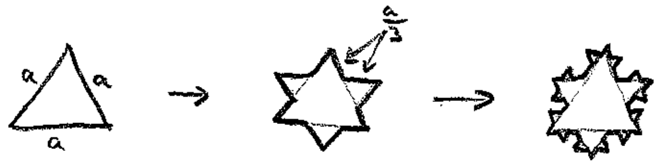
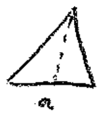
Bsp (geom. Reihe) Koch'sche Schneeflocke

Konstruktionsvorschrift

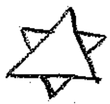


Frage: Flächeninhalt = ?

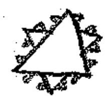


$$F(a) = \frac{a}{2}\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}} = \frac{a^2}{4}\sqrt{4-1} = a^2\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$F_0 = F(a)$$



$$F_1 = F_0 + 3\cdot F\left(\frac{a}{3}\right)$$



$$F_2 = F_1 + 3\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3}\right)$$

$$F_3 = F_2 + 3\cdot 4\cdot 4\cdot F\left(\frac{a}{3\cdot 3\cdot 3}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_n = F_{n-1} + 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$\vdots$$

$$F_\infty = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot F\left(\frac{a}{3^n}\right)$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} 3\cdot 4^{n-1}\cdot\frac{a^2}{3^{2n}}\,\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\Bigg(1+\frac{3}{4}\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n}\Bigg)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n - 1$$ geom. Reihe! (S.42) $\left(\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\right.$

$$= \frac{1}{1-\frac{4}{9}} - 1 = \frac{4}{5}$$

$$= a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{8}{5} = a^2\,\frac{2\sqrt{3}}{5}$$

Frage: Umfang = ?

$$U_0 = 3a$$

$$U_1 = \frac{4}{3}U_0$$

$$U_2 = \frac{4}{3}U_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 U_0$$

$$\vdots$$

$$U_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n U_0 \quad\Rightarrow\quad U_\infty = \infty\ !$$

6. Komplexe Zahlen

Warum? $\rightarrow$ $\mathbb{R}$ abgeschlossen bzgl. $+, -, \cdot, \div$

aber nicht bzgl. Wurzelziehen aus neg. Zahlen:

$x^2 = -1$ für $x \in \mathbb{R}$ nicht lösbar ($x \cdot x \geq 0$ in $\mathbb{R}$)

also $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$

bzw. Polynom $P(x) = x^2 + 1$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ (NS)

allgemein:
- $b^q \notin \mathbb{R}$ falls $b < 0$, $q \notin \mathbb{Z}$
- nicht jedes Polynom $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ hat NS in $\mathbb{R}$

$\rightarrow$ komplexe Zahlen beheben beide "Defizite"

$\rightarrow$ " vereinfachen viele Rechnungen

$\rightarrow$ " machen viele Zusammenhänge klarer

6.1 Grundlagen

Def. $i := \sqrt{-1}$ imaginäre Einheit (s.o.: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$ und $i \notin \mathbb{R}$)

Def. $\mathbb{C} := \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$ komplexe Zahlen

$\rightarrow$ jede Zahl $z \in \mathbb{C}$ lässt sich als $z = a + ib$ schreiben, mit eindeutigen $a, b \in \mathbb{R}$

(d.h. falls $z_1 = z_2$, $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$

$\rightarrow$ Bezeichnung:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{"Realteil von } z\text{"}: & a = \mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R} \\ \text{"Imaginärteil von } z\text{"}: & b = \mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \quad \underline{z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)}$$

$\rightarrow$ Rechnen in $\mathbb{C}$ per Rechenregeln in $\mathbb{R}$; und $i^2 = -1$ setzen

Bsp $z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

Bsp $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 i b_2 + i b_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Bsp sei $z = a+ib \neq 0$ (d.h. $a \neq 0$ und/oder $b \neq 0$, also $a^2+b^2 \neq 0$)

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib}\,\frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\,\frac{(-b)}{a^2+b^2}$$

((Test: $z^{-1}\cdot z = \frac{a-ib}{a^2+b^2}\cdot(a+ib) = \frac{a^2-(ib)^2}{a^2+b^2} = 1$ ✓))

Bsp $i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1, \ldots \Rightarrow i^{n+4} = i^n$

$i^{-1} = -i,\ i^{-2} = -1,\ i^{-3} = i,\ i^{-4} = 1, \ldots$

→ da alle Rechenregeln wie in $\mathbb{R}$, gilt z.B. auch

$$(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{(binomische Formel)}$$

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \sum_{k=0}^{n} z^k \quad \forall z \neq 1,\ n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{(geom. Reihe)}$$

etc.

→ Bezeichnung: $\mathrm{Im}(z) = 0 \Rightarrow z = a + i\cdot 0 \in \mathbb{R}$ heisst "(rein) reelle Zahl" ((also $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$))

$\mathrm{Re}(z) = 0 \Rightarrow z = 0 + ib$ heisst "(rein) imaginäre Zahl"

Def. $z^* := a - ib$ heisst die zu $z = a+ib$ (komplex) konjugierte Zahl

((manchmal auch als $\bar{z}$ geschrieben))

Bsp

$$z + z^* = a+ib+a-ib = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = \frac{z+z^*}{2}$$

$$z - z^* = a+ib-(a-ib) = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z) \Rightarrow \mathrm{Im}(z) = \frac{z-z^*}{2i}$$

$$z\cdot z^* = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2+b^2 \Rightarrow z^{-1} = \frac{z^*}{z\cdot z^*}$$

Bem.: Die "Ordnungsstruktur" von $\mathbb{R}$ (d.h. für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer entweder $a<b$, oder $a>b$, oder $a=b$) macht auf $\mathbb{C}$ keinen Sinn mehr

→ definiere daher Betragsfunktion auf $\mathbb{C}$ als

$$|\,|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+,\quad z \mapsto |z| := \sqrt{z\cdot z^*} = \sqrt{\underbrace{\underbrace{[\mathrm{Re}(z)]^2}_{\mathbb{R}_0^+} + \underbrace{[\mathrm{Im}(z)]^2}_{\mathbb{R}_0^+}}_{\mathbb{R}_0^+}}$$

⇒ Eigenschaften wie in $\mathbb{R}$, s. Ü52, Ü53