weitere oft verwendete Bezeichnungen:

- $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}_+ :=]0,\infty[$; $\mathbb{R}^- = \mathbb{R}_- :=]-\infty,0[$
  $\mathbb{R}_0^+ := [0,\infty[$; $\mathbb{R}_0^- :=]-\infty,0]$

- Betrag: $|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

  es gelten eine Reihe von Eigenschaften, wie z.B. die Dreiecksungleichungen $\big||a|-|b|\big| \leq |a \pm b| \leq |a|+|b|$
  (vgl. Übung 8)

- Summenzeichen $\sum_{i=1}^{n} x_i := x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ $(n \in \mathbb{N})$

  Produktzeichen $\prod_{i=1}^{n} x_i := x_1 x_2 \cdots x_n$

  Fakultät $0! := 1$, $n! := 1 \cdot 2 \cdots n = \prod_{k=1}^{n} k$

- Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$

Erinnerung: Rechenregeln für Potenzen

schreibe $b^n := \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ Stück}}$, nenne n "Exponent"

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow b^n b^m &= b^{n+m} \\ (b^n)^m &= b^{n \cdot m} \\ (ab)^n &= a^n b^n \end{aligned}\right\} \text{ anschaulich klar über obige Definition.}$$

definiere $b^0 := 1$, $b^{-n} := \frac{1}{b^n}$

dann gelten diese Rechenregeln anschaulich für alle $n, m \in \mathbb{Z}$

(später: noch allgemeiner)

Es gilt $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ ($\leftarrow$ für Übung 9b)

$$\Big(\Big(\text{denn: } \Leftrightarrow \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k\;n!}{k!\,(n-k+1)!} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)\;n!}{k!\,(n-k+1)!} \Leftrightarrow k + (n-k+1) = n+1 \;\blacksquare \Big)\Big)$$

eine weitere wichtige (und nützliche) Beweismethode:

Vollständige Induktion

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$, und sei $A(n)$ eine Aussage, die für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ definiert ist.
Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq n_0$ richtig, falls man beweisen kann, dass

(a) Induktionsanfang: $A(n_0)$ ist richtig

(b) Aus der Induktionsannahme, dass $A(n)$ für ein $n \geq n_0$ richtig ist, folgt die Induktionsbehauptung, dass $A(n+1)$ richtig ist

Bsp: Es gilt $n! > 2^n$ für alle $n \geq n_0 = 4$, denn

(a) $4! = 24 > 16 = 2^4$ ✓

(b) gelte $n! > 2^n$

$$\Rightarrow (n+1)! = (n+1)\, n! > (n+1) 2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \blacksquare$$

Bsp (Bernoulli-Ungl.) $(1+h)^n \geq 1+nh$ für $h \geq -1$, $n \in \mathbb{N}_0$

(a) $n=0$: $(1+h)^0 = 1 = 1+0$ ✓

(b) gelte $(1+h)^n \geq 1+nh$

$$\Rightarrow (1+h)^{n+1} = (1+h)^n (1+h) \geq (1+nh)(1+h) = 1+nh+h+nh^2 \geq 1+(n+1)h \quad \blacksquare$$

Bsp (endliche geometrische Reihe) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Bsp (binomische Formel) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

} Beweis in Übung 9

Bsp Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist n^2.

(a) $n=1$: $1 = 1^2$ ✓

(b) gelte $1+3+\ldots+(2n-1) = n^2$

$$\Rightarrow 1+3+\ldots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2 \quad \blacksquare$$

1.4 Folgen und Reihen ≈ [Heft, Kap. 3]

wichtig für Begriffe und Gesetze der Grenzprozesse
grundlegende Bedeutung in Physik

Folge: unendliche, durchnummerierte Menge von Zahlen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch ein Bildungsgesetz

Bsp:
(F1) $1, 2, 3, 4, \ldots = (n)_{n\in\mathbb{N}}$: Folge der nat. Zahlen
(F2) $1, -1, 1, -1, \ldots = ((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$: eine "alternierende" Folge
(F3) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \ldots = \left(\frac{1}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$: Folge der inversen Fakultäten
(F4) $q, q^2, q^3, q^4, \ldots = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $q\in\mathbb{R}$: die "geometrische" Folge
(im Folgenden weggelassen) → z.B. Zinseszins

meist interessieren uns drei Eigenschaften von Folgen:
Beschränktheit, Monotonie, Konvergenz!

nützliche logische Symbole:
$\exists$ "es existiert ein"
$\exists!$ "es existiert genau ein"
$\forall$ "für alle"

(a_n) ist nach oben beschränkt $\Leftrightarrow \exists B: a_n \le B \quad \forall n\in\mathbb{N}$
(a_n) ist nach unten beschränkt $\Leftrightarrow \exists A: a_n \ge A \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Bsp: (F1) $A=1$ (F2) $A=-1, B=1$ (F3) $A=0, B=1$
(F4) A, B abhängig von $|q|$; z.B. $0<q<1$: $A=0, B=q$

(a_n) ist monoton steigend $\Leftrightarrow a_n \le a_{n+1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$
streng mon. steigend $<$
monoton fallend $\ge$
streng mon. fallend $>$

Bsp: (F1) streng monoton steigend (F2) nicht monoton
(F3) streng monoton fallend (F4) abh. von $|q|$

Manche Folgen haben <u>Häufungspunkte</u> : beliebig viele Folgenglieder a_n häufen sich um einen Wert a

<u>Bsp:</u> (F1) kein H.P. (F2) zwei H.P.: ± 1 (F3) ein H.P.: 0

((klar: jede nach oben und unten beschr. Folge hat mind. einen H.P.))

Falls eine Folge nur einen H.P. a hat, kann dieser <u>Grenzwert</u> sein:

$$\boxed{\begin{array}{l} (a_n) \text{ ist } \underline{\text{konvergent}}, \text{ d.h. } \exists a : \lim_{n\to\infty} a_n = a \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > N_\varepsilon \end{array}}$$

$\leftarrow$ oft auch: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$

N_ε bzw $N(\varepsilon)$: kann jedem ε eine nat. Zahl N zuordnen

<u>Bsp:</u> (F3) ist konvergent, und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$

denn: sei $\varepsilon > 0$, dann ist $|a_n - 0| = \frac{1}{n!} < \varepsilon \quad \forall n > \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$

((haben hier $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$: größte ganze Zahl $\le \frac{1}{\varepsilon}$; $\mathrm{INT}(\frac{1}{\varepsilon})$))

Eine Folge heisst <u>divergent</u>, wenn sie nicht konvergent ist.

In der Physik sind unendliche Summen, sog. <u>Reihen</u>, wichtig,

z.B. $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\rightarrow$ die Teilsummen $s_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$, $m \in \mathbb{N}$

können wir als Folge $(s_m)_{m\in\mathbb{N}}$ auffassen,

um so Grenzwert bzw. Konvergenz zu behandeln

$$\boxed{\text{Die Reihe } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent} \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} a_n = s < \infty}$$

"Grenzwert" der Reihe

<u>Bsp:</u> Die Reihe aus den Teilsummen von (F1)

$s_m = \left(\sum_{n=1}^{m} n\right)_{m\in\mathbb{N}} = 1, 3, 6, 10, 15, \ldots$ ist divergent