wie auch schon bei den Abbildungen, kann man für injektive Funktionen die jeweilige Umkehrfunktion definieren:

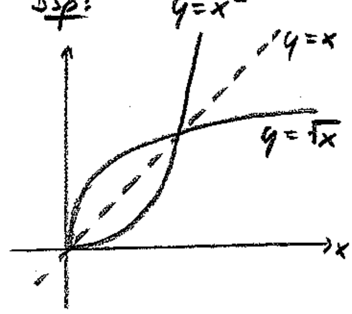
- Auflösen der Glg. $y = f(x)$ nach x gibt $x = f^{-1}(y) =: g(y)$

  ((Bem: Definitionsbereich und Wertevorrat tauschen die Rolle:
  $f: A \to B$, $g: B \to A$; $f^{-1}(f(x)) = x$ wie in Kap. 1.2))

- nach Auflösen wird die unabhängige Variable y meist wieder x genannt:

  $\Rightarrow$ im Funktionsgraphen ergibt sich die Umkehrfunktion f^{-1} einfach durch Spiegelung von f an der Geraden $y = x$.
  ((klar: $(x, f(x)) \to (f(x), x)$))

Bsp:



- erhalten durch Spiegelung / Umkehrung aller bisherigen (injektiven) Funktionen also viele weitere.

2.4 Logarithmus, allgemeine Potenzen

$\rightarrow$ Exponentialfunktion hat eine so hohe Bedeutung, dass selbst verwandte Funktionen eigene Namen bekommen (hier: Log., Potenz; Übg: hyperbol.; später: trig.).
$\uparrow$ (Ü 16, 20, 24)

(vgl. Kap 2.1):
$$\exp: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

streng monoton steigend $\Rightarrow$ injektiv

stetig

$\exp(x \to -\infty) \to 0$, $\exp(x \to +\infty) \to \infty$

$\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \Rightarrow$ surjektiv (wegen Zwischenwertsatz) es existiert also eine Umkehrfkt. $\exp^{-1}(x)$

$$\underline{\ln}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x) := \exp^{-1}(x)$$

"<u>L</u>ogarithmus <u>n</u>aturalis"

also: $\exp(\ln(\underset{\in\mathbb{R}^+}{x})) = x$, $\ln(\exp(\underset{\in\mathbb{R}}{x})) = x$

für alle $x,y \in \mathbb{R}^+$ gilt: $\ln(x\cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$

(denn: $\ln(x\cdot y) = \ln(\exp(\ln x)\cdot\exp(\ln y)) = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) = \ln x + \ln y$)

Schreibweise: oft $\ln x$ statt $\ln(x)$

<u>Funktionsgraph:</u>

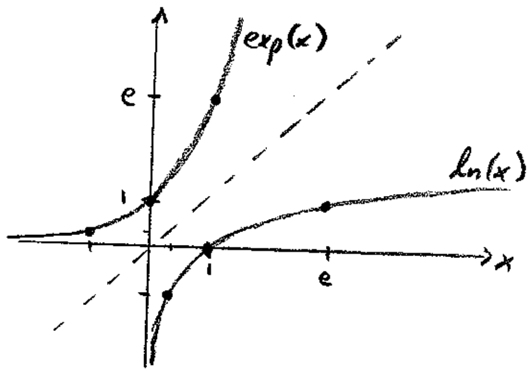
durch Spiegelung an Winkelhalbierender

$\exp(0)=1 \Rightarrow \ln(1)=0$

$\exp(1)=e \Rightarrow \ln(e)=1$

$\exp(-1) = \frac{1}{\exp(1)} = \frac{1}{e}$

$\Rightarrow \ln(\frac{1}{e}) = -1$



Nun kann man allgemeine Potenzen definieren (vgl. Kap 1.3: b^n, $n\in\mathbb{N}$)

Für $b\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathbb{R}$ sei $b^x := \exp(x\cdot\ln b)$ die <u>x-te Potenz von b</u>

Exponent

Basis

Eigenschaften der Potenz: ($a,b\in\mathbb{R}^+$, $x,y\in\mathbb{R}$)

$b^x\cdot b^y = b^{(x+y)} = b^{x+y}$ (und $b^0 = 1$ wegen $\exp(0)=1$)

$(b^x)^y = b^{(x\cdot y)} = b^{xy}$ (Vorsicht: $b^{(x^y)} \neq (b^x)^y$)

$a^x\cdot b^x = (a\cdot b)^x$

$b^{-x} = \frac{1}{b^x}$

(folgen alle aus Def. und exp-Eigenschaften)

<u>Bem.:</u>
- für $x \in \mathbb{N}$ also alles konsistent mit b^n aus Kap. 1.3
- für $n \in \mathbb{N}$: $b^n = \prod_{k=1}^{n} b$, $b^0 = 1$, $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$
  $\Rightarrow (b^{\frac{1}{n}})^n = b$, d.h. $\sqrt[n]{b} := b^{\frac{1}{n}}$ ist diejenige positive Zahl, die n-mal mit sich selbst multipliziert b ergibt
- beachte $b \in \mathbb{R}^+$ in Potenz-Def!
  Potenzgesetze für $b<0$ nicht gültig, z.B. $[(-1)^2]^{\frac{1}{2}} = 1 \neq (-1)^1 = -1$
- während $b^{1/n}$ immer eindeutig definiert ist, kann die Glg. $b = x^n$ mehrere Lsn. haben
  <u>Bsp</u>: $4 = x^2 \Rightarrow x = \pm 2$
- b^x wird oft <u>Exponentialfunktion zur Basis b</u> genannt

Einige Folgerungen: $(x, y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}^+)$

$e^x = \exp(x)$ <u>Beweis</u>: $e^x = \exp(x \overbrace{\ln e}^{=1}) = \exp(x)$

$[\exp(x)]^y = \exp(x \cdot y)$ <u>Beweis</u>: $[\exp(x)]^y = (e^x)^y = e^{xy} = \exp(xy)$

$\ln(z^x) = x \ln(z)$ <u>Beweis</u>: $\ln(z^x) = \ln(\exp(x \cdot \ln z)) = x \cdot \ln(z)$

Für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ sei
$$\log_b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \to \log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$$
der <u>Logarithmus zur Basis b</u>

Spezialfälle:

$\mathrm{ld}(x) := \log_{10}(x)$ "logarithmus decimalis"

$\mathrm{lb}(x) := \log_2(x)$ "logarithmus dualis" ($\underline{b} \Leftrightarrow$ "<u>b</u>inär")

$\ln(x) := \log_e(x)$ "logarithmus naturalis" s.o.

((<u>Bem.</u>: In der Literatur wird $\log(x)$ manchmal für $\ln(x)$, manchmal aber auch für $\mathrm{ld}(x)$ benutzt))

<u>Bsp</u> $\log_7(49) = \log_7(7^2) = \frac{\ln(7^2)}{\ln(7)} = \frac{2 \cdot \ln(7)}{\ln(7)} = 2$

<u>Bsp</u> $\log_{143}(143) = \frac{\ln(143)}{\ln(143)} = 1$

$\rightarrow$ (s. auch Übungen 17, 18, 19)