Auch Grenzwerte wie "$\frac{\infty}{\infty}$" oder "$0\cdot\infty$" etc per de l'Hospital:

Sei $\lim\limits_{x\to a} f(x)\to\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)\to\infty$ $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

((denn: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{1/g(x)}{1/f(x)} \overset{\text{(de l'Hosp.)}}{=} \lim\limits_{x\to a}\frac{\left(\frac{1}{g}\right)'}{\left(\frac{1}{f}\right)'} = \lim\limits_{x\to a}\frac{-g'/g^2}{-f'/f^2}$

$= \lim\limits_{x\to a}\frac{g'}{f'}\frac{f^2}{g^2}$ $\quad \Big| \cdot \frac{f'}{g'}\cdot\frac{g}{f}$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ✓))

$0\cdot\infty, \frac{\infty}{\infty}$ **Bsp** $(a>0)$ $\lim\limits_{x\to 0} x^a\cdot\ln(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{x^{-a}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-a\,x^{-a-1}} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^a}{a} = 0$

0^0 **Bsp** $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(x)} \overset{\text{obiges Bsp}}{=} e^0 = 1$

Auch das "a" in der Regel von de l'Hospital darf ∞ sein:

Sei entweder $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$

oder $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\to\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\to\infty$

$\Rightarrow$ dann gilt wieder $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

((denn: setze $y := \frac{1}{x}$, dann $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} \overset{\text{(de l'Hosp. + Kettenregel)}}{=} \lim\limits_{y\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}{g'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\cancel{\left(-\frac{1}{y^2}\right)}}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$))

Bsp in den Übungen (Ü28b) wurde gezeigt, dass

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^a}\to\infty$ für alle $a>0$

((z.B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}\to\infty$))

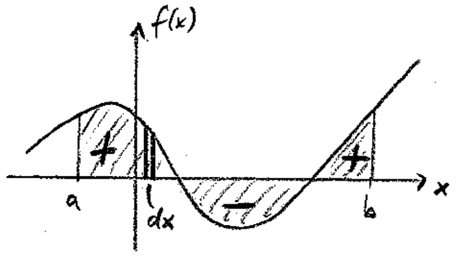
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^a}\to 0$ für alle $a>0$

((z.B. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1/x}{1} = 0$))

4. Integralrechnung in $\mathbb{R}$ [≈ Schulz §6.1]

↳ Für alle zentralen Begriffe (Konvergenz, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit) gibt es jeweils eine "strenge" (ε-δ..) Definition sowie eine geometrische Veranschaulichung;
bisher (K, S, D) beides gemacht;
hier (I) nur geometrisch-anschaulich

4.1 Das bestimmte Integral



die so gezählte Fläche zwischen Funktionsgraph und $[a,b]$ auf x-Achse heisst (bestimmtes) Integral

$$\begin{pmatrix}\text{Fläche}\\ \text{zw. } a,b\end{pmatrix} = \underbrace{\lim \sum}_{\int} (dx \cdot f(x)) =: \int_a^b dx\, f(x)$$

Bem.: x ist hier wieder ein "Laufindex", wie bei Summe $\left(\sum_{k=0}^n x_k = \sum_{m=0}^n x_m = \ldots\right)$,
also $\int_a^b dx\, f(x) = \int_a^b dy\, f(y) = \int_a^b d\xi\, f(\xi) = \ldots$

Bem.: für welche Funktion ist eine sinnvolle Definition solcher Flächen möglich?
((sicher nicht für z.B. (Dirichlet-Fkt) $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$,
denn Graph lässt sich nicht zeichnen; → Fläche ??))
→ sicher OK für stetige Funktionen
((sowie "stückweise stetige", wie z.B. 
(höchstens endlich viele Punkte unstetig, aber beschränkt))

→ ab jetzt nur noch solche $f(x)$ betrachten!
((Verallg. in Analysis-Vorl.: Riemann-, Lebesgue-Integral))

oft verwendete Schreibweise: $\int dx :=$ Integral über alle x $= \int_{-\infty}^{\infty} dx$

in Physik: Dimension $\left[\int_a^b dx\, f(x)\right] = [x]\cdot[f]$, $[a]=[b]=[x]$

$\int$-Auswertung = Umformung, bis es trivial ist (d.h. die Fläche geometrisch erhältlich ist)

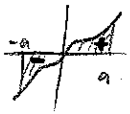
oder $f = \partial_x(\dots)$, s.u. "Hauptsatz"

Eigenschaften:
↳ (alle anschaulich klar!)

$$\int_b^a dx\, f := -\int_a^b dx\, f$$

$$\int_a^a dx\, f = 0$$

$$\int_a^b dx\, \mathrm{const}_x = (b-a)\cdot \mathrm{const}_x \qquad \left(\Rightarrow \int_a^{a+\varepsilon} dx\, f(x) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \varepsilon f(a)\right)$$



$$f \text{ ungerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 0$$

$$f \text{ gerade} \Rightarrow \int_{-a}^{a} dx\, f = 2\int_0^a dx\, f$$

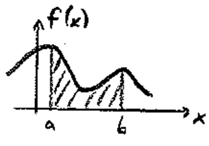
$$\int_a^b dx\,(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b dx\, f + \beta \int_a^b dx\, g$$

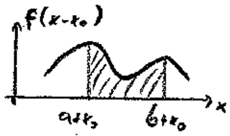
$$\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b = \int_a^c - \int_b^c$$

$$f(x) \le g(x)\ \forall x\in[a,b],\ a<b \Rightarrow \int_a^b dx\, f(x) \le \int_a^b dx\, g(x)$$

$$\left|\int_a^b dx\, f(x)\right| \le \int_a^b dx\, |f(x)|$$

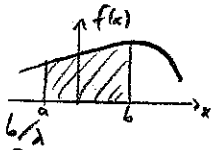
Tricks: Verschieben

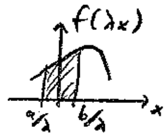




$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_{a+x_0}^{b+x_0} dx\, f(x-x_0) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l}\text{Grenzen} \to \text{Grenzen} + x_0 \\ f(x) \to f(x-x_0)\end{array}\right)\right)$$

Stauchen





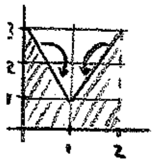
$$\int_a^b dx\, f(x) = \lambda \int_{a/\lambda}^{b/\lambda} dx\, f(\lambda x) \qquad \left(\left(\text{also } \begin{array}{l} x\to\lambda x,\ dx \to \lambda\, dx \\ \text{Grenzen} \to \text{Grenzen}/\lambda \end{array}\right)\right)$$

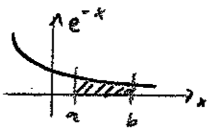
dimensionslos z.B. $\displaystyle\int_0^{t_1} dt\, v(t) = \int_0^{t_1} dt\, v_0 f(\omega t)$, Stauchen $t \to \frac{t}{\omega}$

$$= \frac{v_0}{\omega}\int_0^{\omega t} dt\, f(t)$$

<u>Bsp</u>

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^2 dx\, (2|x-1|+1) \qquad , \; x \to x+1 \\
&= \int_{-1}^1 dx\, (2|x|+1) \qquad , \; x \to \tfrac{1}{2}x \\
&= \tfrac{1}{2}\int_{-2}^2 dx\, (|x|+1) \qquad , \text{ gerade Fkt} \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot 2\int_0^2 dx\, (|x|+1) = \int_0^2 dx\,(x+1) \qquad , \; x \to x+1 \\
&= \int_{-1}^1 dx\, (x+2) \qquad , \; x \text{ ist ungerade Fkt} \\
&= 2\int_{-1}^1 dx = 2\cdot 2 = 4
\end{aligned}$$

((als <u>Check</u>: zeichnen  $f \to 2$, $I = 2\cdot 2 = 4$ ✓))

<u>Bsp</u> $\int$ aus Σ (Scheibchen) berechnen, z.B. 

$$\begin{aligned}
\int_a^b dx\, e^{-x} &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{b-a}{N}\, e^{-(a+n\frac{b-a}{N})} \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N}\, e^{-a} \underbrace{\sum_{n=0}^{N} \left(e^{-\frac{b-a}{N}}\right)^n}_{= \frac{1-e^{-\frac{b-a}{N}(N+1)}}{1-e^{-\frac{b-a}{N}}} = \frac{1-e^{-(b-a)}e^{-\frac{b-a}{N}}}{1-e^{-\frac{b-a}{N}}}} \qquad , \text{ vgl. (endl.) geom. Reihe, } \underline{\text{Ü 9a}} \\
&= e^{-a} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon\left(1-e^{-(b-a)}e^{-\varepsilon}\right)}{1-e^{-\varepsilon}} \qquad \text{mit } \varepsilon := \frac{b-a}{N}
\end{aligned}$$

Zähler: $(\ldots) \to (1-e^{-(b-a)})$; Rest: $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{1-e^{-\varepsilon}} \sim$ "$\frac{0}{0}$" de l'Hosp!

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{+e^{-\varepsilon}} \to 1$$

(hieraus folgt $\int_0^\infty dx\, e^{-x} = 1$) $\rightarrow$

$$\begin{aligned}
&= e^{-a}\left(1-e^{-(b-a)}\right) = e^{-a} - e^{-b} \\
&= \left[-e^{-x}\right]_{x=b} - \left[-e^{-x}\right]_{x=a} \qquad \text{((gilt das immer ?! s.a.))}
\end{aligned}$$

<u>4.2 Hauptsatz der Integralrechnung</u>

Berechne die Ableitung eines Integrals nach der <u>oberen</u> Grenze per Differenzenquotient:

$$\frac{d}{db}\left(\int_a^b dx\, f(x)\right) = \frac{\int_a^{b+\varepsilon} dx\, f(x) - \int_a^b dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{\int_b^{b+\varepsilon} dx\, f(x)}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \cdot f(b)}{\varepsilon} = f(b)$$