

⇒ Kennt man zu $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$,
 d.h. eine Lösung der (Differential-) Gleichung $F'(x) = f(x)$,
 dann ist also $\frac{d}{db} \left(\int_a^b dx f(x) \right) = \frac{d}{db} F(b)$

$$\Leftrightarrow \int_a^b dx f(x) = F(b) + C \quad (\text{Konstante})$$

$$b \rightarrow a: \quad 0 = F(a) + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b dx f(x) = F(b) - F(a)}$$

$$=: [F(x)]_a^b = F(x) \Big|_a^b \quad (\text{andere Schreibweisen})$$

Der Hauptsatz: falls $f(x)$ am Ort x_0 stetig ist,

dann ist $F(x) := \int_{x_0}^x dy f(y)$ am Ort x_0 diff'bar, mit $F'(x_0) = f(x_0)$

Bem.: • $F(x)$ Stammfkt $\Rightarrow F(x) + \text{const.}$ auch.

Die Menge aller Stammfkt. heißt $\int dx f(x)$ (unbestimmtes Integral)

• Hauptsatz hilft nur, falls man $f = \frac{d}{dx} F$ lösen kann
 (($f = \sin(x^2)$, $F = ???$))

• "Beweis": $\int_a^b dx \frac{F(x)}{dx} = F - \text{Zunahme ab } F(a)$

• Anwendungsmuster: $\int_a^b dx \text{ [?]} = \int_a^b dx \frac{d}{dx} [??] = []_a^b = []_{x=b} - []_{x=a}$

• Wunschtabelle $\frac{1}{1-x^2} = \frac{d}{dx} \text{artanh}(x)$ etc.

wenn jedoch (s. Branstern etc.) $\int \frac{1}{1-x^2} dx = \text{artanh}(x)$,
 dann lese dies als Tabelle ((nicht als Gltg: $C = ?!$))

• F in Tabelle gefunden

→ zitieren, z.B. [Branstern, Nr. 157]

→ Probe, also $\frac{d}{dx}$ (rhs) bilden ("right hand side")

• $\int_a^\infty dx f(x) := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b dx f(x)$ nennt man uneigentliches Integral

wenn endlich, dann: "es existiert"

Im Gegensatz zum Ableiten gibt es für das Integrieren kein "allgemeines Rezept" (s. jedoch § 4.3).

Daher verfährt man beim Anwenden des Hauptsatzes meist so:

Bsp $\int_0^b dx \operatorname{artanh}(x) = \int_0^b dx \frac{d}{dx} [?] \quad \text{"Stammfunktion"}$
 ($|b| \leq 1$)
 geeignete Kandidaten-Funktion für $[?]$?
 $\frac{d}{dx} x \cdot \operatorname{artanh}(x) = \operatorname{artanh}(x) + x \cdot \frac{1}{1-x^2} \quad \text{(nach Produktregel)}$
 $= \frac{d}{dx} (?)$
 $\frac{d}{dx} \ln(1-x^2) = \frac{-2x}{1-x^2} \quad \text{(mit Kettenregel)}$
 $\Rightarrow [?] = x \cdot \operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C \quad \text{irgendeine Konstante}$
 $= b \cdot \operatorname{artanh}(b) + \frac{1}{2} \ln(1-b^2) + C - (0 + 0 + C)$

Bsp $\int dx x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
 ($n \in \mathbb{N}$)
 denn $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = (n+1) \frac{x^{(n+1)-1}}{n+1} = x^n$

Bsp $\int dx x^\alpha = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \text{für } \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C & \text{für } \alpha = -1 \end{cases}$
 ($\alpha \in \mathbb{R}$)
 denn $\begin{cases} x > 0: \ln'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \\ x < 0: \ln'(-x) = \frac{-1}{-x} = x^{-1} \end{cases}$

Bsp $\int dx e^{\alpha x} = \int dx \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + C \right]$
 ($\alpha \neq 0$)
 denn $\left(\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} \right)' = e^{\alpha x}$

Bsp $\int dx \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!}, \quad \text{wobei } a_{k+1} := C \in \mathbb{R} \text{ beliebig}$

((Ann. $|x| < \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k b_{k+1}}{b_k}$ mit $|a_k| \leq b_k$, so dass Reihe konvergiert))

denn $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$

insbesondere: ist die Reihe (der Stammfkt.) wieder konvergent

4.3 Integrations-Verfahren

↳ gibt keine allg. Regeln;

eher: Erfahrung / Intuition / Rat / Ausprobieren... "Kunst"

→ Die meisten der (für die Physik) relevanten Integrale kann man in Integrations-Tabellen nachschlagen, z.B.

Bronstein (genügt meist; s. z.B. online-Link auf webpage)

Gradshteyn / Ryzhik (sehr umfangreich; s. z.B. Bibliothek)

→ "Differenzieren immer machbar; Integrieren nur in einigen Glücksfällen"

Manche "harmlos" aussehenden $f(x)$ besitzen zwar Stammfkt'n, diese lassen sich aber nicht durch "elementare" Funktionen (d.h. x^a , e^x , $\ln(x)$, ...) darstellen;

Bsp $\int dx e^{-x^2} = ?$ ($f(x) = e^{-x^2}$ stetig $\Rightarrow F(x)$ existiert!)

→ Einige besonders wichtige solcher Stammfunktionen haben deshalb eigene Namen bekommen (sog. "spezielle Funktionen")

Bsp $\text{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dy e^{-y^2}$ "error function"

↳ ist also diejenige Fkt., deren Ableitung $\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$ gilt
 $\uparrow$ (Gaussverteilung)

Zum Umformen/Vereinfachen von Integralen werden oft einige der folgenden Verfahren angewandt:

Man "erkennt", dass es Sinn macht, den Integranden $f(x)$ zu lesen...

... als Partialbruch

$$\begin{aligned} \text{Bsp } f &= \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) = \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \right) \end{aligned}$$

als $g' \cdot g^{n-1}$

$$f(x) = g'(x) \cdot g^n(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n+1} g^{n+1}(x) \right) \quad (\text{Kettenregel "rückwärts"})$$

$$\text{Bsp} \quad \int_a^b dx \frac{1}{x} \cdot \ln^n(x) \stackrel{g(x)=\ln(x)}{=} \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{n+1} \ln^{n+1}(x) \right) = \left[\frac{\ln^{n+1}(x)}{n+1} \right]_a^b$$

als g'/g

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx} \left(\ln |g(x)| \right) \quad (\text{Kettenregel "rückwärts"})$$

$$\text{Bsp} \quad \int_a^b dx \frac{3x^2}{1+x^3} \stackrel{g(x)=1+x^3, g'(x)=3x^2}{=} \int_a^b dx \frac{d}{dx} \left(\ln |1+x^3| \right) = \left[\ln |1+x^3| \right]_a^b$$

$$\text{Bsp} \quad \int_a^b dx \frac{1}{x \cdot \ln(x)} \stackrel{g(x)=\ln(x), g'(x)=\frac{1}{x}}{=} \left[\ln |\ln(x)| \right]_a^b$$

$$\text{Bsp} \quad \int_a^b dx \tanh(x) = \int_a^b dx \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \stackrel{g(x)=\cosh(x), g'=\sinh}{=} \left[\ln(\cosh(x)) \right]_a^b$$

als $u'v$ (partielle Integration, PI)

$$f(x) = u'(x) v(x) = \frac{d}{dx} (u(x) v(x)) - u(x) v'(x)$$

$$\text{Bsp} \quad \int_0^1 dx \underbrace{\frac{2x}{u'}}_{u=x^2} \cdot \underbrace{\ln(x)}_v = \left[x^2 \ln(x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx x^2 \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'=\frac{1}{x}} = 0 - 0 - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Bsp} \quad \int_0^\infty dx \underbrace{x}_{v'} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{u'} = \left[-x e^{-x} \right]_0^\infty - \int_0^\infty dx 1 \cdot (-e^{-x}) = 0 - 0 - 0 + 1 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp} \quad \int_a^b dx \underbrace{x^2}_v \cdot \underbrace{\sinh(x)}_{u'} &= \left[x^2 \cosh(x) \right]_a^b - \int_a^b dx \underbrace{2x}_v \cdot \underbrace{\cosh(x)}_{u'} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} v'=2x, u=\cosh \\ v=2, u=\sinh \end{array} \right) \\ &= \left[x^2 \cosh(x) - 2x \sinh(x) \right]_a^b + \int_a^b dx 2 \sinh(x) \\ &= \left[x^2 \cosh(x) - 2x \sinh(x) + 2 \cosh(x) \right]_a^b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Bsp} \quad \int_a^b dx \cosh^2(x) &= \left[\sinh(x) \cosh(x) \right]_a^b - \int_a^b dx \underbrace{\sinh^2(x)}_{\cosh^2-1} \\ &\quad \left(\begin{array}{l} u'=\cosh, v=\cosh \\ u=\sinh, v'=\sinh \end{array} \right) \\ &= \left[\sinh(x) \cosh(x) + x \right]_a^b - \int_a^b dx \cosh^2(x) \\ \Rightarrow \int_a^b dx \cosh^2(x) &= \left[\frac{\sinh(x) \cosh(x) + x}{2} \right]_a^b \quad \text{auf lhs bringen!} \end{aligned}$$