6.4 Trigonometrische Funktionen ((endlich ..))

für beliebige komplexe Zahlen $z \in \mathbb{C}$ machen wir die

Def $\cos(z) := \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$, $\sin(z) := \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$

$\Rightarrow \quad \cos(z) + i\sin(z) = \exp(iz)$ "Euler'sche Formel"

Bem.: vgl. mit Def von cosh, sinh

$\Rightarrow \cos(z) = \cosh(iz)$, $\sin(z) = \dfrac{\sinh(iz)}{i}$

Potenzreihen direkt aus exp-Reihe (oder cosh/sinh Reihen),

$$\left(\cosh(z) = \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = [\exp(z)]_{\substack{\text{gerader}\\\text{Anteil}}} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right]_{\substack{\text{gerader}\\\text{Anteil}}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \right)$$

$$\left((iz)^{2k} = (i^2)^k z^{2k} = (-1)^k z^{2k} \right)$$

$$\cos(z) = \cosh(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

$$\sin(z) = \frac{\sinh(iz)}{i} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots$$

Eigenschaften (folgen direkt aus Def, oder von cosh/sinh)

- $\cos(-z) = \cos(z)$, $\sin(-z) = -\sin(z)$
  (gerade Funktion) (ungerade Funktion)
- $\cos(0) = 1$, $\sin(0) = 0$
- $\dfrac{d}{dz}\cos(z) = -\sin(z)$, $\dfrac{d}{dz}\sin(z) = \cos(z)$
- sämtliche "Additionstheoreme" folgen aus Def

  z.B. $\sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) = \sin(z_1 + z_2)$

  $\cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) = \cos(z_1 + z_2)$

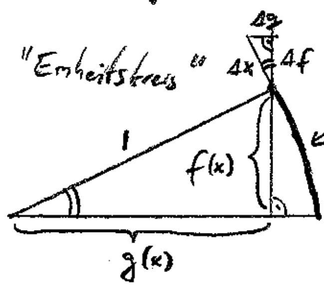
  (Spezialfall: $z_1 = z$, $z_2 = -z$

  $\Rightarrow \cos(z)\cos(-z) - \sin(z)\sin(-z) \overset{\text{gerade/ungerade}}{=} \underline{\cos^2(z) + \sin^2(z)} = \cos(0) = \underline{1}$

  "trigonometrischer Pythagoras"
- für $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ folgt z.B.

$$\sin(a+ib) = \sin(a)\cosh(b) + i\cos(a)\sinh(b)$$
$$\cos(a+ib) = \cos(a)\cosh(b) - i\sin(a)\sinh(b)$$
$$\exp(a+ib) = \exp(a)\,[\cos(b) + i\sin(b)]$$

Nachholbedarf: müssen noch $\cos(x)$, $\sin(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ "kennenlernen":



, $\underset{\text{Bogenmass}}{\underbrace{2\pi}} \hat{=} \underset{\text{Gradmass}}{\underbrace{\text{"}360°\text{"}}}$

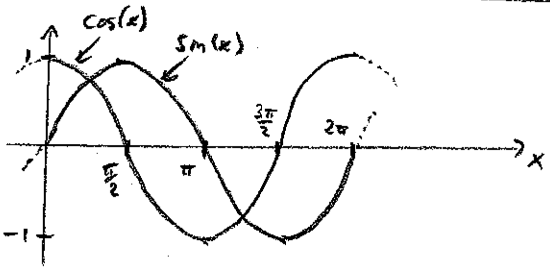
es gilt $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{g(x)}{1}$ (wegen Ähnlichkeit der Dreiecke)

$\frac{\Delta g}{\Delta x} = \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \to 0} \frac{-f(x)}{1}$

$$\left.\begin{array}{ll} \Rightarrow f'(x) = g(x) , & g'(x) = -f(x) \\ f(0) = 0 , & g(0) = 1 \end{array}\right\}$$ genau die Eigenschaften von S.58!
$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \sin(x), \ g(x) = \cos(x)}}$

$\sin(x) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$

$\cos(x) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$



aus obiger $\triangle$-Skizze: $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, ...

aus Funktions-Skizze: $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

$\Rightarrow \cos(x+\pi) = -\cos(x)$, $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$

$\cos(x+2\pi) = \cos(x)$, $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$

aus $\exp(a+ib) = \exp(a)\left[\cos(b) + i\sin(b)\right]$ (s. S. 58) folgt

$\underline{\underline{\exp(i\pi) = -1 , \quad \exp(2\pi i) = 1}}$

und wegen $\exp(z_1+z_2) = \exp(z_1)\cdot\exp(z_2)$ ist

$\underline{\underline{\exp(z+2\pi i) = \exp(z)}}$, "exp ist 2π-periodisch in imaginärer Richtung"

also: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nicht injektiv

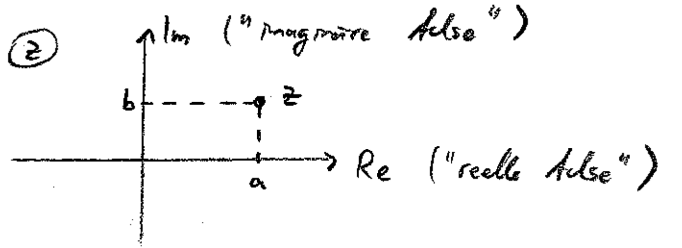
$\Rightarrow \exists$ keine Umkehrabbildung

(erst nach Einschränkungen)

((auch nicht surjektiv: $\exp(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$))

6.5 Gauss'sche Zahlenebene (komplexe Ebene)

"lese" eine komplexe Zahl $z = a + ib \in \mathbb{C}$ als Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ in der Ebene

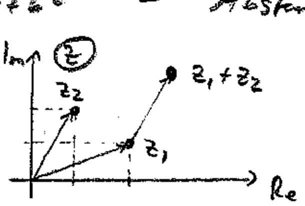


→ Rechenoperationen geometrisch veranschaulichbar:

z.B. $z^* = a - ib$ ≙ Spiegelung an Re-Achse

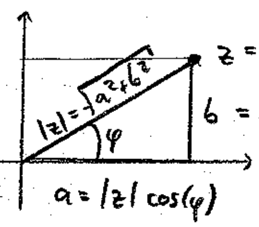
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ≙ Abstand zum Ursprung ((§7: Vektorbetrag))

Addition:



((≙ Vektoraddition, vgl. §7))

→ alternative Koordinatenwahl in $\mathbb{R}^2$: Polarkoordinaten



$z = a + ib \mathrel{\hat{=}} (a, b) \mathrel{\hat{=}} (|z|, \varphi)$

$\varphi \in [0, 2\pi[$ im Bogenmass!

$\varphi := \arg(z)$ "Argument von z"

$\arg(0) := 0$ ((damit arg auf $\mathbb{C}$ def))

Bem: • die Fkt $\arg: \mathbb{C} \to [0, 2\pi[$ ist unstetig (springt um 2π) entlang der positiven reellen Achse

• manchmal andere Konventionen, z.B. $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$

• in Ü58: $\frac{b}{a} = \tan(\varphi) \Rightarrow \arg(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + n(z)\cdot\pi$, $n(z) \in \{0,1,2\}$

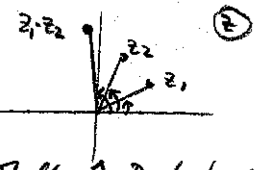
$\Rightarrow$ $z = a + ib = |z|\cos(\varphi) + i|z|\sin(\varphi) = |z|\exp(i\varphi) = \underline{|z|\exp\{i\cdot\arg(z)\}}$

→ $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \exp\{i[\arg(z_1) + \arg(z_2)]\}$

aber auch $= |z_1 \cdot z_2| \exp\{i \cdot \arg(z_1 \cdot z_2)\}$

$\Rightarrow \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi \cdot n$

((fast wie ln)) (($n \in \{0,1\}$ so dass $\arg \in [0, 2\pi[$))



Mult. ≙ Drehstreckung

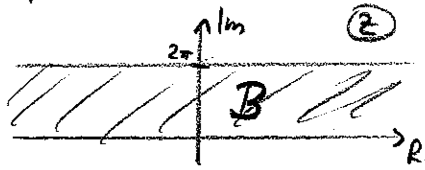
6.6 Logarithmus und Potenzen

wieder als Umkehrfunktion von exp definieren ?!

Kap. 6.4, S. 59: exp ist 2π-periodisch auf Im-Achse

→ beschränken uns auf Streifen

$$B := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \in [0, 2\pi[\, \}$$



Def $\ln : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to B$

$$z \mapsto \underline{\underline{\ln(z) := \ln|z| + i \arg(z)}}$$

"reeller ln, $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, vgl. Kap. 2.4, S.21

→ es folgt
$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln|z_1 \cdot z_2| + i \arg(z_1 \cdot z_2)$$
$$= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i \left[\arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi n \right]$$
$$= \ln(z_1) + \ln(z_2) - 2\pi i n$$
$(n \in \{0,1\}$ so dass $[\ldots] \in [0, 2\pi[\,)$

Bem.:

- falls $z \in \mathbb{R}^+$: $|z| = z$, $\arg(z) = 0$ $\Rightarrow$ reeller Log aus Kap 2.4
- $$\underline{\underline{\exp(\ln(z))}} = \exp(\ln|z| + i \arg(z)) = \exp(\ln|z|) \exp(i \arg(z))$$
  $$= |z| \exp(i \cdot \arg(z)) \overset{[\text{vgl. S.60}]}{=} \underline{\underline{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$
  also ist die "eingeschränkte Exponentialfkt" $\exp : B \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ umkehrbar (im Gegensatz zu $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$)
  $$\ln(\exp(z)) = z \quad \forall z \in B$$
- es gibt verschiedene Def's; hier nur eine davon gezeigt; kann $\ln(z)$ auch als mehrwertige Fkt behandeln ("Blätter")

allgemeine (komplexe) Potenzen werden nun analog zu Kap. 2.4 (S.21) via exp definiert:

<u>Def</u> für $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}$

$$\underline{b^z := \exp(z \ln(b))}$$

sowie $0^z := \lim_{b \to 0} b^z = 0$ für $z \neq 0$

und $0^0 := 1$

Schreibweise: $\sqrt[n]{b} := b^{1/n}$

→ die Def von b^x in Kap 2.4 ist Spezialfall ($|b| = b$, $\arg(b) = 0$)

→ die <u>Potenzgesetze</u> folgen wieder aus Def (mit exp-Eigenschaften):

$$b^{z_1} \cdot b^{z_2} = b^{z_1 + z_2} \qquad \left(\Rightarrow b^{-z} = \frac{1}{b^z} \text{ für } z_1 = z,\ z_2 = -z\right)$$

$$(b^{z_1})^{z_2} = b^{z_1 z_2} \cdot \exp(2\pi i n z_2) \text{ so, dass } \operatorname{Im}(z_1 \ln b) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

$$a^z b^z = (ab)^z \exp(2\pi i n z) \text{ so, dass } \arg(a) + \arg(b) - 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

$$\ln(z_1^{z_2}) = z_2 \ln(z_1) + 2\pi i n \text{ so, dass } \operatorname{Im}(z_2 \ln(z_1)) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

→ wegen $\ln(e) = 1$ folgt

$$e^z = \exp(z \cdot \ln(e)) = \exp(z)$$

$$\Rightarrow (\exp(z_1))^{z_2} = \exp(z_1 z_2 + 2\pi i n z_2) \text{ so, dass } \operatorname{Im}(z_1) + 2\pi n \in [0, 2\pi[$$

→ wegen $\exp(i\pi) \overset{\text{Euler}}{=} \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1 \quad \Rightarrow e^{\pi i} + 1 = 0$

$\exp(2\pi i) = \exp(i\pi) \cdot \exp(i\pi) = 1 \quad \Rightarrow e^{2\pi i} = 1$

((überraschend einfache Verknüpfung von $e, \pi, 1, 0, i$))