Physik-Vorkurs WS 2009

0. Einleitung

Orga: Vorlesung täglich 9:15 – 10:50 ±... (H6)
14.9.–9.10.2009

Übungen täglich 11:15 – 12:45
in 4 Gruppen; Details heute ca. 10:35

Online www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/vk09

YS, E6-118, 0521-106 6211

eKVV: bitte registrieren → u.a. Email-Verteiler

Ziele: Auffrischen von Schul-Mathematik-Vorkenntnissen
→ gleiches Basisniveau bei Studienbeginn
stressfreies Einarbeiten in "Uni-betrieb"
→ reinschnuppern, Appetit anregen
"Mathe-Schock" zu Studienbeginn vorbeugen

Inhalt: Zahlen, Folgen, Reihen
Beweismethoden
Funktionen, Ableitungen, Taylor-Entwicklungen
Integration
komplexe Zahlen
Vektoren, Felder, $\mathbb{R}^n$

Literatur: K. Hefft, Mathematischer Vorkurs ← (online; umsonst)
C. Lang, N. Pucker, Mathematische Methoden in der Physik
etc... (s. webpage)
auch z.B. Bronstein, Taschenbuch der Mathematik

1. Grundlagen

zur Vorbereitung auf Analysis

→ Grundbegriffe über Mengen, Abbildungen, wichtigste Zahlbereiche, mathematisches Schliessen, elementare Funktionen

1.1 Mengen

→ Begriffe, "Vokabeln", Sprech- und Schreibweisen der Mengenlehre

logische Beziehungen:

$A \Rightarrow B$: "Aussage A impliziert Aussage B"
bzw "Aus A folgt B"
bzw "Wenn A, dann B"
Bedeutung: wenn A wahr ist, ist auch B wahr.
man sagt auch: A ist eine hinreichende Bedingung für B
bzw: B ist eine notwendige Bedingung für A

$A \Leftrightarrow B$: "A äquivalent B"
bzw "A gilt genau dann, wenn B gilt"
bzw "A gilt dann und nur dann, wenn B gilt"
Bedeutung: $A \Rightarrow B$ und $B \Rightarrow A$

A oder B : A ist wahr, oder B ist wahr, oder A und B sind wahr
((vgl. mit "entweder A oder B": A, B schliessen sich aus))

A und B ; nicht A : anschaulich klar

Menge: Zusammenfassung M von wohlunterschiedenen Objekten

$x \in M \Leftrightarrow$ x ist ein Element von M

$y \notin M \Leftrightarrow$ y ist kein Element von M

wir benutzen oft folgende **Bezeichnungen**:

$\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen (genaueres: s. unten)

$\mathbb{Q}$ Menge der rationalen Zahlen $\{p/q,\ p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

$\mathbb{Z}$ Menge der ganzen Zahlen $\{0,1,-1,2,-2,\dots\}$

$\mathbb{N}$ Menge der natürlichen Zahlen $\{1,2,3,\dots\}$

$\mathbb{N}_0$ Menge der Zahlen $\{0,1,2,3,\dots\}$

übliche **Schreibweisen** für Mengen:

Auflistung aller Elemente z.B. $M = \{2,3,5,7\}$

(Reihenfolge egal! Doppelte Auflistung auch egal.)

per Bedingung: $M = \{x \mid \dots \text{(Bedingung an } x) \dots\}$

z.B. $M = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist einstellige Primzahl}\}$

oder $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x = 0\} = \{0,4\}$

Beziehungen zwischen zwei Mengen A, B:

$A \subset B \Leftrightarrow$ A ist Teilmenge von B

"A enthalten in B"

(schließt den Fall $A = B$ mit ein; manchmal $\subseteq$)

$\Leftrightarrow (a \in A \Rightarrow A \in B)$

können auch $B \supset A$ schreiben

Bsp: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ Durchschnitt 

$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ Vereinigung 

$A \setminus B = \{a \in A \mid a \notin B\}$ Differenz 

A, B disjunkt $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$

$\uparrow$ leere Menge

z.B. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 1 = 0\}$

$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ kartesisches Produkt

Bsp: $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$; deute (a,b) als Punkte einer Ebene

$$A \times B = \mathbb{R}^2$$

einige Rechenregeln der Mengenalgebra (folgen aus obigen Def's):

$$\left.\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}\right\} \text{ Distributivgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned}\right\} \text{ Assoziativitätsgesetze}$$

$$\left.\begin{aligned} C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B) \\ C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B) \end{aligned}\right\} \text{ de Morgan'sche Regeln}$$

(Bem: die Differenz ist nicht assoziativ, denn:
sei $A := \{a\}$, dann $A \setminus (A \setminus A) = A \setminus \emptyset = A$
aber $(A \setminus A) \setminus A = \emptyset \setminus A = \emptyset$)

1.2 Abbildungen

Seien M, N nichtleere Mengen.

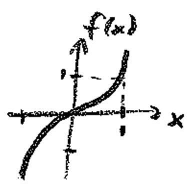
eine Abbildung (oder Funktion) $f: M \to N$ (Definitionsbereich M, Zielmenge N)

ist eine Vorschrift $x \mapsto f(x)$, die jedem $x \in M$ genau ein Element $f(x) \in N$ zuordnet.

((Bem.: "Funktion" benutzt man eher für Zahlen;
"Abbildung" eher für geometrische Zusammenhänge;
im Prinzip beides möglich / richtig.))

Bsp: $f: M \to M$ mit $x \mapsto x$
ist die Identität, oder identische Abbildung auf M, $\mathbb{1}_M$

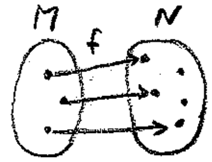
Bsp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto x^3$
ist die Funktion



Man nennt $\{f(x) \mid x \in M\}$ den <u>Wertevorrat</u> (bzw. die <u>Bildmenge</u>) der Abbildung $f: M \to N$.

Eine Abbildung (oder Fkt.) $f: M \to N$ heisst

- <u>injektiv</u> (bzw. eineindeutig)

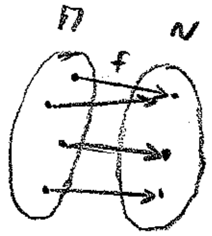


$\Leftrightarrow \left(x_1, x_2 \in M,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right)$

bzw. $\left(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right)$

d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$
hat höchstens eine Lösung $x \in M$

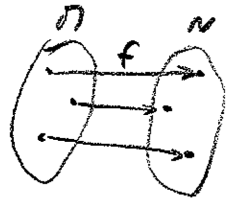
- <u>surjektiv</u>



$\Leftrightarrow$ N ist die Bildmenge von f

d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$
hat mindestens eine Lösung $x \in M$

- <u>bijektiv</u>



$\Leftrightarrow$ f ist injektiv <u>und</u> surjektiv

d.h. die Gleichung $f(x) = y$ für $y \in N$
hat genau eine Lösung $x \in M$

<u>Bsp</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ ist <u>nicht</u> injektiv ((denn $f(1) = f(-1)$))
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist surjektiv
$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$ ist bijektiv

$\to$ mehr Bsp.: s. Übung

bezeichne dieses x ~~mit~~ $g(y)$; haben also Abbildung $g: N \to M$,
und es ist $f(g(y)) = y$ für alle $y \in N$

sowie $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$

g nennt man deshalb <u>Umkehrabbildung</u> zu f

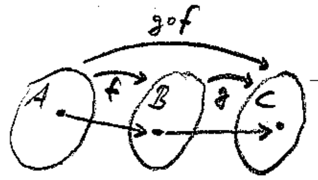
((Bezeichnung ist üblicherweise f^{-1} [nicht verwechseln mit $\frac{1}{f}$!]))

Diese Umkehrabbildung g ist auch bijektiv:

- g surjektiv, da $g(f(x)) = x$
- g injektiv, denn aus $g(y_1) = g(y_2)$
  folgt $y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$ ∎ "Beweisende"

Seien $f: A \to B$ und $g: B \to C$ zwei Abbildungen.
Man nennt dann $g \circ f : A \to C$
mit $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ für $x \in A$

die Komposition von g mit f
(bzw. Hintereinanderausführung)
lese $g \circ f$ als "g nach f"



Bsp $f: \mathbb{R} \to]0,\infty[,\ x \mapsto e^x$ ((Funktionen: s. später))
$g:]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(x)$
$\Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$ ist die Identität auf $\mathbb{R}$: $g \circ f = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$
$\Rightarrow$ entsprechend ist $f \circ g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}>0}$

1.3 Zahlen

→ brauchen wir z.B. zur Darstellung von Messwerten!

Bem.: eine physikalische Größe besteht aus
Messwert und Maßeinheit (= Zahlenwert + Dimension)

über Maßstab definiert
z.B. Meter ~ Lichtstrecke
Sekunde ~ Periodendauer Cs-133

Zahlen! ← Gegenstand der Mathematik

Abstraktion: "Geisteswissenschaft"
logische Struktur, Verallgemeinerungen
((für Messwerte hätte $\mathbb{Q}$ genügt))