Übungen zum Vorkurs Physik	**Blatt Nr. 17**	6.9.2009

Aufgabe 65:

Sei V ein Vektorraum, auf dem zusätzlich eine Norm $|\vec{v}|$ für beliebige $\vec{v} \in V$ definiert ist (*normierter Raum*). Zeigen Sie, dass die *Distanz* $d(v, w) := |\vec{v} - \vec{w}|$ zwischen zwei Vektoren die folgenden Eigenschaften erfüllt [Hinweis: benutzen Sie die drei Norm-Axiome aus der Vorlesung]:

(a) $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$

(b) $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$, und $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{v} = \vec{w}$

(c) $d(\vec{u}, \vec{w}) \leq d(\vec{u}, \vec{v}) + d(\vec{v}, \vec{w})$

[Also hat $|\vec{v} - \vec{w}|$ tatsächlich die Eigenschaften, die man anschaulich mit 'Distanz' bzw. 'Abstand' meint.]

Aufgabe 66:

(a) Zeigen Sie: Sind die Beträge von Summe und Differenz zweier Vektoren gleich, dann sind die Vektoren senkrecht zueinander.

(b) Zeigen Sie: Sind Summe und Differenz zweier Vektoren senkrecht zueinander, dann haben die Vektoren denselben Betrag.

(c) Welche geometrischen Objekte (gegeben durch die Menge aller Punkte $\vec{r}$) werden durch die folgenden (Vektor-) Gleichungen beschrieben?

(c1) $\vec{r} \cdot \vec{e}_3 = 0$

(c2) $|\vec{r}| = R$ mit konstantem $R \in \mathbb{R}^+$

(d) Können Sie Gleichungen angeben, die die folgenden geometrischen Objekte beschreiben?

(d1) eine zum Vektor $\vec{a}$ senkrechte Ebene durch den Ursprung

(d2) die Oberfläche einer Kugel mit Radius R und Mittelpunkt $\vec{m}$

Aufgabe 67: (auf jeden Fall (d) beweisen)

Zeigen Sie (durch einfaches Einsetzen), dass für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ das *Kreuzprodukt*
$\vec{a} \times \vec{b} := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ die folgenden Eigenschaften hat:

(a) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

(b) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$, mit $\lambda \in \mathbb{R}$

(c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(d) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$

(e) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{0}$

(f) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$

[Hinweis: es reicht, eine mehrkomponentige Gleichung für *eine* (aber beliebige) Komponente zu beweisen.]

Aufgabe 68: (*)

Zeigen Sie, dass im Allgemeinen $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ist. [Ein Gegenbeispiel genügt.]