6.2 Fundamentalsatz der Algebra

Für jedes komplexe Polynom $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$

(Grad $n \in \mathbb{N}_0$, Koeff's $a_k \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$; $P: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$)

gibt es Zahlen $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $\underline{\underline{P_n(z) = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)}} = a_n (z-z_1)(z-z_2) \cdots (z-z_n)$

((Beweis: für $n = 0,1$ trivial; $n=2$: Ü54; $n \geq 3$: Analysis-Vorl...))
(Funktionentheorie)

Bem.:
- die z_k sind also die (komplexen) NS von $P_n(z)$: $P_n(z_k) = 0$;
  Mehrfach-NS möglich, z.B. $P_2(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2$
  $\Rightarrow$ jedes Polynom vom Grade $n \geq 1$ hat mind. eine NS in $\mathbb{C}$
- $P_n(z)$ ist sowohl durch die $(n+1)$ Zahlen $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ als auch durch $\{z_1, \ldots, z_n, a_n\}$ vollständig festgelegt.
- analog zum Fund.-Satz der Zahlentheorie (vgl. Kap. 1.3, 5.7) (Primfaktorzerlegung): Faktorisierung von $P(z)$ viel schwieriger als "Ausmultiplizieren".

$\rightarrow$ Folgerung: Für "reelle Polynome" (d.h. $a_k \in \mathbb{R}$) gilt

$$[P_n(z)]^* = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right)^* = \sum_{k=0}^{n} a_k^* (z^k)^* = \sum_{k=0}^{n} a_k (z^*)^k = P_n(z^*)$$

$\Rightarrow P_n(z_k^*) = [P_n(z_k)]^* = 0^* = 0$

$\Rightarrow$ falls $z_k = a + ib$ NS, dann auch $z_k^* = a - ib$!

(d.h. NS sind komplex-konjugierte Paare oder rein reell.)

kann ((wegen $(z - z_k)(z - z_k^*) = z^2 - \underbrace{(z_k + z_k^*)}_{\mathbb{R}} z + \underbrace{z_k z_k^*}_{\mathbb{R}}$)) schreiben:

$$P_n(z) = a_n \underbrace{(z^2 + A_1 z + B_1) \cdots (z^2 + A_m z + B_m)}_{\text{komplex konj. NS}} \underbrace{(z - C_1) \cdots (z - C_{n-2m})}_{\text{reelle NS}}$$

mit $a_n, A_j, B_j, C_j \in \mathbb{R}$ und $A_j^2 < 4B_j$ (vgl. Ü54)

→ wie bestimmt man die NS z_k ?

- $n=1$: trivial
- $n=2$: "p-q-Formel" für quadratische Gln. (vgl. Ü54)
- $n=3$: es gibt komplizierte / unpraktische Lösungsformeln für kubische Gln.
- $n \geq 3$: in der Praxis müssen NS erraten werden (bzw. näherungsweise / numerisch / ... bestimmt)

((man kann sogar beweisen, dass es keine allgemeine Formel gibt)) ($n \geq 4$)

Bsp $P(z) = 2i\,z^3 + (2-6i)z^2 + (-6+4i)z + 4$

raten: $P(0) = 4$; $P(1) = \cancel{2i} + \cancel{2} \cancel{-6i} \cancel{-6} \cancel{+4i} \cancel{+4} = 0 \Rightarrow \underline{z_1 = 1}$

$P(2) = \cancel{16i} + \cancel{8} \cancel{-24i} \cancel{-12} \cancel{+8i} \cancel{+4} = 0 \Rightarrow \underline{z_2 = 2}$

statt weiterzuraten: laut Fund.-Satz $P(z) = 2i(z-1)(z-2)(z-z_3)$

$z=0$: $4 = 2i(-1)(-2)(-z_3) = -4iz_3$ noch unbekannt

$\Leftrightarrow \underline{z_3 = i}$

→ weitere Bsp in Übung

6.3 Komplexe Funktionen

(hier: das Wichtigste ; (viel) mehr: Analysis / Funktionentheorie

→ übertrage alle Def's für Folgen, Reihen, Konvergenz von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$; z.B. :

Eine komplexe Potenzreihe $\sum_{k=0}^{n} c_k \frac{z^k}{k!}$ $(c_k, z \in \mathbb{C})$

konvergiert für $n \to \infty$ gegen einen Grenzwert aus $\mathbb{C}$,

wenn $|z| < \lim_{k \to \infty} \frac{k\,\tilde{c}_{k-1}}{\tilde{c}_k}$ wobei: $\underset{\in \mathbb{R}^+}{\tilde{c}_k} \geq |\underset{\in \mathbb{C}}{c_k}|$

Bsp $$\sum_{k=0}^{n} z^k = \begin{cases} \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} & \text{für } z \in \mathbb{C}\setminus\{1\} \\ n+1 & \text{für } z = 1 \end{cases}$$

hier ist $c_k = k!$,

also folgt mit $\tilde{c}_k := c_k$: $\dfrac{k\,\tilde{c}_{k-1}}{\tilde{c}_k} = \dfrac{k(k-1)!}{k!} = 1$,

also $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ falls $|z| < 1$

Für komplexe Funktionen (d.h. Abb. $f: A \to B$ mit $A, B \subset \mathbb{C}$; $z \mapsto f(z)$)

können ebenfalls die (ε-δ-) Def's von Stetigkeit, Ableitung aus den reellen übernommen werden;

→ insbesondere gelten weiterhin alle Ableitungsregeln

→ geometrische Veranschaulichung der Def's oft nicht mehr möglich/sinnvoll

Bsp $\exp(z) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ konvergent $\forall\, z \in \mathbb{C}$

$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \cdot \exp(z_2)$ gilt $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (Beweis genau wie in ÜR)

→ die "hyperbolischen" Funktionen erfüllen auch alles wie in $\mathbb{R}$:

$$\cosh(z) := \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sinh(z) := \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!}$$

→ Für Potenzreihen mit reellen Koeff's, d.h. $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{z^k}{k!}$, $c_k \in \mathbb{R}$

folgt wieder $[f(z)]^* = f(z^*)$ ((vgl. reelle Polynome, S.54))

Bsp $[\exp(z)]^* = \exp(z^*)$ etc.

→ konvergente komplexe Potenzreihen sind beliebig oft (stetig) diff'bar,

und zwar gliedweise: $f^{(n)}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_{k+n} \frac{z^k}{k!}$

Bsp $\dfrac{d}{dz} \exp(z) = \exp(z)$; $\dfrac{d}{dz} \cosh(z) = \sinh(z)$ etc.

wichtigste Unterschiede zu reellen Funktionen:

((alle Beweise ⇒ Analysis-Vorlesung, Funktionentheorie))

- $f(z)$ diff'bar ⇒ sogar beliebig oft diff'bar
- Eigenschaften, welche Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ $(<,>,=)$ brauchen, sind nicht übertragbar.

  z.B. Monotonie, Extrema, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz
- Def von Integration muss abgeändert werden:

  haben in $\mathbb{C}$ kein "oben"/"unten", also keine "Fläche unter dem Graphen"

wichtig für die Physik sind komplexwertige Fkt'n mit reellem Argument,

d.h. $f: \begin{array}{l} A \to B \\ x \mapsto f(x) \end{array}$, $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{C}$

also ist f von der Form $f(x) = u(x) + i v(x)$,

$$u: \begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto u(x) \end{array} \; ; \quad v: \begin{array}{l} A \to \mathbb{R} \\ x \mapsto v(x) \end{array}$$

und $u(x) = \mathrm{Re}(f(x))$, $v(x) = \mathrm{Im}(f(x))$ sind zwei ganz normale reelle Fkt'n.

⇒ geometr. Veranschaulichung, Kurvendiskussion, Zwischenwertsatz, Mittelwertsatz und insbesondere Integration wie üblich:

$$\int_a^b dx\, f(x) := \int_a^b dx\, u(x) + i \int_a^b dx\, v(x) =$$  $+\, i$ 

können also rechnen wie gewohnt, insbes. gilt Hauptsatz

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) \quad , \text{ falls } f(x) \text{ stetig und } F'(x) = f(x)$$

$$\left(\left(\Leftrightarrow u(x), v(x) \text{ stetig und } F(x) = U(x) + iV(x) \text{ mit } U'(x) = u(x),\ V'(x) = v(x) \right)\right)$$

(hier noch $\exp(z)$; $= e^z$ erst in Kap. 6.6)

Bsp $$\int_{-a}^{a} dx\, i \exp(ix) = \int_{-a}^{a} dx\, \frac{d}{dx}\left[\exp(ix)\right] = \left[\exp(ix)\right]_{-a}^{a} = \exp(ia) - \exp(-ia) = 2 \sinh(ia)$$

Bsp $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!} \quad , \; c_k = a_n + i b_n \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx\, f(x) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k!}\right]_a^b + i \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} \frac{x^k}{k!}\right]_a^b$$

Bsp $$\left[\int_a^b dx\, f(x)\right]^* = \int_a^b dx\, u(x) - i \int_a^b dx\, v(x) = \int_a^b dx\, f^*(x)$$