

als $f(x(t))$ (Substitution)

$x = x(t)$ sei diff'bar und bijektiv ($\Rightarrow$ dann ex. Umkehrfkt $t = t(x)$)
also $x(t(a)) = a$ etc.

$$\int_a^b dx f(x) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{dx}{dt} f(x(t))$$

((Beweis: $\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)$, mit $F'(x) = f(x)$))

$$= F(x(t(b))) - F(x(t(a)))$$

$$= \left[F(x(t)) \right]_{t(a)}^{t(b)} \quad (\text{Kettenregel})$$

$$= \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{d}{dt} F(x(t)) = \int_{t(a)}^{t(b)} dt \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dF}{dx} \quad (= f) \quad \text{qed}))$$

$\rightarrow$ "Substitution ist Umkehrung der Kettenregel"

Bsp $\int_a^b dx \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = ?$ Substitution: $x(t) = \sinh(t)$
Umkehrung $\Leftrightarrow t(x) = \sinh^{-1}(x) = \operatorname{arsinh}(x)$

(benutze $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$) $\rightarrow$

$$= \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt \cosh(t) \frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2(t)}}$$

$$= \int_{\operatorname{arsinh}(a)}^{\operatorname{arsinh}(b)} dt \cdot 1$$

$$= \operatorname{arsinh}(b) - \operatorname{arsinh}(a)$$

(($\Rightarrow \operatorname{arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ als Nebenresultat))

((daher: $\sinh(\operatorname{arsinh}(x)) = x$ nach x ableiten

$$\Rightarrow \sinh'(\operatorname{arsinh}(x)) \cdot \operatorname{arsinh}'(x) = 1$$

$$= \cosh(\operatorname{arsinh}(x)) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arsinh}(x))} = \sqrt{1+x^2} \quad \text{qed}))$$

Bsp $\int_0^1 dx 2x \ln(x) = ?$ Subst. $x = e^{-t}$
 $\Leftrightarrow t = -\ln(x)$

((vgl. PI, S.39))

$$= \int_{-\infty}^0 dt e^t 2e^t t$$

$t \rightarrow -t/2$ (Störungs-Trick, $\lambda = -\frac{1}{2}$)

$$= -\frac{1}{2} \int_{\infty}^0 dt 2(-\frac{t}{2}) e^{-t} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} dt t e^{-t}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad \checkmark \quad = 1, \text{ via PI, s. Bsp S.39}$$

Bsp $\int_0^{\infty} dx e^{-x} = \int_0^1 dt (-\frac{1}{t}) t = \int_0^1 dt = 1$
 $\stackrel{!}{=} t, x = -\ln(t)$

... als $\frac{d}{d\alpha}$ von ... (Differenziation nach Parameter)

$$\begin{aligned} \text{Bsp } \int_0^\infty dx x^n e^{-x} &= \left(-\frac{d}{d\alpha} \right)^n \int_0^\infty dx e^{-\alpha x} \Big|_{\alpha=1} \\ (n \in \mathbb{N}) &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty dx e^{-x} = \frac{1}{\alpha} \\ &\left[\left(-\frac{d}{d\alpha} \right) \frac{1}{\alpha} = +\frac{1}{\alpha^2} ; \left(-\frac{d}{d\alpha} \right) \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{\alpha^3} ; \dots ; \left(-\frac{d}{d\alpha} \right)^n \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \right] \\ &= \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \Big|_{\alpha=1} = n! \end{aligned}$$

... als Parameter-abhängig

$$\begin{aligned} \text{Bsp } -\beta \frac{d}{d\beta} \ln \left(\int_0^\infty dx \frac{x}{e^{\beta x} + 1} \right) &\stackrel{x \rightarrow \frac{x}{\beta}}{=} -\beta \frac{d}{d\beta} \ln \left(\frac{1}{\beta^2} \int_0^\infty dx \frac{x}{e^x + 1} \right) \\ &= -\beta \frac{d}{d\beta} \left[-2 \ln(\beta) + \ln \left(\int_0^\infty \dots \right) \right] \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{= \text{const}} \\ &= -\beta \left[-2 \frac{1}{\beta} + 0 \right] = 2 \end{aligned}$$

→ Was tun, wenn gar nichts hilft?

- Integral "analog" auswerten: Fläche aussagen + wiegen
- weitere Integraltabellen wälzen (s. Bibliothek), z.B.
 - Abromowitz / Stegun (enthält auch viele spezielle Funktionen)
 - Gröbner / Hofreiter (gibt nicht nur Ergebnisse, sondern auch Lösungs-Weg.)
- per Computer auswerten
 - analytisch (Mathematica: Integrate[f[x], x]; Maple; ...)
 - numerisch (Matlab: NIntegrate[f[x], {x, 0, 1}]; ...)
- Integral näherungsweise ausrechnen
 - finde integrierbare Fkt'n $f_{\pm}$ mit $f_+(x) \geq f(x) \geq f_-(x)$
 - $\int_a^b dx f_+(x) \geq \int_a^b dx f(x) \geq \int_a^b dx f_-(x) \quad (a \leq b)$
 - (s. auch Riemann- / Taylor-Entwicklung, später in Kap. 5)
- das Integral als neue spezielle Funktion (mit ihrem Namen?!) definieren ...

4.4 Uneigentliche Integrale

(sind eigentlich eigentliche,
vgl. Bsp. 5.40 unten)

→ haben bisher auf $[a, b]$ stetige $f(x)$ betrachtet

→ kann man Def. von $\int_a^b dx f(x)$ sinnvoll erweitern auf Fälle, wo

• $f(x)$ für $x \rightarrow b$ divergiert?

(d.h. bei $x=b$ nicht def. ist)



• $b \rightarrow \infty$ geht? $\int_a^{\infty} f(x) dx$ ($b \rightarrow \infty$)



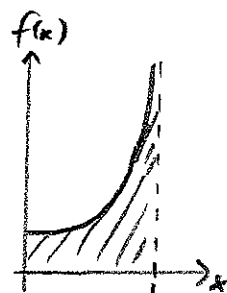
Ja: Falls $f(x) \forall \beta \in [a, b[$ auf $[a, \beta]$ integrierbar ist
und $\int_a^{\beta} dx f(x)$ für $\beta \rightarrow b$ konvergiert, dann heißt

$$\int_a^b dx f(x) := \lim_{\beta \rightarrow b} \int_a^{\beta} dx f(x) \quad \text{uneigentliches Integral (von } f \text{ auf } [a, b])$$

Bem. $b \in \mathbb{R}$ oder $b = +\infty$ OK

Bem. analog für $a \rightarrow -\infty$; oder beide gleichzeitig

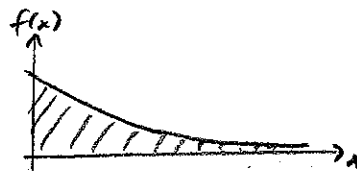
$$\begin{aligned} \text{Bsp} \quad \int_0^{\beta} dx \frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \int_0^{\beta} dx \frac{d}{dx} [-2\sqrt{1-x}] \\ &\quad \text{denn } \frac{d}{dx} [-2\sqrt{1-x}] = +2 \cdot \frac{1}{2} (1-x)^{-1/2} \\ &= -2\sqrt{1-\beta} + 2\sqrt{1-0} \end{aligned}$$



harmlos für $\beta \in]0, 1[$; limit. für $\beta \rightarrow 1$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 2, \quad \text{obwohl } f(x) \text{ bei } x=1 \text{ nicht definiert ist!}$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp} \quad \int_0^{\beta} dx e^{-x} &= \int_0^{\beta} dx \frac{d}{dx} [-e^{-x}] \\ &\quad \text{denn } \frac{d}{dx} [-e^{-x}] = +e^{-x} \\ &= -e^{-\beta} + e^0 = 1 - e^{-\beta} \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \int_0^{\infty} dx e^{-x} = 1$$

OK für $\beta \in]0, \infty[$; limit für $\beta \rightarrow \infty$

$$\text{Bsp} \quad \operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy e^{-y^2} \quad \text{OK } \forall x > 0; \text{ limit für } x \rightarrow \infty \text{ (gegen 1)}$$

(Beweis: Analysis I)

$$\Rightarrow \operatorname{erf}(\infty) = 1, \quad \operatorname{erf}(-\infty) = -1$$

(endlich einmal zeichnen: ungerade,

