Bsp 2: Polynom $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$
ist auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar,
und es gilt $P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot k \cdot x^{k-1}$

Beweis: Summen- + Produktregel, und Bsp 1

Bsp 3: rationale Fkt. $R(x) := \frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q Polynome)
ist auf ihrem ganzen Definitionsbereich ($Q \neq 0$!) diff'bar,
und es gilt $R'(x) = \frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)}{Q^2(x)}$

Beweis: Quotientenregel, und Bsp. 2

((Bem: $\Rightarrow$ $P(x)$ und $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sind auf ihrem gesamten Def.-Bereich stetig
(dies war in Kap. 2.2, S. 19 dort, nur behauptet worden),
und beliebig oft (stetig) diff'bar.))

Für Potenzreihen, d.h. "unendliche Polynome" gilt:
Sei $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}$ und $|x| < \lim_{k\to\infty} \frac{k\, b_{k-1}}{b_k}$ mit $|a_k| \le b_k$.
(d.h. die Potenzreihe konvergiert)

$\Rightarrow$ Dann ist $f(x)$ am Ort x (beliebig oft stetig) diff'bar,
und zwar gliedweise, d.h.

$$f'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{1}{m!} \underbrace{(x^m)'}_{= m\cdot x^{m-1}} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{m}{m!}}_{= \frac{m}{m\cdot(m-1)!}} x^{m-1} \quad , \quad k := m-1 \;\Leftrightarrow\; m = k+1$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} \frac{x^k}{k!} \qquad \left(\left(=: \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{neu} \frac{x^k}{k!} \right)\right)$$

Insbesondere ist die Potenzreihe $f'(x)$ wieder konvergent.
((Beweis: in Analysis-Vorlesung ... hier: plausibel ?!))

Bsp $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, d.h. $a_k = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ $\exp'(x) = \exp(x)$

(war schon in Ü 24 benutzt worden)

Bsp $\exp'(c\cdot x) = \exp(c\cdot x)\cdot c$
↑ Kettenregel
d.h. $f(x) = f(0)\cdot e^{cx}$ genügt der Glg. $f' = c\cdot f$
(Bsp für "Differentialglg.")

eine weitere nützliche Ableitungsregel:

Ableitung der Umkehrfunktion

Sei $f: A \to B$ bijektiv (d.h. f^{-1} existiert)
und diff'bar am Ort $y \in A$ mit $f'(y) \neq 0$

$\Rightarrow$ Dann ist $f^{-1}: B \to A$ am Ort $x := f(y) \in B$ diff'bar

mit $$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Beweis: die Glg. $f(f^{-1}(x)) = x$ nach x ableiten:

$$[f(f^{-1}(x))]' = f'(f^{-1}(x)) \cdot [f^{-1}(x)]' = x' = 1$$

da nach Voraussetzung $f'(\underbrace{f^{-1}(x)}_{=y}) \neq 0$, folgt Behauptung ∎

Bsp $$\ln'(x) = \frac{1}{\exp'(\ln(x))} = \frac{1}{\exp(\ln(x))} = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Bsp $$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1-x^2}$$

$$\left[\ \tanh = \frac{\sinh}{\cosh}\ , \quad \tanh' = \frac{\sinh'\cosh - \sinh\cosh'}{\cosh^2} = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 \right)$$

$$\sinh = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\ , \quad \sinh' = \cosh$$

$$\cosh = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\ , \quad \cosh' = \sinh$$

$\rightarrow$ analog zum Zwischenwertsatz für stetige Funktionen (vgl. Kap. 2.2)
haben auch differenzierbare Funktionen einige allgemeine Eigenschaften:

3.3 Mittelwertsätze und Regel von de l'Hospital

Seien zwei Funktionen $f, g: A \to B$ auf einem Intervall $[a,b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $x_0 \in\ ]a,b[$, so dass

$$[f(b) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(b) - g(a)]\, f'(x_0)$$ allgemeiner Mittelwertsatz

Beweis: wir betrachten die Hilfsfunktion

$$h(x) := [f(b)-f(a)]\,g(x) - [g(b)-g(a)]\,f(x)$$

und müssen zeigen: $h'(x) = 0$ irgendwo zwischen a, b

es gilt (Summenregel): h diff'bar in $[a,b]$

und $h(a) = [f(b)-\cancel{f(a)}]\,g(a) - [g(b)-\cancel{g(a)}]\,f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$

$h(b) = [\cancel{f(b)}-f(a)]\,g(b) - [\cancel{g(b)}-g(a)]\,f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b) = h(a)$

$\Rightarrow$ also ist entweder $h(x)$ konstant auf $[a,b]$

und somit $h'(x) = 0 \quad \forall\, x \in\,]a,b[$

oder $h(x)$ besitzt (mind. ein) Extremum, z.B. bei $x_0 \in\,]a,b[$

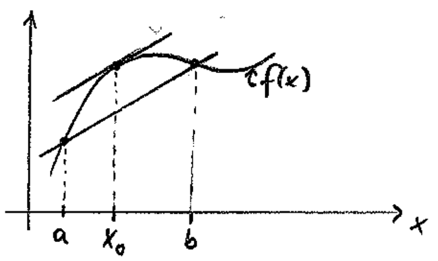
und somit $h'(x_0) = 0$ ∎

Setzt man $g(x) = x$ in den allg. Mittelwertsatz ein, folgt der

Mittelwertsatz: Sei $f: A \to B$ auf $[a,b] \subset A$ diff'bar.

$\Rightarrow$ Dann $\exists$ (mind. ein) $x_0 \in\,]a,b[$, so dass $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$.

anschaulich:



((die Steigung der Sekante wird zwischen (a,b) auch angenommen))

einige Folgerungen: (seien $f,g: A \to B$ diff'bar auf $[a,b] \subset A$)

- falls $f'(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b] \Rightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a,b]$

$>$	streng mon. ↗
$\leq$	monoton fallend
$<$	streng monoton ↘
$=$	$f(x) = \text{const.}$
$= g'(x)$	$f(x) = g(x) + \text{const.}$

((Bew.: "$\geq$": Seien $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2$.

dann existiert laut Mittelwertsatz ein $\vartheta \in]x_1, x_2[$

mit $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(\vartheta)}_{\geq 0} \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$ q.e.d.

">, ≤, <" : genauso

"=" : folgt aus "≥" und "≤"

"$= g'(x)$": $[f(x) - g(x)]' = 0 \overset{"="}{\Rightarrow} f(x) - g(x) = \text{const.}$))

Anwendung des Mittelwertsatzes: Grenzwerte wie "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\infty}{\infty}$" ausrechnen

Seien $f, g : A \to B$ auf $[a,b] \subset A$ diff'bar

und $f(a) = 0$, $g(a) = 0$, $g'(x) \neq 0$ auf $]a,b]$.

$\Rightarrow$ Dann gilt $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ Regel von de l'Hospital

((Bem: wenn der Grenzwert existiert; beide Limites "von oben";
Grenzwerte $\frac{\infty}{\infty}$ genauso: nehme $\frac{1/f(x)}{1/g(x)}$))

Bew.: laut allg. Mittelwertsatz $\exists$ zu jedem $x \in]a,b[$ ein $x_0 \in]a,x[$

so dass $[f(x) - f(a)]\, g'(x_0) = [g(x) - g(a)]\, f'(x_0)$.

wegen $f(a) = g(a) = 0 \Leftrightarrow f(x) g'(x_0) = g(x) f'(x_0)$

wegen $g'(x) \neq 0$ auf $]a,b]$ muss $g(x)$ streng mon. wachsen oder fallen

jedenfalls (da $g(a) = 0$) ist $g(x) \neq 0$ auf $]a,b]$

$\Rightarrow$ dürfen Dividieren: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

da $x_0 \to a$ für $x \to a$ folgt die Behauptung qed

Bsp $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$

((daraus folgt $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = e^1 = e$

$\Leftrightarrow$ die Folge $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen e (!)))