [a] = [\vec a]$

Bsp $[v_3] = \frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}} = \text{m/s}$, $[y] = \text{Länge} = \text{m}$

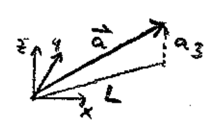
$\vec v = (1\,\text{m/s}, 0, 2\,\text{m/s}) = (1, 0, 2)\,\text{m/s}$

• hier meist $\mathbb{R}^3$; Verallg. auf $\mathbb{R}^n$ einfach: $\vec a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$

→ die oben eingeführten Pfeil-Eigenschaften in Komponenten-Sprache (gleich für $\mathbb{R}^n$):

Betrag: $|\vec a| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

(($n=3$: wegen Pythagoras: $a^2 = a_3^2 + L^2$, $L^2 = a_1^2 + a_2^2$))



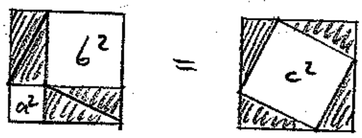
Mult.: $c \cdot \vec a = (c \cdot a_1, c \cdot a_2, \dots, c \cdot a_n)$

((anschaulich klar: z.B. $c = 2 \Rightarrow$ Schatten-Verdopplung))

Add.: $\vec a + \vec b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$

((anschaulich klar; für z-Komponente gilt z.B. $z = a_3 + b_3$ ✓))

Bem: Pythagoras ist einfach geometrischer Beweis



Verallgemeinerung: mathematisch abstrahiert haben unsere Vektoren (des $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$) die Struktur eines Vektorraumes:

Def Vektorraum heisst ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus

(i) einer Menge V (mit Elementen $\vec v, \vec w, ..$, genannt "Vektoren")

(ii) einer Abbildung $+ : V \times V \to V$

"Addition" $(\vec v, \vec w) \mapsto \vec v + \vec w$

(iii) einer Abbildung $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$

"äussere Multiplikation" $(x, \vec v) \mapsto x\vec v \equiv x \cdot \vec v$ ← Punkt egal

mit den folgenden Eigenschaften ("Vektorraum-Axiome"):

((hier $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$; $x, y \in \mathbb{R}$))

(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ Kommutativgesetz

(2) $(\vec{u}+\vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v}+\vec{w})$ Assoziativgesetz

(3) $\exists\ \vec{0} \in V$ mit $\vec{v}+\vec{0} = \vec{v}$ Nullvektor

(4) $\exists\ (-\vec{v}) \in V$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$ inverser Vektor

d.h. $(V,+)$ ist abelsche Gruppe

(5) $x(y\vec{v}) = (xy)\vec{v}$ Assoziativgesetz

(6) $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$ neutrales Element

(7) $x(\vec{u}+\vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$

(8) $(x+y)\vec{v} = x\vec{v} + y\vec{v}$

Distributivgesetze

Bem:
- die Elemente aus $\mathbb{R}$ heissen Skalare,
  die aus V heissen Vektoren ; Bezeichnung ... $\vec{v}, \vec{w} \,\hat{=}\, \underline{v}, \underline{w} = \mathbf{v}, \mathbf{w} = |v\rangle, |w\rangle$
- haben oben einen Vektorraum (VR) über $\mathbb{R}$ definiert;
  können z.B. auch überall $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen, dann Skalare $\in \mathbb{C}$
- unsere anschauliche Def. war der Spezialfall des sogenannten Euklid'schen (Vektor-) Raums,
  $$V = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ Stück}} = \{ (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mid v_k \in \mathbb{R} \} \ , n \in \mathbb{N}$$
- benutzen dasselbe Symbol für Add. und Mult. in V und $\mathbb{R}$;
  a priori sind dies aber völlig verschiedene Dinge!
- es gibt in Physik / Mathematik viele weitere (ausser $\mathbb{R}^n$) wichtige VR's. z.B. Polynome (vgl. Ü62), Hilbert-Raum (QM), ...

Def Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_d \in V$ heissen eine Basis des VR's, wenn jedes $\vec{v} \in V$ als $\vec{v} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \ldots + x_d \vec{e}_d = \sum_{k=1}^{d} x_k \vec{e}_k$ mit eindeutigen Zahlen $x_k \in \mathbb{R}$ geschrieben werden kann. (Bsp: Ü62)

Bem:
- d heisst dann Dimension von V; $d \in \mathbb{N}$, aber auch $d = \infty$ mögl.
- unser kartesisches Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ oben hatte als Basis $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$; $d = n = 3$