Übungen zum Vorkurs Physik **Selbsttest** 14.9.2009

Aufgabe S1: Berechnen bzw. vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

(a) $\frac{18}{5} + \frac{3}{2} + \frac{7}{10}$
(b) $\left(\frac{21}{5} \cdot \frac{10}{7}\right)^2$
(c) $\left(\frac{5}{9}\right)^2 : \left(\frac{10}{3}\right)^2$
(d) $(x-1)^2/(x^2-1)$
(e) $e^{4x} \cdot 3\,e^{2x}$
(f) $\ln(t^2-1) - \ln(t+1)$
(g) $(2x^3 + 9x^2 - 11x + 42) : (x+6)$

Aufgabe S2: Berechnen Sie alle reellen Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $x^2 - 2x - 63 = 0$
(b) $18x^2 - 3x = 10$
(c) $x^4 + 4x^2 = 0$
(d) $\frac{32}{x-1} - \frac{45}{x-2} = 1$
(e) $\sqrt{2x+7} + \sqrt{x-5} = 7$

Aufgabe S3: Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 7x^3 - 2x$
(b) $f(t) = 2\,e^{-3t}$
(c) $x(t) = \frac{8}{t^2} - \frac{2}{t}$
(d) $g(x) = x^2 \cdot e^{3x}$
(e) $g(t) = (t^2-2)/(t^3+1)$

Aufgabe S4: Integrieren Sie die folgenden Funktionen:

(a) $f(x) = 2x + 4$
(b) $f(t) = \frac{3}{t^2} - 5t^2$
(c) $v(t) = 4\,e^{2t}$
(d) $a(t) = \frac{2}{t}$

Aufgabe S5: Berechnen Sie die folgenden Vektorausdrücke:

(a) $(2,1,5) + (4,-4,3)$
(b) $(-5\text{cm}, 7\text{cm}, -2\text{cm}) - (5\text{cm}, 1\text{cm}, -2\text{cm})$
(c) $5 \cdot (1,3,4) - 2 \cdot (-2,5,1)$
(d) $(4,1,2) \cdot (3,0,1)$

Aufgabe S6: Konstruieren Sie den Summen- und den Differenzvektor der beiden Vektoren $(3,1)$ und $(1,2)$ in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem.

Aufgabe S7: Ein Autofahrer legt die Strecke von 100 km zurück. Dabei fährt er die ersten 50 km mit einer Geschwindigkeit von 60 km/h, und die zweite Weghälfte mit 90 km/h. Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs auf der Gesamtstrecke?

Aufgabe S8: Ein Körper der Masse 80 kg gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene mit Steigungswinkel 30^o. Mit welcher Kraft F wird der Körper auf die Ebene gedrückt? Welche Beschleunigung a erfährt er längs der Ebene? [Hinweis: $\sin(30^o) = 1/2$.]

Aufgabe S9: Bei einem Fahrradrennen erreicht Fahrer 1 einen Kontrollpunkt um 9:00 Uhr, und fährt mit 30 km/h konstant weiter. Fahrer 2 passiert den Kontrollpunkt um 10:15 Uhr und fährt mit 40 km/h konstant weiter. Wann holt er den Fahrer 1 ein?

Übungen zum Vorkurs Physik	**Selbsttest-Lösung**	14.9.2009

Aufgabe S1:

(a) $29/5$
(b) 36
(c) $1/36$
(d) $(x-1)/(x+1)$
(e) $3\,e^{6x}$
(f) $\ln(t-1)$
(g) $2x^2-3x+7$

Aufgabe S2:

(a) $x \in \{-7, 9\}$
(b) $x \in \{-2/3, 5/6\}$
(c) $x = 0$
(d) $x \in \{-7, -3\}$
(e) $x = 9$

Aufgabe S3:

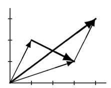
(a) $21x^2-2$
(b) $-6\,e^{-3t}$
(c) $-\frac{16}{t^3}+\frac{2}{t^2}$
(d) $2x\,e^{3x}+3x^2\,e^{3x}$
(e) $-t(t^3-6t-2)/(t^3+1)^2$

Aufgabe S4:

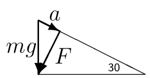
(a) x^2+4x
(b) $-\frac{3}{t}-\frac{5}{3}t^3$
(c) $2\,e^{2t}$
(d) $2\ln(t)$

Aufgabe S5:

(a) $(6,-3,8)$
(b) $(-10,6,0)\mathrm{cm}$
(c) $(9,5,18)$
(d) 14

Aufgabe S6: 

Aufgabe S7: 72 km/h

Aufgabe S8: 

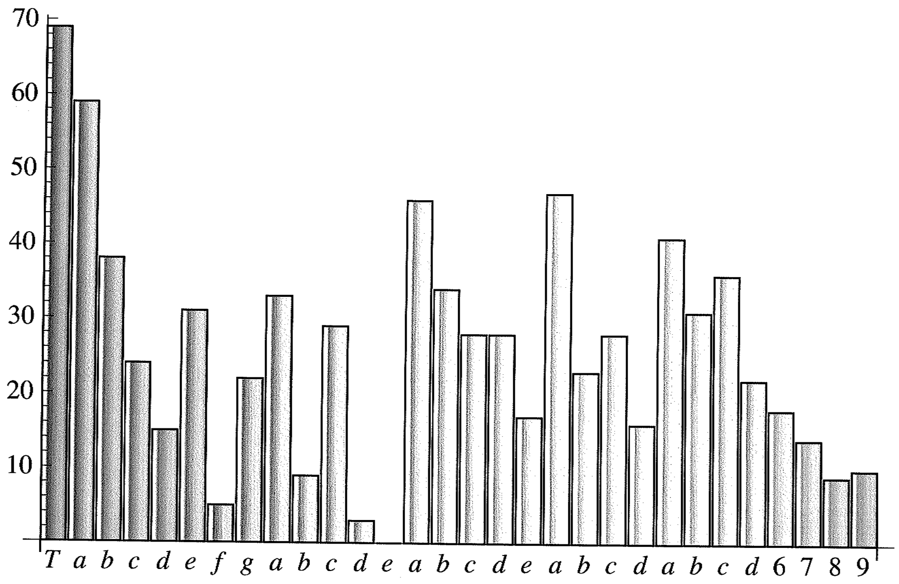
$F = mg\cos(30^o) = 80\,\mathrm{kg}\cdot 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 679$ N
$a = g\sin(30^o) \approx 4.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

Aufgabe S9: 14:00 Uhr

Übungen zum Vorkurs Physik	**Selbsttest-Statistik**	14.9.2009

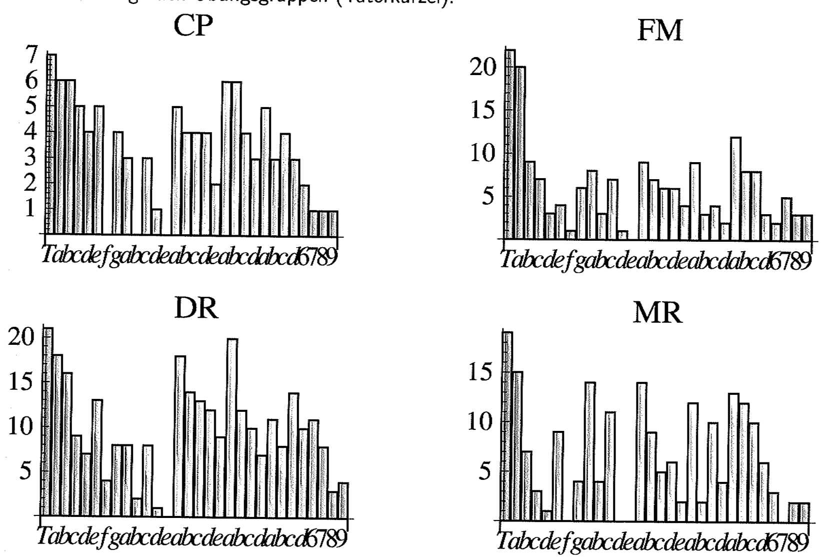
gezeigt sind richtige Antworten pro Aufgabenteil (T = Anzahl der Teilnehmer)

Out[66]=



Aufschlüsselung nach Übungsgruppen (Tutorkürzel):

Out[67]=



Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 01** 14.9.2009

Aufgabe 1:

Es seien folgende Mengen gegeben:
$A := \{1, 2, 3, 5\}$, $B := \{1, 4, 6\}$, $C := \{-1, 2, 5\}$, $M := [2, 6[$, $N :=]3, 5[$.
Geben Sie folgende Mengen an:
$A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $M \cap N$, $M \cup N$, $B \cap M$, $N \cap C$, $B \cap C$, $B \times C$.

Aufgabe 2:

Es seien folgende Abbildungen gegeben:
$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 2x + 1$
$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto 2x + 1$
$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$
$k : [0, \infty[\to [0, \infty[$, $x \mapsto x^2$
Welche der Abbildungen ist injektiv, surjektiv oder bijektiv?

Aufgabe 3:

Seien A, B, C Mengen, und $f : A \to B$ sowie $g : B \to C$ Abbildungen. Man zeige, dass gilt:
(a) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv,
(b) $g \circ f$ injektiv, f surjektiv $\Rightarrow g$ injektiv.
(c) f, g bijektiv $\Rightarrow g \circ f$ bijektiv, und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
Der Beweis kann sowohl anschaulich (per Skizze) als auch formal (mit symbolischer Argumentationskette) gegeben werden.

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x)$.
Bestimmen Sie $f^{-1}(\{(0, -1, 1)\})$ und $f^{-1}(\{(1, 1, 2)\})$.
Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv?

- Die Homepage des Kurses ist `http://www.physik.uni-bielefeld.de/~yorks/vk09`

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 02** 15.9.2009

Aufgabe 5:

Können Sie die folgenden zwei Aussagen für jede irrationale Zahl x (d.h. $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) und jede rationale Zahl $y \in \mathbb{Q}$ beweisen?
(a) $x + y \notin \mathbb{Q}$
(b) $x \cdot y \notin \mathbb{Q}$ für $y \neq 0$
[Hinweis: am einfachsten ist ein Widerspruchsbeweis.]
$\Rightarrow$ es gibt also "viel mehr" irrationale Zahlen als rationale Zahlen.

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass es zu jeder irrationalen Zahl x eine rationale Zahl y gibt, die beliebig nahe an x liegt.
[Beweisidee: Stelle x als Dezimalzahl dar. Finde zu beliebigem (aber festem) $n \in \mathbb{N}$ eine rationale Zahl y, deren Unterschied zu x weniger als $\frac{1}{10^n}$ beträgt.]
$\Rightarrow$ die rationalen Zahlen liegen also "dicht" in $\mathbb{R}$: zwar fehlen in $\mathbb{Q}$ viel mehr Zahlen als $\mathbb{Q}$ selbst enthält, aber die "Lücken" sind alle "unendlich klein".

Aufgabe 7:

Beweisen Sie, dass jede ultimativ periodische Dezimalzahl x rational ist.
[Hinweis: Stelle x als $x = z_0\, , \, z_1\, z_2 \ldots z_n\, z_{n+1} \ldots z_{n+k}\, z_{n+1} \ldots z_{n+k} \ldots$ dar, wobei die Zahl links vom Komma $z_0 \in \mathbb{Z}$ ist, und alle Nachkommastellen $z_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ sind. Die Periode ist dann $k \in \mathbb{N}$. Betrachte nun $y = x \cdot 10^k - x$.]
$\Rightarrow$ es gibt also "viel mehr" nicht-periodische als periodische Dezimalzahlen.

Aufgabe 8:

Die Betragsfunktion sei definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass dann Folgendes gilt:
(a) $|x| \geq 0$
(b) $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$
(c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
(d) $|x + y| \leq |x| + |y|$
(e) $|x - y| \geq ||x| - |y||$
(f) $|x - y| \leq \varepsilon \;\Leftrightarrow\; y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon$, für $x, y \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 03** 16.9.2009

Aufgabe 9:

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mittels vollständiger Induktion:
(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad \text{(geometrische Reihe)}$$

(b) Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k} \qquad \text{(binomische Formel)}$$

Aufgabe 10:

(a) Schreiben Sie folgende Reihen in der Form $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$:

(a1) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{4}{7} + \frac{8}{9} + \ldots$
(a2) $\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \ldots$
(a3) $\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{3} \ln(3) + \frac{1}{4} \ln(4) - \ldots$

(b) Bestimmen Sie die Grenzwerte der nachstehenden Folgen:

(b1) $a_n = \frac{1}{n}$
(b2) $c_n = \frac{n-1}{n+1}$
(b3) $b_n = \frac{2n^3 - n^2 + 5}{5n^3 + 2n - 1}$

Aufgabe 11:

Zeigen Sie die Konvergenz der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ gegen den in **Ü10**(b1) erwarteten Grenzwert, und zwar "streng formal" (d.h. per ε-N-Rechnung).

Aufgabe 12:

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung existieren dann

$$a := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad , \quad b := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} \quad , \quad c := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$$

als Grenzwerte der entsprechenden endlichen Reihen $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ etc.
Zeigen Sie, dass $a \cdot b = c$ ist.
[Hinweis: $a \cdot b$ naiv ausmultiplizieren, als ob die Summe endlich wäre. Dann alle Summations-Index-Paare als Punkte im ersten Quadranten veranschaulichen, und in anderer Reihenfolge (diagonal) aufsummieren.]

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 04** 17.9.2009

Aufgabe 13:

Skizzieren Sie einige der folgenden Funktionsgraphen:

$$f_1(x) = -2x - 2 \ , \quad f_2(x) = |x| + x \ , \quad f_3(x) = x^3 \ , \quad f_4(x) = x^4 \ ,$$

$$f_5(x) = \frac{1}{x - 1} \ , \quad f_6(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{Lorentz-Kurve} \ ,$$

$$f_7(x) = \frac{1}{\exp(x) + 1} \quad \text{Fermi-Dirac-Verteilung} \ ,$$

$$f_8(x) = \exp(-(x - a)^2) \ , \quad a \in \mathbb{R} \quad \text{Gauss-Verteilung} \ .$$

Aufgabe 14:

(a) Welche Funktionen aus **Ü13** sind gerade bzw. ungerade?
(b) Zeigen Sie: *Jede* Funktion lässt sich als $f(x) = f_g(x) + f_u(x)$ schreiben, wobei $f_{g/u}$ gerade/ungerade ist.
(c) Was sind f_g und f_u für $f(x) = \exp(x)$?

Aufgabe 15:

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = ax + b$ für beliebige $a, b \in \mathbb{R}$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist.
[Hinweis: ε-δ-Definition benutzen.]

Aufgabe 16: (*)

Die sogenannten *hyperbolischen Funktionen* sind definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} \qquad \text{(sinus hyperbolicus)}$$

$$\cosh(x) := \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \qquad \text{(cosinus hyperbolicus)}$$

(a) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen. [z.B. Funktionswert für einige Argumente x berechnen, g/u ausnutzen; oder $\exp(\pm x)$ skizzieren, Summe und Differenz per Hand.]
(b) Können Sie die Potenzreihen von $\sinh(x)$ und $\cosh(x)$ angeben?
(c) Beweisen Sie $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ("Pythagoras für hyperbolische Funktionen").
[Hinweis: $\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$ verwenden.]

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 05** 18.9.2009

Aufgabe 17:

Die allgemeine Logarithmusfunktion ist über den natürlichen Logarithmus definiert als Abbildung von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch $\log_b(x) := \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$. Zeigen Sie für $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $x, y \in \mathbb{R}^+$ sowie $z \in \mathbb{R}$:

(a) $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$
(b) $\log_b(x^z) = z \log_b(x)$
(c) $b^{\log_b(x)} = x$
(d) $\log_b(b^z) = z$
(e) $\log_b(\frac{1}{x}) = -\log_b(x)$
(f) $\log_b(1) = 0$
(g) $\log_b(b) = 1$

[Hinweis: Benutzen Sie dazu die Funktionalgleichungen $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ und $\ln(x^y) = y \ln(x)$.]

Aufgabe 18:

(a) Können Sie $\log_2(8)$, $\log_3(81)$, $\log_5(5^n)$ berechnen?
(b) Wie löst man die Gleichung $9 \cdot 3^{(x^2)} = 27^x$ nach x auf?

Aufgabe 19:

(a) Schreiben Sie a^x als Potenz von b.
(b) Drücken Sie $\log_a(x)$ mit Hilfe des Logarithmus zur Basis b aus.

Aufgabe 20: (*)

(a) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Funktionen (vgl. **Ü16**) gegeben sind durch
  (a1) $\mathrm{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ (area sinus hyperbolicus)
  [Hinweis: auf beiden Seiten der Gleichung $\sinh$ anwenden]
  (a2) $\mathrm{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ (area cosinus hyperbolicus)
(b) Auf welchen Intervallen sind diese Funktionen definiert?
(c) Skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 06** 21.9.2009

Aufgabe 21:

Führen Sie eine Kurvendiskussion (d.h. erste und zweite Ableitung berechnen; Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte bestimmen; Verhalten für $x \to \pm\infty$ untersuchen; Graph der Funktion skizzieren) für die Funktion $f(x) = x\,e^{-x}$ (die sog. *Poisson-Verteilung*) durch.

Aufgabe 22: (*)

Führen Sie eine Kurvendiskussion für die rationale Funktion $f(x) = \frac{1+x^2}{1+2x}$ durch.

Aufgabe 23:

Leiten Sie aus der Produkt- und der Kettenregel sowie der Ableitung $(x^{-1})' = -x^{-2}$ die Quotientenregel (d.h. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$) her.

Aufgabe 24:

Können Sie die folgenden hyperbolischen Funktionen (vgl. **Ü12**) ableiten?

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &:= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) && \text{(sinus hyperbolicus)}\\
\cosh(x) &:= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) && \text{(cosinus hyperbolicus)}\\
\tanh(x) &:= \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} && \text{(tangens hyperbolicus)}\\
\coth(x) &:= \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} && \text{(cotangens hyperbolicus)}
\end{aligned}$$

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 07** 22.9.2009

Aufgabe 25:

Berechnen Sie die Ableitungen von $\operatorname{arsinh}(x)$ und $\operatorname{arcosh}(x)$ auf zwei verschiedenen Wegen:
(a) Per Ableitungsregel für Umkehrfunktionen, $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
(b) Unter Benutzung der logarithmischen Darstellungen aus **Ü20a**.

Aufgabe 26:

Differenzieren Sie die folgenden Funktionen (nach x):
(a) b^x (wobei $b \in \mathbb{R}^+$)
(b) x^a (wobei $a \in \mathbb{R}$)
(c) $\log_b(x)$ (wobei $b \in \mathbb{R}^+$)
(d) $\ln|f(x)|$
(e) x^x
(f) $[f(x)]^{g(x)}$

Aufgabe 27:

Erraten Sie jeweils eine Funktion $F(x)$ so, dass $F'(x) = f(x)$ für die folgenden $f(x)$ gilt:
(a) $f(x) = x\, e^{-x^2}$
(b) $f(x) = \sinh(x)\, \cosh(x)$
(c) $f(x) = (2x+3)^4$
(d) $f(x) = x\,(x^2+3)^5$
(e) $f(x) = \frac{x^2}{1-x^3}$
(f) $f(x) = x\ln(x)$

Aufgabe 28: (*)

(a) Können Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Regel von l'Hospital berechnen?
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cosh(x)}{x}$
(c) $\lim_{x\to\infty} P_n(x)\, e^{-ax}$, mit $a > 0$, $P_n(x)$ Polynom vom Grad $n \in \mathbb{N}$
(b) Zeigen Sie, dass Exponentialfunktion/Logarithmus für $x \to \infty$ schneller/langsamer wachsen als jede Potenz x^a mit $a \in \mathbb{R}^+$, also:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0 \quad .$$

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 08** 23.9.2009

Aufgabe 29:

Die unendliche Reihe $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, e^{kx}$ sei für alle x nahe 0 konvergent.

(a) Drücken Sie die unendlichen Reihen $f_n := \sum_{k=0}^{\infty} k^n\, p_k$ durch Ableitungen von $f(x)$ aus.
[Dieses allgemeine Verfahren heisst *Summieren durch Differenzieren*.
Hier ist $f(x)$ die *erzeugende Funktion* der *n-ten Momente* f_n.]

(b) Bestimmen Sie $\sum_{k=0}^{n} k\, q^k$ für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ [Vgl. **Ü9a**].

(c) Können Sie $\sum_{k=0}^{n} k^m$ für $m = 0, 1$ mit Hilfe der Regel von de l'Hospital berechnen?
[Idee: $k^m = \lim_{q\to 1} k^m q^k$, und weiter via **Ü9a** bzw **Ü29b**.]

Aufgabe 30:

Elementare Umformungen (z.B. Verschieben, Skalieren, Potenzreihe benutzen) und geometrisch–anschauliche Überlegungen (z.B. gerade/ungerade) reichen aus, um die Werte der folgenden Integrale zu bestimmen [Hauptsatz hier unrentabel].

$$J_1 = \int_0^4 dx\, \Big(5 - 3\,|x-2|\Big) \quad , \quad J_2 = \int_0^3 dx \left[1 + \ln\Big(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\Big) + \ln\Big(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\Big)\right]$$

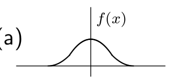
$$J_3 = \int_0^6 dx\, \left(\frac{1}{1+(x-4)^2} + \frac{(x-2)^2}{x^2-4x+5}\right) \quad , \quad J_4 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{15\,\varepsilon} dx\, \frac{x\,\cosh(x) - \sinh(x)}{\varepsilon\, x^3}$$

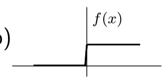
$$J_5 = \lim_{a\to\infty} \int_a^{a+2} dx\, \Big(x\,\sqrt{4+x^2} - x^2\Big)$$

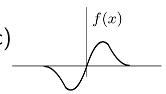
$$J_6 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{\varepsilon} dx\, \frac{2}{x\,\varepsilon^2} \left(\cosh(2x) - \sqrt{1 + 2\sqrt{6\,x\,\sinh(x) - 6x^2}}\right)$$

Aufgabe 31:

Skizzieren Sie zu den folgenden Funktionen $f(x)$ je eine Stammfunktion $F(x)$:
[Hinweis: Stammfunktion ist diejenige Funktion $F(x)$, welche $F'(x) = f(x)$ erfüllt.]

(a) 

(b) 

(c) 

Aufgabe 32:

Berechnen Sie folgende bestimmte Integrale (Stammfunktion raten und per Ableitung beweisen):
(a) $\int_0^a \mathrm{d}x\, \frac{1}{x^{1-a}}$ wobei $a > 1$
(b) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, (1-x^2)^2$
(c) $\int_0^1 \mathrm{d}x\, \sqrt{1+2x}$
(d) $\int_{-a}^{a} \mathrm{d}x\, \sinh(bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ [Nachdenken lohnt sich hier *vor* dem Rechnen]

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 09** 24.9.2009

Aufgabe 33: [d,e,f sind (*) – also nur bei Langeweile lösen]

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale (wie in **Ü32** durch "erraten" und ableiten):

(a) $\int \mathrm{d}t\, \dot{x}(t)$, (b) $\int \mathrm{d}t\, \dot{x}(t)\, x(t)$, (c) $\int \mathrm{d}q\, \frac{1}{a+bq}$ wobei $a, b, q > 0$

(d) $\int \mathrm{d}p\, 2^p$, (e) $\int \mathrm{d}x\, e^{e^x + x}$, (f) $\int \mathrm{d}y\, e^{ay} \sinh(by)$ wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $|a| \neq |b|$

Aufgabe 34:

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \mathrm{d}x\, \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^3}$ mit Nenner$\neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(b) $\int \mathrm{d}x\, x \ln(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

(c) $\int \mathrm{d}x \ln^2(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^+$

(d) $\int \mathrm{d}x\, \frac{\cosh(1/x)}{x^2}$ mit $x \in \mathbb{R}$

(e) $\int \mathrm{d}t\, \sqrt{1+t^2}$ mit $t \in \mathbb{R}$

[Hinweise: die Integranden in (a,d) haben eine bestimmte Form; (b,c) gehen gut per partieller Integration; in (e) hilft eine geschickte Substitution, z.B. $t = \sinh(x)$.]

Aufgabe 35:

Können Sie die beiden folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung knacken?

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{1}{(x+1)(x+2)} \quad , \quad \int_0^1 \mathrm{d}x\, \frac{x}{(x+1)(x+2)}$$

Aufgabe 36:

Für welche Werte des Parameters $\alpha \in \mathbb{R}$ existieren die Integrale

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\, x^\alpha \quad , \quad \int_1^\infty \mathrm{d}x\, x^\alpha \quad ,$$

und was ist dann der jeweilige Wert?

- Ab morgen kann eine Integraltabelle in den Übungen helfen, z.B. der *Bronstein*.
- Übungsraum–Änderung, nur für morgen (Fr 25.9.):
  U2-113 (DR) $\rightarrow$ D2-136
  U2-147 (MR) $\rightarrow$ D2-152

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 10** 25.9.2009

Aufgabe 37:

Lösen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe einer Formelsammlung (z.B. *Bronstein*):

(a) $\int_0^{1/2} \mathrm{d}x\, x^2 \sqrt{1-4x^2}$

(b) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, \frac{1}{\sqrt{x}\,(4-x)}$

[Hinweis: eventuell hilft dabei eine einfache Substitution wie z.B. $y = \alpha\, x$.]

Aufgabe 38:

Die sogenannte *Euler'sche Gammafunktion* ist definiert als

$$\Gamma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \Gamma(x) := \int_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-t}\, t^{x-1} \, .$$

Zeigen Sie, dass:

(a) $\Gamma(x)$ existiert für alle $x \in \mathbb{R}^+$.
(b) $\Gamma(1) = 1$
(c) $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$
(d) $\Gamma(n+1) = n!$ für $n \in \mathbb{N}$

[Bemerkung: $\Gamma(x+1)$ ist also die Verallgemeinerung der Fakultät $x!$ für $x \in \mathbb{R}^+$.]

Aufgabe 39:

Können Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bestimmen?

(a) $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, x^n\, e^{-|x|}$ für $n \in \mathbb{N}$ [**Ü38** hilft]

(*) (b) $\int_1^\infty \mathrm{d}x\, x^2\, e^{-x^2}$

(*) (c) $\int_0^\infty \mathrm{d}x\, x\, e^{-x^4}$

[Hinweis: für (b,c) können Sie $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ und $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \mathrm{d}x\, e^{-x^2} =: \mathrm{erf}(z)$ benutzen.]

Aufgabe 40:

(a) Berechnen Sie die *Momente* $M_n := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}y\, y^n\, p(y)$
der *Normalverteilung* $p(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-y^2/2}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(*) (b) Die Funktion $f(x) := \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}y\, g(y)\, e^{y\,x}$ sei konvergent für alle x nahe 0.
Schreiben Sie das n-te Moment $\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}y\, y^n\, g(y)$ von $g(y)$ als Ableitung von $f(x)$.
[Dieses allgemeine Verfahren heisst *Integrieren durch Differenzieren*; vgl. auch **Ü29a**.]

(*) (c) Mit der Methode aus (b) könnten Sie nun auch (a) lösen.

- Übungsraum–Änderung, nur für heute (Fr 25.9.):
  U2-113 (DR) $\rightarrow$ D2-136
  U2-147 (MR) $\rightarrow$ D2-152
- Raumänderung für die Vorlesung am Montag 28.9.: H6 $\rightarrow$ **H12**

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 11** 28.9.2009

Aufgabe 41:

Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt x_0 für:
(a) $f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k\ ,\ \ n \in \mathbb{N}\ ,\ \ a_n \neq 0\ ;\ \ x_0 = 0$
(b) $f_2(x) = \exp(x)\ ,\ \ x_0$ beliebig
(c) $f_3(x) = \sinh(x)\ ,\ \ x_0 = 0$
(d) $f_4(x) = \frac{1}{x}\ ,\ \ x_0 = 1$
(e) $f_5(x) = \operatorname{artanh}(x)\ ,\ \ x_0 = 0$ [Hinweis: $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ mit $|x| < 1$.]

Aufgabe 42:

(a) Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung bis zur vierten Ordnung in x (um $x_0 = 0$) von

$$\sqrt{1+x} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}\ .$$

(b) Die *relativistische Energie* eines Teilchens mit Ruhemasse m und Geschwindigkeit v ist

$$E(v) := \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\ ,$$

wobei $c \approx 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathsf{m}}{\mathsf{s}}$ die Lichtgeschwindigkeit ist. Diskutieren Sie mit Hilfe der Entwicklung aus (a) das Verhalten von $E(v)$ für Geschwindigkeiten, die klein im Vergleich zu c sind.

Aufgabe 43:

(a) Zeigen Sie, dass für $a \in \mathbb{R}$ und $|x| < 1$

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \quad , \quad \text{wobei} \ \binom{a}{k} := \frac{\overbrace{a(a-1)...(a-k+1)}^{k\ \text{Stück}}}{k!}\ .$$

(b) Mit Hilfe von (a) können Sie übrigens nochmals mühelos **Ü42a** lösen.

Aufgabe 44: (*)

Wie erhält man aus **Ü43a** ..
(a) .. für $a \in \mathbb{N}$ die binomische Formel (vgl. **Ü9b**)?
(b) .. die geometrische Reihe (vgl. Kap. 1.4 bzw. **Ü41d**)?

- Raumänderung für die Vorlesung am Dienstag 29.9.: H6 → **H13**

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 12** 29.9.2009

Aufgabe 45:

Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Taylorreihen aus **Ü41**, also von:
(a) $f_1(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$
(b) $f_2(x) = \exp(x) = \exp(x_0)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}$
(c) $f_3(x) = \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
(d) $f_4(x) = \frac{1}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,(x-1)^k$
(e) $f_5(x) = \operatorname{artanh}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$

Aufgabe 46:

(a) Geben Sie ein Polynom $p(x)$ an mit $|e^x - p(x)| < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$ für alle $|x| < 2$.
(b) Können Sie die Ungleichung $x - \frac{1}{2}\,x^2 < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$ beweisen?

Aufgabe 47:

Zeigen Sie, dass für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt:
(a) $\frac{d^n}{dx^n}\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$.
Wieviele Terme der Taylorentwicklungen von $\frac{1+x}{1-x}$ und e^{2x} sind identisch?
(b) $\frac{d^n}{dx^n}\,f(x^2) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \frac{(2k)!}{k!}\,(2x)^{n-2k}\,f^{n-k}(x^2)$
[Für gerades n ist $[n/2] := n/2$; Für ungerades n ist $[n/2] := (n-1)/2$.]

Aufgabe 48: (*)

(a) Welchen Konvergenzradius hat $\sum_{n=1}^{\infty} n\,x^n$?
(b) Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n\,(x-2)^n$?
(c) Wo konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} n^n\,x^n$?

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 13** 30.9.2009

Aufgabe 49:

(a) Seien $z_1 = 2 - 8i$, $z_2 = -9 + i$ und $z_3 = -2i$.

Berechnen Sie: $z_1 + z_2 - z_3$, $z_1 \cdot z_2^2$, $\dfrac{z_1 + 2z_2}{z_3}$, $\sqrt{z_2 + \dfrac{z_3}{2}}$.

(b) Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

(b1) $\dfrac{1}{1+i}$, $\dfrac{(1+2i)^2}{2+3i}$

(b2) z^3 für beliebiges $z = a + ib \in \mathbb{C}$

(b3) $\sqrt{z}$ für beliebiges $z = a + ib \in \mathbb{C}$

Aufgabe 50:

Finden Sie die Lösungen $x, y \in \mathbb{C}$ des Gleichungssystems $ix + 3y = 1$, $2x + iy = 2i$.

Aufgabe 51:

Zeigen Sie für beliebige $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dass

(a) $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$

(b) $(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$

(c) $(z^*)^* = z$

(d) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^* = z$

(e) $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^* = \dfrac{z_1^*}{z_2^*}$ für $z_2 \neq 0$

Aufgabe 52:

Die Betragsfunktion ist definiert als $|z| := \sqrt{z\, z^*} = \sqrt{[\mathrm{Re}\, z]^2 + [\mathrm{Im}\, z]^2}$. Zeigen Sie

(a) $|-z| = |z|$

(b) $|z^*| = |z|$

(c) $|z| \geq 0$

(d) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(e) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

- Raumänderung für die Vorlesung am Donnerstag 1.10.: H6 → **H12**

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 14** 1.10.2009

Aufgabe 53: [Teile (b,c) sind (*)]

Zeigen Sie, dass für die Betragsfunktion (vgl. **Ü52**) gilt:

(a) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecks-Ungleichung)

(b) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$

(c) Falls $z \in \mathbb{R}$, dann $|z| = \begin{cases} z & \text{falls } z \geq 0 \\ -z & \text{falls } z < 0 \end{cases}$

Aufgabe 54:

Betrachten Sie das komplexe Polynom zweiten Grades $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto P(z) := a\, z^2 + b\, z + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass

(a) $z_\pm := \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{C}$. [Hinweis: **Ü49**b3.]

(b) $z_\pm$ sind Nullstellen von $P(z)$

(c) $z_+\, z_- = \frac{c}{a}$ und $z_+ + z_- = -\frac{b}{a}$

(d) $P(z) = a(z - z_+)(z - z_-)$

Aufgabe 55:

Betrachten Sie das komplexe Polynom dritten Grades $P(z) = -\frac{1}{2}\, z^3 - 2\, z^2 + \frac{1}{2}\, z + 11$.

(a) Können Sie eine Nullstelle z_1 von $P(z)$ erraten?

(b) Begründen Sie (mit dem Fundamentalsatz der Algebra), dass es Zahlen $b, c \in \mathbb{C}$ gibt mit $P(z) = -\frac{1}{2}(z - z_1)(z^2 + b\, z + c)$.

(c) Bestimmen Sie b und c aus (b).

[Geht per Polynomdivision; oder durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich.]

(d) Berechnen Sie die restlichen Nullstellen z_2, z_3 .

Aufgabe 56: [Teil (c) ist (*)]

(a) Sei $k \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest. Berechnen Sie $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-|x|} \exp(i\, k\, x)$

[Hinweis: $e^{-x} \exp(ikx) \overset{x\to\infty}{\to} 0$.]

(b) Die Funktion $\tilde{f}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f(x) \exp(-ikx)$ heisst *Fourier-Transformierte* von $f(x)$.

Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $\tilde{f}(k)$ von $f(x) = e^{-|x|}$.

(c) Zeigen Sie:

$f(-x) = [f(x)]^*$ impliziert $[\tilde{f}(k)]^* = \tilde{f}(k)$ bzw. $\mathrm{Im}\, \tilde{f}(k) = 0$

$f(-x) = [-f(x)]^*$ impliziert $[\tilde{f}(k)]^* = -\tilde{f}(k)$ bzw. $\mathrm{Re}\, \tilde{f}(k) = 0$

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 15** 2.10.2009

Aufgabe 57:

Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$:
(a) $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$
(b) $\cos(2z) = 1 - 2\sin^2(z) = 2\cos^2(z) - 1$
(c) $[\cos(z) + i\sin(z)]^n = \cos(nz) + i\sin(nz)$

Aufgabe 58: [Teil (e) ist (*)]

Wir haben 'Nachholbedarf' bei den trigonometrischen Funktionen; Hier Gymnastik für $x \in \mathbb{R}$:
(a) Skizzieren Sie $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
(b) Bestimmen Sie $[\tan(x)]'$
(c) Schränken Sie den Definitionsbereich von $\tan(x)$ so ein, dass die Funktion eineindeutig ist, und skizzieren Sie die Umkehrfunktion $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$
(d) Bestimmen Sie $[\arctan(x)]'$
(e) Zeigen Sie für $z = a+ib \neq 0$: $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a}) + n(z)\,\pi$, mit $n(z) = \begin{cases} n(z) = 0 \text{ für } a, b \geq 0 \\ n(z) = 1 \text{ für } a < 0 \\ n(z) = 2 \text{ für } a \geq 0\,,\ b < 0 \end{cases}$

Aufgabe 59: (*)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:
(a) $\int \mathrm{d}x\, \tan(x)$
(b) $\int \mathrm{d}x\, \cos(x)\sin(2x)$
(c) $\int \mathrm{d}x\, \frac{1}{ax^2+bx+c}$ für $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b^2 < 4ac$
[Hinweis: Nenner per Substitution auf die Form $1 + y^2$ bringen; dann **Ü58**d benutzen.]

Aufgabe 60:

(a) Berechnen Sie $e^{i3\pi/2}$, $\arg(i)$, $\ln(i)$, $\sqrt[3]{i}$, i^i
(b) Zeigen Sie, dass $b^z = |b|^z\, e^{iz\arg(b)}$ für $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{C}$
(c) Bestimmen Sie alle Nullstellen $z_1, ..., z_n$ des Polynoms $P(z) = z^n - 1$ für $n \geq 2$ in der Form $z_k = |z_k|\, e^{i\arg(z_k)}$

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 16** 5.10.2009

Aufgabe 61:

Betrachten Sie den *euklidischen Vektorraum* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und komponentenweiser Addition $\vec{v}+\vec{w} = (v_1, v_2, ..., v_n)+(w_1, w_2, ..., w_n) := (v_1+w_1, v_2+w_2, ..., v_n+w_n)$ und Multiplikation $x\cdot\vec{v} := (xv_1, xv_2, ..., xv_n)$ (wobei $x \in \mathbb{R}$), sowie Nullvektor $\vec{0} := (0, 0, ..., 0)$ und (add.) inversem Element $-\vec{v} := (-1)\cdot\vec{v}$ wie in der Vorlesung.
Zeigen Sie (durch einfaches Einsetzen), dass die *Vektorraum-Axiome* gelten:
(1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
(2) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
(3) $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$
(4) $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
(5) $x\cdot(y\cdot\vec{v}) = (xy)\cdot\vec{v}$
(6) $1\cdot\vec{v} = \vec{v}$
(7) $x\cdot(\vec{u} + \vec{v}) = x\cdot\vec{u} + x\cdot\vec{v}$
(8) $(x + y)\cdot\vec{v} = x\cdot\vec{v} + y\cdot\vec{v}$

Aufgabe 62: (*)

Sei $V := \left\{ f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{x^k}{k!} \;\middle|\; c_k \in \mathbb{R},\ c_k \text{ so dass Potenzreihe konvergent} \right\}$
die Menge aller reellen Potenzreihen auf dem Intervall $[0, 1]$.
(a) Können Sie eine geeignete Addition zweier Elemente aus V und eine geeignete äussere Multiplikation mit reellen Zahlen so definieren, dass $(V, +, \cdot)$ ein Vektorraum wird?
[Bem.: dies ist ein sog. *Funktionenraum*; Vektoren sind statt mit $\vec{v}, \vec{w}, ..$ mit $f(x), g(x), ..$ bezeichnet.]
(b) Was ist eine geeignete Basis dieses Vektorraumes? Was ist seine Dimension?

Aufgabe 63:

Es sei eine Abbildung von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (das sogenannte *Skalarprodukt*) definiert durch
$\vec{v} \cdot \vec{w} = (v_1, v_2, ..., v_n) \cdot (w_1, w_2, ..., w_n) := v_1w_1 + v_2w_2 + ... + v_nw_n$.
Zeigen Sie (wieder durch einfaches Einsetzen), dass die sog. *Skalarprodukt-Axiome* gelten:
(1) $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
(2) $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$, und $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{0}$
(3) $(x\vec{v}) \cdot \vec{w} = x(\vec{v} \cdot \vec{w})$
(4) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Aufgabe 64: (*)

Zeigen Sie, dass das durch $f(x) \cdot g(x) := \int_0^1 \mathrm{d}x\, f(x)\, g(x)$ definierte Skalarprodukt auf dem *Funktionenraum* aus **Ü62** die *Skalarprodukt-Axiome* aus **Ü63** erfüllt.

Aufgabe 65:

Sei V ein Vektorraum, auf dem zusätzlich eine Norm $|\vec{v}|$ für beliebige $\vec{v} \in V$ definiert ist (*normierter Raum*). Zeigen Sie, dass die *Distanz* $d(v,w) := |\vec{v} - \vec{w}|$ zwischen zwei Vektoren die folgenden Eigenschaften erfüllt [Hinweis: benutzen Sie die drei Norm-Axiome aus der Vorlesung]:

(a) $d(\vec{v},\vec{w}) = d(\vec{w},\vec{v})$

(b) $d(\vec{v},\vec{w}) \geq 0$, und $d(\vec{v},\vec{w}) = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{w}$

(c) $d(\vec{u},\vec{w}) \leq d(\vec{u},\vec{v}) + d(\vec{v},\vec{w})$

[Also hat $|\vec{v} - \vec{w}|$ tatsächlich die Eigenschaften, die man anschaulich mit 'Distanz' bzw. 'Abstand' meint.]

Aufgabe 66:

(a) Zeigen Sie: Sind die Beträge von Summe und Differenz zweier Vektoren gleich, dann sind die Vektoren senkrecht zueinander.

(b) Zeigen Sie: Sind Summe und Differenz zweier Vektoren senkrecht zueinander, dann haben die Vektoren denselben Betrag.

(c) Welche geometrischen Objekte (gegeben durch die Menge aller Punkte $\vec{r}$) werden durch die folgenden (Vektor-) Gleichungen beschrieben?

(c1) $\vec{r} \cdot \vec{e}_3 = 0$

(c2) $|\vec{r}| = R$ mit konstantem $R \in \mathbb{R}^+$

(d) Können Sie Gleichungen angeben, die die folgenden geometrischen Objekte beschreiben?

(d1) eine zum Vektor $\vec{a}$ senkrechte Ebene durch den Ursprung

(d2) die Oberfläche einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{m}$

Aufgabe 67: (auf jeden Fall (d) beweisen)

Zeigen Sie (durch einfaches Einsetzen), dass für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ das *Kreuzprodukt*
$\vec{a} \times \vec{b} := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(b) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$

(f) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

[Hinweis: es reicht, eine mehrkomponentige Gleichung für *eine* (aber beliebige) Komponente zu beweisen.]

Aufgabe 68: (*)

Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ist. [Ein Gegenbeispiel genügt.]

Aufgabe 69:

Betrachten Sie das Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \phi(\vec{x}) := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, und berechnen Sie dessen *partielle Ableitungen*

(a) $\dfrac{\partial\phi(\vec{x})}{\partial x_k}$ und $\dfrac{\partial^2\phi(\vec{x})}{\partial x_k^2}$ für $k = 1, 2, 3$

(b) $\dfrac{\partial^2\phi(\vec{x})}{\partial x_1 \partial x_2}$ und $\dfrac{\partial^2\phi(\vec{x})}{\partial x_2 \partial x_1}$

Aufgabe 70:

Bestimmen Sie für das Skalarfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) := x_1^3 + 2x_1x_2x_3$

(a) das Vektorfeld $\operatorname{grad} f(\vec{x}) := \vec{\nabla} f(\vec{x}) := \left(\dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_2}, \dfrac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_3}\right)$

(b) das Skalarfeld $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} f(\vec{x})\right) := \Delta f(\vec{x}) := \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} f(\vec{x}) + \dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2} f(\vec{x}) + \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} f(\vec{x})$

[Sprechweise: grad heisst *Gradient*; $\vec{\nabla}$ heisst *Nabla-Operator*; Δ heisst *Laplace-Operator*.]

Aufgabe 71:

Bestimmen Sie für das Vektorfeld $\vec{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{g}(\vec{x}) := (x_2^3, x_1, x_1x_2x_3)$

(a) das Skalarfeld $\operatorname{div}\left(\vec{g}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{x}) := \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \dfrac{\partial g_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \dfrac{\partial g_3(\vec{x})}{\partial x_3}$

(b) das Vektorfeld $\operatorname{rot}\left(\vec{g}(\vec{x})\right) := \vec{\nabla} \times \vec{g}(\vec{x}) := \left(\dfrac{\partial g_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \dfrac{\partial g_2(\vec{x})}{\partial x_3}, \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \dfrac{\partial g_3(\vec{x})}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \dfrac{\partial g_1(\vec{x})}{\partial x_2}\right)$

[Bezeichnung: div heisst *Divergenz*; rot heisst *Rotation*.]

Aufgabe 72: (*)

Können Sie beweisen, dass für jedes zweimal stetig differenzierbare Skalarfeld $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Beziehung $\operatorname{rot}\left(\operatorname{grad}\phi(\vec{x})\right) = \vec{0}$ gilt?

- Raumänderung für die Vorlesung am Donnerstag 8.10.: H6 → **T2-205**

Aufgabe 73:

(a) Veranschaulichen Sie anhand einer Skizze, wohin die neuen Einheitsvektoren $\vec{f}_1,\ \vec{f}_2,\ \vec{f}_3$ zeigen, wenn man das kartesische Koordinatensystem zuerst um $\pi/2$ um die z–Achse dreht und danach um $\pi/2$ um die x–Achse.

(b) Zeigen Sie, dass auch das Produkt D der beiden Drehmatrizen zeilenweise die $\vec{f}$'s zeigt.

(c) Können Sie einen Vektor $\vec{b}$ angeben, dessen Komponenten sich unter D nicht verändern?

Aufgabe 74:

(a) Ist $D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$ eine Drehmatrix, d.h. gilt $D\,D^T = \mathbb{1} = D^T D$?

(b) Falls ja: Können Sie sogar den Drehwinkel φ und die Drehachse $\vec{e}$ (als Einheitsvektor) finden?

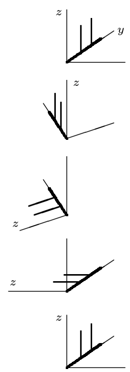
Aufgabe 75:

$DD^T = \mathbb{1}$ gilt für $D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ wegen $\vec{f}$-Orthonormierung, soviel ist klar(?)!

(a) Geben Sie die Drehachse $\vec{e}$ von D an.

(b) Welche Komponenten bekommen die Vektoren $\vec{a} = (-3,-1,-1)$, $\vec{b} = (1,-1,0)$ und $\vec{c} = (1,1,1)$ im gedrehten Koordinatensystem, d.h. $\vec{a}' =?$, $\vec{b}' =?$ und $\vec{c}' =?$

Aufgabe 76: (*)



Bei schwerem Wetter kommt ein Zweimaster vom Nordkurs (y–Achse) ab. Er dreht sich um $\pi/4$ um die Vertikale, kentert dann nach links, zeigt anderntags wieder nach Norden und kann aufgerichtet werden. Zu jeder Position des Schiffes hat der Kapitän die Richtung notiert, in der er den Polarstern sieht. Vor dem Unwetter sah er ihn in Richtung $\vec{e} = (0,1,1)/\sqrt{2}$.

(a) Notieren Sie die zu den 4 Drehungen gehörigen Matrizen $D^{(1)}$, $D^{(2)}$, $D^{(3)}$ und $D^{(4)}$ und ermitteln (aus dem jeweils vorangegangenen Einheitsvektor) die Polarstern–Richtungen $\vec{e}'$, $\vec{e}''$, $\vec{e}'''$, $\vec{e}''''$. [Hinweis: $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$]

(b) Welches Produkt aus D's führt von der Startposition direkt zur übernächsten Position, bzw. zur überübernächsten bzw. zur letzten? Und welche Drehmatrizen kommen dabei jeweils heraus?

Aufgabe 77: (*)

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 & 2 & -6 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ hat den *Rang* 2,

denn die ersten beiden Zeilen sind linear unabhängig, und ihre Summe ergibt die dritte.

Können Sie den *Rang* von $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & 3 \\ -1 & 6 & 9 & -2 \end{pmatrix}$ bestimmen?

Aufgabe 78: (*)

Finden Sie alle Lösungen $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & i & i \\ i & i & 2i+1 \\ 1 & -2 & 2i-1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} i-2 \\ 2i-1 \\ -1-2i \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 79: (*)

Bestimmen Sie die Inverse der Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 80: (*)

Seien $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -7 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 9 & 13 \\ -3 & 4 & -2 & 9 & -1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 8 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) Geben Sie alle Lösungen des homogenen Systems $A\vec{x} = \vec{0}$ an.

(b) Finden Sie alle Lösungen des inhomogenen Systems $A\vec{x} = \vec{b}$.

Viel Spass und Erfolg im Studium!

Übungen zum Vorkurs Physik **Blatt Nr. 20** Lösungsvorschlag

Aufgabe 77:

Rang=2, denn die ersten beiden Zeilen (nenne sie $\vec{z}_1$, $\vec{z}_2$) sind linear unabhängig (d.h. die Glg. $\vec{z}_1 + c\,\vec{z}_2 = 0$ hat keine Lösung c), und die dritte Zeile ergibt sich als Linearkombination der beiden anderen: $\vec{z}_3 = \vec{z}_1 - 2\,\vec{z}_2$.

Aufgabe 78:

Lösungen sind alle Geraden der Form $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ (1-i)(i - x_3) \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit beliebigem $x_3 \in \mathbb{C}$.

[Warum sind nicht alle x_k eindeutig bestimmt?
Weil die Matrix nicht Rang 3, sondern Rang 2 hat: $3(1-i)\vec{z}_1 - (3+i)\vec{z}_2 + 2\vec{z}_3 = \vec{0}$.]

Aufgabe 79:

Die Inverse der angegebenen Matrix M ist $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$,

denn damit ist $M\,M^{-1} = \mathbb{1} = M^{-1}M$.

Aufgabe 80:

(a) Das homogene Gleichungssystem wird durch alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit beliebigem x_3 gelöst.

(b) Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems sind alle $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 - 2x_3 \\ -1 - x_3 \\ x_3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit bel. x_3.

[Hier ist der Grund für die Lösungsschar wieder lineare Abhängigkeit der Zeilen $\vec{z}_k$ von A: $18\vec{z}_1 + \vec{z}_2 + 13\vec{z}_3 = \vec{0}$.]