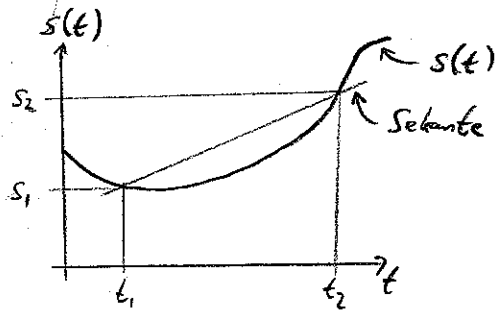


Bsp allgemeine geradlinige Bewegung
mit zeitlich variabler Geschwindigkeit: beliebiger $s(t)$



Differenzquotient gibt hier
Steigung der Sekante
durch $(t_1, s(t_1))$ und $(t_2, s(t_2))$ an

bekommen hier die Durchschnittsgeschwindigkeit während
des Zeitintervalls $\Delta t = t_2 - t_1$: $v_{\text{mittel}} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$

→ Physikalisch am wichtigsten ist oft die momentangeschwindigkeit.
Diese ergibt sich im Grenzübergang $t_1 \rightarrow t_2$;
bei einer stetigen Funktion geht dann auch $s(t_1) \rightarrow s(t_2)$,
und die Sekante $\rightarrow$ Tangente

Tangentensteigung $v(t_2) = \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t_2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

→ dieser Grenzwert eines Quotienten heißt

Differentialquotient $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

Verschiedene Schreibweisen:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x_0} \equiv f'(x_0) \equiv \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \Big|_{x_0} \equiv \left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} \equiv \frac{df(x_0)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x_0)$$

eine Physiker-Eigenart:

falls unabh. Variable Zeit ist: $\dot{f}(t_0) \equiv \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t_0}$

Der Differentialquotient als Grenzwert existiert natürlich
nicht bei allen Funktionen an allen Stellen; deshalb nennt man:

$f(x)$ heißt differenzierbar bei x_0

⇔ der Grenzwert des Differentialquotienten existiert

→ dazu müssen die Grenzwerte "von oben" und "von unten"
existieren und übereinstimmen

mathematisch präzise:

eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heißt differenzierbar am Ort $x_0 \in A$

$\Leftrightarrow \exists$ eine Zahl $\frac{df}{dx}(x_0) \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{df}{dx}(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall x \in A \text{ mit } 0 < |x - x_0| < \delta$$

"Ableitung" von f am Ort x_0

(anschaulich: Funktionsgraph hat keine "Ecken und Kanten")

Bsp $f(x) = |x|$

(Beweis sin.)

ist überall stetig*, aber bei $x=0$ nicht differenzierbar,

wobei $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = +1$, und $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1$ ist.

Bem: Die Funktion heißt differenzierbar auf $C \subset A$, falls sie an jedem Ort $x_0 \in C$ differenzierbar ist.

Die Funktion heißt stetig differenzierbar auf C , falls die Ableitung $\frac{df}{dx}(x_0)$ an jedem Ort $x_0 \in C$ stetig ist.

Höhere Ableitungen sind rekursiv definiert:

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}(x) \right) \equiv \frac{d^n}{dx^n} f(x) \equiv \left(\frac{d}{dx} \right)^n f(x) \quad \text{"n-te Ableitung"}$$

alternative Schreibweisen

Bsp $\frac{d^2 f}{dx^2}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx}(x) \right)$ bzw. $f''(x)$ bzw. $\ddot{f}(t)$

$\frac{d^3 f}{dx^3}(x) := \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 f}{dx^2}(x) \right)$ bzw. $f'''(x)$ bzw. $\ddot{\ddot{f}}(t)$

$\vdots$
(n-te Ableitung) bzw. $f^{(n)}(x)$ bzw. $f^{(n)}(t)$

* Beweis: Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := \varepsilon$. $\Rightarrow \forall x$ mit $|x| < \delta$:

↑ (Stetigkeit bei $x_0 = 0$)

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |0|| = |x| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

Bsp

Gerade $a+bx$ ist diff'bar auf $\mathbb{R}$,
mit erster Ableitung $= f'(x) = b = \text{"Steigung"}$

Also: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := a + bx$
 $\hookrightarrow \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \in \mathbb{R} \text{ (beliebig oder fest)}$

Stetigkeit wurde in Übung 15 gezeigt worden.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta := 1$. $\Rightarrow \forall x$ mit $0 < |x - x_0| < 1$:

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{a + bx - (a + bx_0)}{x - x_0} - b \right| = \left| \frac{b(x - x_0)}{x - x_0} - b \right| = 0 < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, ist $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar.

Bem

Differenzierbarkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

((klar aus Def.: falls $|x - x_0| \rightarrow 0$, dann auch

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \cdot |x - x_0| \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0))$$

aber: Stetigkeit $\nRightarrow$ Diff'barkeit (s. Bsp $|x|$ oben)

Die Ableitung (Steigung) an Extrema der Fkt. ist Null:

Sei $f: A \rightarrow B$ differenzierbar am Ort $x_0 \in A$

und x_0 sei ein (lokales oder globales) Maximum oder Minimum von f .

Dann gilt $f'(x_0) = 0$

Widerspruchsbeweis: Angenommen, $f'(x_0) \neq 0$.

Wähle $\varepsilon := \frac{|f'(x_0)|}{2} (> 0)$. da f diff'bar bei x_0 , $\exists \delta > 0$

mit $\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon \quad \forall x$ mit $0 < |x - x_0| < \delta$.

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) + \varepsilon = f'(x_0) + \frac{|f'(x_0)|}{2} \quad (*)$$

$$\text{und} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > f'(x_0) - \varepsilon = f'(x_0) - \frac{|f'(x_0)|}{2} \quad (**)$$

$$\text{Falls } x_0 \text{ Min, dann } \left. \begin{array}{l} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ für } x > x_0 \xrightarrow{(*)} f'(x_0) > 0 \\ \leq 0 \text{ für } x < x_0 \xrightarrow{(**)} f'(x_0) < 0 \end{array} \right\} \Downarrow$$

Falls x_0 Max analog; Also ist Annahme $f'(x_0) \neq 0$ falsch!

3.2 Ableiten als Handwerk

↳ aus der Def. der Ableitung kann man allgemeine Regeln herleiten; am besten also alle bisher bekannten Funktionen ableiten, und in Tabelle sammeln...
Aus einfachen Beispielen kann man sich die Ableitungen komplizierterer Funktionen systematisch berechnen:

Die Funktionen f, g seien beide am Ort $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

⇒ Dann sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ (falls $g(x) \neq 0$) am Ort x diff'bar, und es gilt:

Summenregel $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

Produktregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Die Funktion g sei am Ort x und die Funktion f am Ort $g(x)$ diff'bar ⇒ Dann ist auch $f \circ g$ am Ort x diff'bar, und es gilt:

(vgl. Ü 23) Kettenregel $[(f \circ g)(x)]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

(Bem.: $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{dg(x)}{dx} \cdot \frac{d}{dg(x)} f(g(x)) = g'(x) \cdot f'(g(x))$)

Bsp 1: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad (x \neq 0 \text{ falls } n \leq 0)$

Beweis: • für $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:

Ind.-Anfang: für $n=1$: $(x^1)' = x' \stackrel{\text{(S. Grunde, S. 26)}}{=} 1 = 1 \cdot x^0$ ✓

Ind.-Schritt: $(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' \stackrel{\text{(Produktregel)}}{=} x' \cdot x^n + x \cdot (x^n)'$
 $\stackrel{\text{(Ind.-Annahme)}}{=} 1 \cdot x^n + x \cdot n \cdot x^{n-1} = (n+1)x^n$ ✓

• für $n=0$: $(x^0)' = 1' \stackrel{\text{(S. Grunde)}}{=} 0$ ✓ (Quotientenregel) ($-n > 0$)

• für $n < 0$: $(x^n)' = \left(\frac{1}{x^{-n}}\right)' \stackrel{\text{(Quotientenregel)}}{=} \frac{0 \cdot x^{-n} - 1 \cdot (x^{-n})'}{(x^{-n})^2} \stackrel{\text{(Ind.-Annahme)}}{=} \frac{-(-n)x^{-n-1}}{x^{-2n}} = n x^{n-1}$ ✓