Bsp $$\int_0^\beta dx\,\sqrt{x} = \int_0^\beta dx\,\frac{d}{dx}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right] = \frac{2}{3}\beta^{3/2} - 0$$

OK für $\beta \in\,]0,\infty[$

aber für $\beta \to \infty$ divergent "gegen $+\infty$"

Schreibweise: $\int_0^\infty dx\,\sqrt{x} = \infty$

4.5 Vorbereitung auf Taylor

Falls $f(t)$ für alle t zwischen x_0 und x $(n+1)$-mal stetig diff'bar, gilt:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}$$

Beweis: durch vollständige Induktion

Ind.-Anfang: $n=0$: $$\sum_{k=0}^{0}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\frac{f'(t)}{0!}(x-t)^0$$
$$= \frac{f(x_0)}{0!}\cdot 1 + \left[f(t)\right]_{x_0}^{x} = f(x_0) + f(x) - f(x_0) = f(x) \checkmark$$

Ind.-Annahme: Formel stimmt bis $n-1$

Zu zeigen: Formel stimmt für n

$$\Leftrightarrow f(x) \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{\overset{!}{=}\frac{d}{dt}u(t)}\,\underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{\overset{!}{=}v(t)}, \quad u(t) = f^{(n)}(t),\ \dot{v} = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\overset{PI}{=} \underbrace{\left[f^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x}}_{\overset{!}{=} f^{(n)}(x)\frac{0^n}{n!} - f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = -\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n} + \int_{x_0}^{x} dt\, f^{(n)}(t)\,\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} dt\,\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$

$= f(x)$ laut Annahme $\qquad$ qed

5. Potenzreihen - Entwicklungen

Kernidee: Polynome $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n \nearrow \infty \Rightarrow \text{Potenzreihe}} a_k x^k$ sind einfach

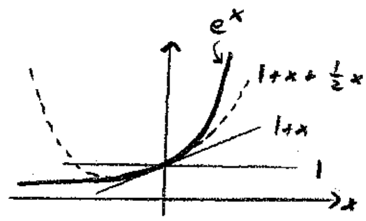
(Werte berechnen ✓ Differenzieren ✓ Integrieren ✓)

→ Approximation einer "beliebigen" Fkt. durch Polynome möglich?

[Antwort: JA, das geht sehr oft]

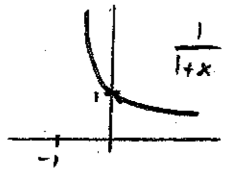
→ kennen schon ein Bsp:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$



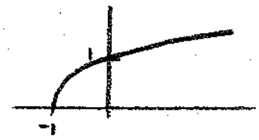
⇒ geht das auch für andere Fkt'n? $\boxed{f(x) \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n}$

sicher auch bei



$\frac{1}{1+x} = 1 - x +$ [redacted] $x^2 + \dots$

oder



$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x -$ [redacted] $x^2 + \dots$

Wenn $f = \Sigma$, dann: "habe $f(x)$ um $x=0$ entwickelt"

- funktioniert das immer? → fast; bei Physikern Funktionen ✓
  aber oft nur für $|x| <$ Konvergenzradius
- wann nicht? → an "pathologischen" Stellen (Sprünge, Knicke, Pole, ...)
  entwickle nicht $|x|, \frac{1}{x}, e^{-1/x^2}$ um $x=0$
- wozu? → können x^n gut differenzieren und integrieren
  → kann Grenzfälle ansehen, Resultate diskutieren...
  → kenne f nicht, habe nur Gln für f
  setze $f = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$ an
  und bestimme $c_0, c_1, c_2, \dots$ aus den Gln.

Bsp $f = 1 + xf$ "Differentialgleichung nullter Ordnung"

hat die Lsg $f = \frac{1}{1-x}$ und führt zur Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+1}$$, setze $m = n-1$

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n$$

$\Rightarrow$ Lsg: $c_0 = 1$ und $c_n = c_{n-1}$ $\forall n \geq 1$ $\Rightarrow$ alle $c_n = 1$

also $$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{geometrische Reihe}, \quad |x| < 1}$$

((wiederentdeckt; vgl. Kap. 1.4))

$\rightarrow$ wie bekommt man die Koeffizienten c_n systematisch?

Umgang mit Potenzreihen-Entwicklungen ("Tricktiste", Verfahrensweisen)

- Abspalten ((hier: Bsp v. oben nochmal; Annahme: $\frac{1}{1-x}$ ist wilde Fkt))

Bsp $$\frac{1}{1-x} = 1 + \left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = 1 + x \cdot \frac{1}{1-x}$$

$$= 1 + x \cdot \left[1 + x \cdot \frac{1}{1-x}\right]$$

$$= \underbrace{1 + x + x^2 + \dots + x^N}_{= \frac{1-x^{N+1}}{1-x}} + \frac{x^{N+1}}{1-x}$$

(vgl. Üa)

- algebraische Umformung

Bsp $$\sqrt{1+x} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+x = 1 + 2c_1 x + (c_1^2 + 2c_2)x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \dots$$

- aus Ableitung ("Int. einer Reihe")

Bsp $$\frac{d}{dx}\left[-\ln(1-x)\right] = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow \quad -\ln(1-x) = C + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$x = 0$: $\quad -\ln(1) = C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$\Rightarrow \quad -\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

- aus Stammfunktion ("Diff. einer Reihe")

  Bsp $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{d}{dx}\left[2\sqrt{1+x}\right] = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$

- Addition von Reihen

  Bsp $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = [e^x]_{\text{gerader Anteil}}$

  $= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

  Bsp $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = [e^x]_{\text{ungerader Anteil}}$

  $= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$ ((oder aus Stammfkt: $\sinh = \frac{d}{dx}[\cosh] = \dots$))

  Bsp $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = [\ln(1+x)]_{\text{ungerader Anteil}}$

  $= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$

- aus (Differential-) Gleichungen

  Bsp Reihe von $f(x) = 3e^{2x}$ aus $f'(x) = 2f(x)$, $f(0) = 3$:

  $$(3 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)' = 2(3 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$$

  $$c_1 + 2c_2 x + \dots = 6 + 2c_1 x + \dots \quad \Rightarrow c_1 = 6,\ c_2 = c_1$$

  $$\Rightarrow 3e^{2x} = 3 + 6x + 6x^2 + \dots$$

- aus Multiplikation / Division von Reihen

  Bsp $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)$

  $\Leftrightarrow$ (sinh-Reihe) $= (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots)\cdot$(cosh-Reihe)

  ausmultiplizieren $\Rightarrow c_0, c_1, \dots$

- aus $f(f^{-1}(x)) = x$

- Taylor-Reihe

  $$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

  $$f(0) = c_0 \ ; \ f'(0) = c_1 \ ; \ f''(0) = 2c_2 \ ; \ f'''(0) = 2\cdot 3\, c_3 \ ; \ \dots$$

  $$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$