((Bem: warum nicht gleich Taylor? → oft unrentabel!

Bsp $f = \frac{\ln(1+\sinh(x))}{\cosh(x) + x^2}$ → $f'' \sim$ halbe Seite ...

aber: $= \frac{\ln(1+x+0\cdot x^2+\dots)}{1+0\cdot x+\dots+x^2} = \frac{x+0\cdot x^2+\dots-\frac{1}{2}(x+0\cdot x+\dots)^2+\dots}{1+0\cdot x+\dots} = x - \frac{1}{2}x^2 + \dots$))

Bsp $f = (1+x)^\lambda$, $f' = \lambda(1+x)^{\lambda-1}$, $f'' = \lambda(\lambda-1)(1+x)^{\lambda-2}$, ...

$\overset{\text{Taylor}}{\Rightarrow}$ $\underbrace{(1+x)^\lambda}_{\text{oft gebraucht}} = 1 + \lambda x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}x^2 + \dots$ ((vgl. Ü 43a))

Bem: kann $f(x)$ auch "um $x = x_0$ entwickeln" ((bisher: $x_0 = 0$))

$g(x) := f(x+x_0)$

falls $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} x^n$

$\Rightarrow \underline{f(x)} = g(x-x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!}(x-x_0)^n \overset{\uparrow}{=} \underline{\underline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}}$

(($g'(x) = f'(x+x_0)$, $g''(x) = f''(x+x_0)$, ..., $g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x+x_0)$))

Konvergenz der Potenzreihen / Taylorreihen?

→ oft nützlich: geom. Reihe als "Majorante" (vgl. Kap 1.4, S.16)

$\Rightarrow \sum_k a_k$ ist konvergent, falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q < 1$ "Quotienten-
divergent ≥ 1 kriterium"

((denn: falls $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|, \left|\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\right|, \dots \le q \Rightarrow |a_{n+k}| \le q|a_{n+k-1}| \le \dots \le q^k|a_n|$,
daher ist die geom. Reihe $\sum_n q^n$ (kvgt. für $|q|<1$) eine Majorante))

→ konvergiert $\sum_n c_n x^n$? $\Rightarrow$ untersuche ob $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_n x^n}\right| < 1$

$\Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \equiv$ "Konvergenzradius"

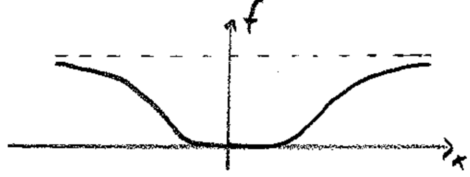
→ konvergiert $\sum_n \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$? $\Rightarrow$ untersuche ob $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f^{(n+1)}(0)\,x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{f^{(n)}(0)\,x^n}\right| < 1$

$\Leftrightarrow |x| < \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n f^{(n-1)}(0)}{f^{(n)}(0)}\right| =$ "Konvergenzradius"

Für $|x| <$ "Konvergenzradius R" ist die Konvergenz also garantiert.
Für andere x ($x = \pm R$) kann die Reihe auch konvergieren; muss man zeigen.

Wogegen konvergieren diese Potenzreihen / Taylorreihen ?

Bsp (als Warnung) $f(x) = e^{-1/x^2}$



$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, $f'(0) = 0$

$f''(x) = (\ldots) e^{-1/x^2}$, $f''(0) = 0$; ... ; $f^{(n)}(0) = 0$

Taylor $= 0 + 0 + 0 + \ldots \neq f(x)$

Grund : $x = 0$ ist "pathologische" Stelle
("wesentliche Singularität")

→ bei solchen (sehr exotischen) Ausnahmen ist in der Regel sofort klar, dass Potenzreihe stark von $f(x)$ abweicht.

→ meist: falls Taylorreihe existiert
(d.h. f beliebig oft diff'bar und Reihe konvergent)
dann ist sie gleich $f(x)$

Wie schnell konvergieren die Reihen gegen $f(x)$?

Würde gern jedes $f = \text{Polynom}_m + \text{Rest}_m$ schreiben, wobei Rest "klein" ist.

$$= \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \mathcal{O}(x^{m+1})$$

↑ "Ordnung" : weggelassene Terme haben mindestens $m+1$ Faktoren x

Bsp zur Notation:

$$(1+x)^\lambda = 1 + \lambda x + \mathcal{O}(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \mathcal{O}(x^5)$$

$$(1 + \lambda x + \mathcal{O}(x^2)) \cdot (1 + x + \mathcal{O}(x^2)) = 1 + (\lambda + 1) x + \mathcal{O}(x^2)$$

Wie groß ist aber der "Fehler" in $f \approx \text{Polynom}_m$?

→ müssen die Größe des "Restgliedes" $\text{Rest}_m = f - \text{Polynom}_m$ abschätzen.
dazu dient der

Satz von Taylor

Sei $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x $(m+1)$ mal stetig diff'bar.

Dann gibt es ein y zwischen x_0 und x mit

$$f(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{=: f_m(x) \text{ Taylor-Polynom}} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(y)}{(m+1)!}(x-x_0)^{m+1}}_{= f(x)-f_m(x) =: R_m(x) \text{ Restglied}}$$

Bem.: $n=0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) + f'(y)(x-x_0)$

$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(y)$ Mittelwertsatz ! ((vgl. Kap. 3.3)) 5.30

$\Rightarrow$ Taylor-Entwicklung ist Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes

((Beweis: wissen aus Kap. 4.5, dass die Behauptung wahr ist für

$$R_m(x) = \int_{x_0}^{x} dt \, \frac{(x-t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) \quad . \quad \text{(via vollst. Induktion)}$$

Falls $x \geq x_0$: sei t_{max} das Maximum von $f^{(m+1)}(t)$ auf $[x_0, x]$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{x_0}^{x} dt \, \frac{(x-t)^m}{m!}}_{= \left[-\frac{1}{m!}\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1}\right]_{x_0}^{x} = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!}} f^{(m+1)}(t_{max}) = \frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{max}) \geq R_m(x)$$

analog zeigt man: $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(t_{min}) \leq R_m(x)$

$\Rightarrow$ (Zwischenwertsatz): da $f^{(m+1)}$ stetig, existiert

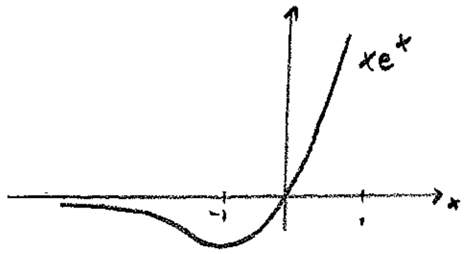
ein $y \in [x_0, x]$ mit $\frac{(x-x_0)^{m+1}}{(m+1)!} \cdot f^{(m+1)}(y) = R_m(x)$

Falls $x < x_0$: analog

qed))

Bsp

$$f(x) = x e^x$$
$$f'(x) = x e^x + e^x$$
$$f''(x) = x e^x + 2e^x$$
$$\vdots \quad \text{(vollst. Ind.)}$$
$$f^{(n)}(x) = x e^x + n e^x$$



$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = n \quad , \qquad f^{(n)}(-1) = -\frac{1}{e} + \frac{n}{e}$$

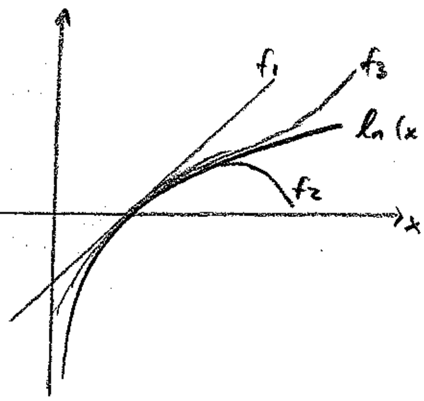
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n = 0 + x + x^2 + \frac{x^3}{2} + O(x^4)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n-1}{e \cdot n!} (x+1)^n = -\frac{1}{e} + 0 \cdot (x+1) + \frac{(x+1)^2}{2e} + \frac{(x+1)^3}{3e} + O((x+1)^4)$$

→ Mathematica : Manipulate[...] zeigt Güte der Näherung.

Bsp

$$f(x) = \ln(x) \ , \quad x \in \mathbb{R}^+$$
$$f'(x) = x^{-1}$$
$$f''(x) = (-1)\, x^{-2}$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)\, x^{-3}$$
$$\vdots \quad \text{(vollst. Ind.)}$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} (n-1)!\, x^{-n}$$



$\Rightarrow$ Entwicklung um $x_0 = 1$: $\quad f^{(0)}(x_0) = \ln(1) = 0$

$$f^{(n)}(x_0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad \text{für } n \geq 1$$

$$\ln(x) = \ln\big(1 + \underbrace{(x-1)}_{=:\, z \to x}\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$$

(vgl. S. 45)

$$\Leftrightarrow \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5)$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + R_m(x) =: f_m(x) + R_m(x)$$

Restglied $\displaystyle R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(y)}{(m+1)!} x^{m+1} = \frac{(-1)^m m!}{(m+1)!} \frac{x^{m+1}}{y^{m+1}} = \frac{(-1)^m}{m+1} \frac{x^{m+1}}{(1+\vartheta x)^{m+1}}$

$y \in [1, 1+x]$ $\qquad \vartheta \in [0,1]$

Konvergenz? $\displaystyle |x| < \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{n} \right| = 1$

(Taschenrechner macht's im Prinzip auch so!) → aber z.B. $\displaystyle \ln(2) = -\ln(2^{-1}) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{64} + \ldots$

$= 0.693 \ldots$

$\quad \to 0.5 \quad \to 0.625 \quad \to 0.6\overline{6} \quad \to 0.682$