(Exkurs)

Zahlen (große)

1 Milliarde; $\underbrace{10\ldots0}_{9\text{ Stück}}$

Alter des Univ $13.7 \cdot 10^9$ Jahre

$\quad\llcorner\ \pi \cdot 10^7$ sec

$4{,}3 \cdot 10^{17}$ sec

Atome im Univ ca 10^{80} (10^{78-85}, Faktor 10 DM etc)

Körper / Erde / Sonne / Milchstr

Wasser Eisen Wasserstoff

10^{28} 50 57 68

vergleichbare Zahl: $59! \approx 1.39 \cdot 10^{80}$

größte Zahl mit 3 Dez-Ziffern? $(9^9)^9 \approx 2 \cdot 10^{77}$

$9^{(9^9)} = 9^{387\,420\,489}$ gigantisch!

Noch: z.B. Fermat-Zahlen

1640

$F_n := 2^{(2^n)}+1$; $F_0=3$, $F_1=5$, 17, 257, 65537,

$F_5 = 4294967297$ durch 641

Euler 1732

$F_{2145351}$ div durch $3 \cdot 2^{2145353}+1$ (5. größte Primzahl) 2003

L ausschreiben: 2 Ziffern/cm $\rightarrow$ L^2-Papier,

$L = 10^{322\,889}$ Lichtjahre

Rechnen: per Hand / CAS

$\lightning$

$-20 = -20$

$16-36 = 25-45$

$+(\frac{9}{2})^2 = \quad + (\frac{9}{2})^2$

$(4-\frac{9}{2})^2 = (5-\frac{9}{2})^2$

$4 = 5$ $\lightning$

$\frac{x}{x} = 1$

Lösungsmenge: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

CAS: $1=1$

Lsgs-Menge $\mathbb{R}$ $\lightning$

$(1+q+\ldots+q^{10})(1-q) = 1-q^{11}$ verstehen per Hand

$6 \cdot 7 = 42 \Rightarrow 66666 \cdot 66667 = 4444422222$ etc.

$\boxed{\mathbb{N}}$: Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$
nützlich zum Zählen: # Teilchen etc.

zwei innere Verknüpfungen, die $a, b \in \mathbb{N}$ ein $x \in \mathbb{N}$ zuordnen:

- Addition $a + b = x \in \mathbb{N}$
  mit $a + b = b + a$ (Kommutativität)
  und $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativität)
- Multiplikation $a \cdot b$ oder $ab = x \in \mathbb{N}$
  mit $ab = ba$ (Komm.)
  und $a(bc) = (ab)c$ (Ass.)
  sowie $1a = a$ (neutrales Element; Eins)

→ sind verbunden durch $(a+b)c = ac + bc$ (Distributivgesetz)

((Bem: oft sinnvoll, die Null 0 hinzuzunehmen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$;
dann hat auch Addition ein eindeutig bestimmtes
neutrales Element: $0 + a = a$ (neutr. Element; Null)))

die "elementarsten" natürlichen Zahlen:
eine Primzahl $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ hat nur triviale Teiler: 1 und p.

→ "Fundamentalsatz der Zahlentheorie" (ohne Beweis):
Jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ lässt sich bis auf die
Reihenfolge eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen.

Bedeutung der Primzahlen: z.B. Kryptographie (RSA-Verschlüsselung)

$\boxed{\mathbb{Z}}$: Menge der ganzen Zahlen $\{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$

↳ nützlich für Haben / Soll : Schulden ...

$a + x = b$ hat nicht für alle $a, b \in \mathbb{N}$ Lsg $x \in \mathbb{N}$

z.B. $2 + x = 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$

→ Die Gleichung $a + x = b$ hat für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ genau eine Lösung $x \in \mathbb{Z}$ (denn $x = b + \underbrace{(-a)}_{\text{"Inverses" zu } a}$).

Man sagt, $\mathbb{Z}$ sei abgeschlossen bezüglich der Addition.

→ zentraler Begriff in der Mathematik: — z.B. ↓

eine Gruppe ist eine Menge von Objekten	$\mathbb{Z}$
die abgeschlossen ist bzgl. einer inneren Verknüpfung,	"$+$"
für welche ein assoziatives Gesetz gilt,	$a+(b+c) = (a+b)+c$
die genau ein neutrales Element besitzt,	"0"
und die zu jedem Element genau ein Inverses hat.	"$-a$"

((Bem.: gilt auch ein kommutatives Gesetz, — $a + b = b + a$

nennt man die Gruppe abelsch))

→ Gruppen haben große Bedeutung in Physik: Symmetrien!

$\boxed{\mathbb{Q}}$: Menge der rationalen Zahlen $\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

↳ nützlich beim Teilen

wollen auch Gleichung $a \cdot x = b$ innerhalb der Menge lösen

→ damit gibt es auch ein inverses Element bzgl. der Multiplikation, nämlich a^{-1} mit $a \cdot a^{-1} = 1$.

$\mathbb{Q}$ ist also (abelsche) Gruppe bzgl. Addition und Multiplikation

((Bem.: wenn noch das Distributivgesetz gilt,

nennt man dies einen Körper;

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper))

Bem.: Streng genommen wird eine rationale Zahl immer durch eine ganze Klasse von $\frac{p}{q}$ dargestellt, z.B. $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \dots$; wir wollen jeweils gekürzte Brüche als Darstellung wählen

Die Ausdivision von $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ führt auf endliche oder (alternativ) periodische Dezimalzahlen (← Beweis s. Übung 7)

Bsp.: $\frac{1}{4} = 0{,}25$; $\frac{1}{11} = 0{,}090909\dots = 0{,}\overline{09}$

Bem.: Physik → Messwerte mit Fehler

z.B. bedeutet $x = 2{,}472(12)$

dass $x = 2{,}472 \pm 0{,}012$ ist

bzw dass x mit 68% Wahrscheinlichkeit im Intervall $2{,}460 \leq x \leq 2{,}484$ liegt.

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar (d.h. die rationalen Zahlen lassen sich durchnumerieren)

⇒ das heisst auch, dass $\mathbb{Q}$ nicht mehr Elemente als $\mathbb{N}$ hat.

$$
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & (\frac{2}{2}) & \frac{3}{2} & (\frac{4}{2}) & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & (\frac{3}{3}) & \frac{4}{3} & \cdots \\
\frac{1}{4} & (\frac{2}{4}) & \frac{3}{4} & (\frac{4}{4}) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}
$$

← Schema zur Numerierung von $\mathbb{Q}_{>0}$: Pfeilen folgen, doppelte (eingeklammerte) Darstellungen übergehen

→ $r_1 = 1,\ r_2 = \frac{1}{2},\ r_3 = 2,\ r_4 = 3,\ r_5 = \frac{1}{3}, \dots$

$\mathbb{Q}$ ist dann $\{0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, \dots\}$

$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper, d.h. für jedes $x \in \mathbb{Q}$ gilt genau eine der Relationen $x > 0$, $x = 0$, $-x > 0$, so dass

$$(x>0,\ y>0) \Rightarrow \begin{cases} x+y > 0 \\ x \cdot y > 0 \end{cases}.$$

Rechnen mit Relationen (Ungleichungen): (s. auch Übung 8)

$x > y \Leftrightarrow x - y > 0$

$x < 0 \Leftrightarrow y > x$

$x \leq y \Leftrightarrow x < y$ oder $x = y$

$x < y \Leftrightarrow -x > -y$

$x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$

$x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$

(Ungleichungen dürfen addiert werden)

$0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}, \frac{y}{x} > 1$

$\boxed{\mathbb{R}}$: Menge der reellen Zahlen $\quad \mathbb{Q} \cup \{$unendliche Dezimalzahlen$\}$

nützlich: stopft die $\mathbb{Q}$-Lücken auf Zahlengerade
enthält π, e, Wurzeln (d.h. Lsn von $x^2 = a$ etc)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein angeordneter Körper

→ es gelten alle bisherigen Rechenregeln wie für $\mathbb{Q}$.

Zahlen $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \mathbb{Q}$ nennt man irrational

→ warum reicht $\mathbb{Q}$ nicht aus?
gibt es überhaupt irrationale Zahlen?
→ Ja! (sogar "viel mehr" als in $\mathbb{Q}$ sind, vgl. Übung 5)

Behauptung: für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $p \in \mathbb{N}$ Primzahl ist $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$

Beweis: (durch Widerspruch)

Annahme: $\sqrt[n]{p} = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow p b^n = a^n$ $\quad a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$a \neq 0, a \neq 1$ denn $p \geq 2$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit (oBdA): $a, b > 0$

Fall 1 $(b \neq 1)$: $a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

Fund. Satz: a, b haben eindeutige Primfaktorzerlegung
$p b^n, a^n$ haben identische Primfaktorzerlegung

$p b^n, a^n$ können aber nicht gleichviele p enthalten.

⇒ Widerspruch zur Annahme!

<u>Fall 2</u> $(b=1)$: $p = a^n$

Fund. Satz: beide Seiten haben identische Primfaktorzerlegung, aber a^n hat mindestens 2 Faktoren $\Rightarrow$ Widerspruch!

$\Rightarrow$ da also die Annahme $\sqrt[n]{p} \in \mathbb{Q}$ zum Widerspruch führt, muss $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$ gelten

((<u>Bem.</u>: Der <u>Widerspruchsbeweis</u> ist eine sehr wichtige Methode; vgl. Ü5))

Bezeichnungen: <u>Intervalle</u>. seien $a<b$ in $\mathbb{R}$

$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ geschlossenes Int.

$]a,b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$, analog $[a,b[$ halboffenes Int.

$]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ offenes Int.

benutzen oft auch das Symbol ∞ (<u>Unendlich</u>), wobei ∞ "größer als jede Zahl" ist.

$\Rightarrow$ $a < \infty$ bedeutet also, dass a endlich ist.

z.B.: $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$ etc.

$]-\infty, \infty[= \mathbb{R}$

Im Gegensatz zu $\mathbb{Q}$ ist $\mathbb{R}$ "vollständig", d.h. die reellen Zahlen stellen den Zahlenstrahl "lückenlos" dar.

((<u>Bem.</u>: mathematisch benötigt man das Supremumsaxiom, um diese Lückenlosigkeit zu zeigen; hier sind wir mit der Darstellung von $\mathbb{R}$ als Dezimalzahlen zufrieden.))

- diese Lückenlosigkeit ermöglicht dann die Analysis: differenzieren etc, s. später

- $\mathbb{Q}$ liegt "dicht" in $\mathbb{R}$, d.h. in jedem (noch so kleinen) Intervall $]a,b[$ gibt es unendlich viele rationale Zahlen!

Beweis: s. Übung 6

$\Rightarrow$ die "Lücken" auf der Zahlengerade sind unendlich klein.

((<u>Bem.</u>: zwischen zwei rationalen Zahlen liegt eine (sogar ∞ viele) weitere, denn $p, q \in \mathbb{Q}$, $p<q$ $\Rightarrow$ $p < \frac{p+q}{2} < q$))