

**Aufgabe 57:**

Zeigen Sie für alle  $z \in \mathbb{C}$ :

- (a)  $\sin(2z) = 2 \sin(z) \cos(z)$
- (b)  $\cos(2z) = 1 - 2 \sin^2(z) = 2 \cos^2(z) - 1$
- (c)  $[\cos(z) + i \sin(z)]^n = \cos(nz) + i \sin(nz)$

**Aufgabe 58:** [Teil (e) ist (\*)]

Wir haben 'Nachholbedarf' bei den trigonometrischen Funktionen; Hier Gymnastik für  $x \in \mathbb{R}$ :

- (a) Skizzieren Sie  $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
- (b) Bestimmen Sie  $[\tan(x)]'$
- (c) Schränken Sie den Definitionsbereich von  $\tan(x)$  so ein, dass die Funktion eineindeutig ist, und skizzieren Sie die Umkehrfunktion  $\arctan(x) := \tan^{-1}(x)$
- (d) Bestimmen Sie  $[\arctan(x)]'$
- (e) Zeigen Sie für  $z = a+ib \neq 0$ :  $\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + n(z) \pi$ , mit  $n(z) = \begin{cases} n(z) = 0 & \text{für } a, b \geq 0 \\ n(z) = 1 & \text{für } a < 0 \\ n(z) = 2 & \text{für } a \geq 0, b < 0 \end{cases}$

**Aufgabe 59:** (\*)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

- (a)  $\int dx \tan(x)$
- (b)  $\int dx \cos(x) \sin(2x)$
- (c)  $\int dx \frac{1}{ax^2+bx+c}$  für  $a, b, c \in \mathbb{R}$  und  $b^2 < 4ac$

[Hinweis: Nenner per Substitution auf die Form  $1 + y^2$  bringen; dann **Ü58d** benutzen.]

**Aufgabe 60:**

- (a) Berechnen Sie  $e^{i3\pi/2}$ ,  $\arg(i)$ ,  $\ln(i)$ ,  $\sqrt[3]{i}$ ,  $i^i$
- (b) Zeigen Sie, dass  $b^z = |b|^z e^{iz \arg(b)}$  für  $b \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $z \in \mathbb{C}$
- (c) Bestimmen Sie alle Nullstellen  $z_1, \dots, z_n$  des Polynoms  $P(z) = z^n - 1$  für  $n \geq 2$  in der Form  $z_k = |z_k| e^{i \arg(z_k)}$